$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 60–64

Geometrijos egzaminas VII klasėje

J. Valdman

Šis straipsnis išspausdintas Maskvoje leidžiamame mokytojams laikraštyje «« Первое сентября»» (Nr. 3, 2002). Jame rašoma apie Petrozavodsko matematikos licėjuje Nr. 40 vykdomą geometrijos egzaminą VII klasės moksleiviams. Straipsnį į lietuvių kalbą išvertė Valdas Vanagas.

Egzamino tvarka

Sistemiškai geometrijos kursą nagrinėti pradedama VII klasėje. Per mokslo metus mokiniai sužino, kas yra aksioma, kas yra teorema, kaip remiantis žinomomis aksiomomis ir teoremomis gaunamos naujos teoremos, kaip jos įrodomos, kokia yra jų struktūra.

Mokslo metų pabaigoje mokiniai laiko egzaminą. Kiekvienas mokinys traukia bilietą, į kurį įeina vienas teorinis klausimas ir vienas uždavinys. Pagrindinis egzamino tikslas yra ne patikrinti, kiek žinių įgijo moksleiviai, o išsiaiškinti jų loginio mąstymo „kultūrą". Todėl egzamino teorinė medžiaga apima tik pagrindines VII klasės kurso teoremas (iš viso 12) ir svarbiausias jų išvadas (iš viso 10).

Bilietų uždaviniai parenkami ypač kruopščiai. Įtraukiami tokie, kurie iliustruoja pagrindinius teoremų įrodymo metodus ar uždavinių sprendimo būdus ir kuriais bus remiamasi vėliau. Dalį uždavinių moksleiviai sprendė per mokslo metus, kitų — ne. Uždaviniai gana sunkūs, todėl ne visi mokiniai egzamino metu uždavinį išsprendžia automatiškai. Taigi egzamino metu netaikoma standartinė vertinimo sistema. Egzaminatorius turi suteikti galimybę egzaminuojamajam susiorientuoti konkrečioje situacijoje (skirti daugiau laiko, pateikti papildomų — „užvedančių ant kelio" klausimų). Taip bendraujant nustatomas kiekvieno moksleivio matematinio pasirengimo lygis.

Egzaminui parengtų uždavinių yra dvigubai daugiau negu bilietų. Todėl kiekvienas moksleivis sprendžia skirtingą uždavinį.

Atsakinėdamas į egzamino klausimus, moksleivis privalo:

1) žinoti apibrėžimus visų sąvokų, kurių prireikia teoremai įrodyti;
2) žinoti ir mokėti nusakyti žodžiais visus teiginius, kuriais remiamasi įrodant teoremą;
3) tiksliai formuluoti įrodomą teoremą ir išskirti, kas yra žinoma ir ką reikia įrodyti;
4) suprasti įrodymo prieštaros metodu esmę;
5) žinoti, kas yra tiesioginė ir atvirkštinė teorema;
6) parodyti, kad supranta (geba apibūdinti savais žodžiais) fundamentalius geometrijos terminus — „savybę", „požymį" ir kt.;
7) mokėti atlikti pagrindinius brėžimo (skriestuvu ir liniuote) uždavinius.

Egzamino bilietai

1 bilietas
1. Teorema apie lygių trikampių kampų lygumą.
2. Uždavinys iš temos „Trikampio kampų suma".

2 bilietas
1. Pirmasis trikampių lygumo požymis.
2. Uždavinys iš temos „Trikampio nelygybė".

3 bilietas
1. Antrasis trikampių lygumo požymis.
2. Uždavinys iš temos „Lygiagretumas".

4 bilietas
1. Lygiašonio trikampio požymiai.
2. Uždavinys iš temos „Atkarpos, spinduliai, tiesės".

5 bilietas
1. Teorema apie atkarpos vidurio statmenį ir jai atvirkštinė teorema.
2. Uždavinys iš temos „Trikampio nelygybė".

6 bilietas
1. Lygiašonio trikampio požymiai.
2. Uždavinys iš temos „Trikampio kampų suma".

7 bilietas
1. Teorema apie trikampio priekampį.
2. Uždavinys iš temos „Apskritimas ir skritulys. Sfera ir rutulys".

8 bilietas
1. Teoremos apie trikampio priekampį išvados (1–5 išvados).
2. Uždavinys iš temos „Trikampių lygumas".

9 bilietas
1. Teorema apie trikampio didesniojo kampo ir ilgesniosios kraštinės atitikimą.
2. Uždavinys iš temos „Trikampio kampų suma".

10 bilietas
1. Teorema apie trikampio ilgesniosios kraštinės ir didesniojo kampo atitikimą.
2. Uždavinys iš temos „Kampai".

11 bilietas
1. Trikampio nelygybė (teorema).
2. Uždavinys iš temos „Atkarpos, spinduliai, tiesės".

12 bilietas
1. Teorema apie trikampio kampų sumą.
2. Uždavinys iš temos „Lygiagretumas".

13 bilietas
1. Pirmasis tiesių lygiagretumo požymis.
2. Uždavinys iš temos „Kampai".

14 bilietas
1. Antrasis ir trečiasis tiesių lygiagretumo požymiai. Statmenų tiesių lygiagretumas.
2. Uždavinys iš temos „Trikampių lygumas".

15 bilietas
1. Lygiagrečių tiesių savybės.
2. Uždavinys iš temos „Lygiašonis trikampis".

16 bilietas
1. Teorema apie lygiagrečių tiesių atkarpų, esančių tarp kitų dviejų lygiagrečių tiesių, lygumą.
2. Uždavinys iš temos „Lygiašonis trikampis".

Egzamino uždavinių sąlygos

Atkarpos, spinduliai, tiesės

1. Taškas C atkarpą AB dalija į dvi dalis: atkarpą $AC = 1$ ir atkarpą $CB = 2$. Kam lygus atstumas tarp atkarpų AC ir CB vidurio taškų?
Išspręskite šį uždavinį bendruoju atveju, kai $AC = a$, $CB = b$.
Ar galima būtų išspręsti šį uždavinį žinant tik atkarpos AB ilgį: $AB = d$?

2. Trys 6 cm ilgio atkarpos yra vienoje tiesėje. Pirmoji ir antroji atkarpos turi bendrą dalį, kuri lygi 4 cm. Tokio ilgio bendrą dalį turi ir antroji bei trečioji atkarpos. Ar galite apskaičiuoti pirmosios ir trečiosios atkarpų bendrosios dalies ilgį?
Pasistenkite šį uždavinį išspręsti bendruoju atveju.

3. Trikampyje ABC nubrėžta atkarpa BD iki kraštinės AC. Koks atkarpos BD ilgis, jeigu:
a) duotojo trikampio perimetras lygus 20 cm, o gautųjų trikampių perimetrai lygūs 10 cm ir 12 cm;
b) duotojo trikampio perimetras lygus 3 m, o gautųjų trikampių perimetrai lygūs 1 m ir 2 m?

Apskritimas ir skritulys. Sfera ir rutulys

1. Yra du taškai A ir B.
a) Kiek per juos galima nubrėžti apskritimų?
b) Ar tarp jų yra pats didžiausias apskritimas? Pats mažiausias?

2. Kurie iš pateiktų tvirtinimų yra teisingi, o kurie — ne?
a) Apskritime yra pati ilgiausia styga.
b) Apskritime yra pati trumpiausia styga.
c) Kiekvienai apskritimo stygai tame apskritime yra jai lygi kita styga.
d) Kiekvienas skritulys turi nuopjovą, kuri yra šio skritulio išpjova.
e) Kiekvienoje skritulio išpjovoje yra be galo daug jo nuopjovų.
f) Kiekviename skritulyje galima rasti tokią nuopjovą, kurioje būtų duotoji skritulio išpjova.

3. Du taškai A ir B yra tokie, kad $AB = 1$. Pavaizduokite figūrą, sudarytą iš tokių taškų X, kad:
a) $AX \leqslant 1$, $BX \geqslant 1$;
b) $AX \geqslant 1$, $BX \geqslant 1$.

4. Pažymėkite ant rutulio tašką A. Nubrėžkite rutulio paviršiuje apskritimą su centru tame taške. Tame apskritime paimkite du taškus B ir C. Paaiškinkite, kodėl trikampis ABC lygiašonis. Ar gali toks trikampis būti lygiakraštis?

Kampai

1. Duoti du taškai A ir B. Pavaizduokite figūrą, sudarytą iš visų taškų X tokių, kad:
a) $\angle XAB \geqslant 30°$, $\angle XBA \leqslant 30°$;
b) $\angle XAB \leqslant 30°$, $\angle XBA \geqslant 30°$.

2. Kampai ab ir bc — kryžminiai, spindulys p — kampo ab pusiaukampinė, spindulys q yra kampo bc viduje ir nubrėžtas iš jo viršūnės. Įrodykite, kad q yra kampo bc pusiaukampinė, jei kampas pq ištiestinis.

3. a) Matlankiu nubraižykite 70° kampą. Nesinaudodami matlankiu nubraižykite 10° kampą. (Galima naudotis kitais braižymo įrankiais.)
b) Matlankiu nubraižykite 17° kampą. Nesinaudodami matlankiu nubraižykite 7° kampą.
c) Matlankiu nubraižykite 65° kampą. Nesinaudodami matlankiu nubraižykite 20° kampą.

Trikampių lygumas

1. Įrodykite, kad keturkampio, kurio kraštinės ir kampai lygūs, įstrižainės yra lygios ir statmenos.

2. Įrodykite, kad lygių trikampių lygios atitinkamos jų:
a) pusiaukraštinės;
b) pusiaukampinės;
c) aukštinės.

3. Nubraižykite kampą POQ. Nubrėžkite jo pusiaukampinę. Kampo kraštinėse atidėkite lygias atkarpas OA ir OB, o pusiaukampinėje pažymėkite tašką C. Įrodykite, kad:
a) $CA = CB$;
b) spindulys CO — kampo ACB pusiaukampinė;
c) $AB \perp OC$.

4. Nubrėžkite apskritimą su centru taške O_1. Nubrėžkite dar vieną to paties spindulio apskritimą su centru taške O_2 tokį, kad abu apskritimai kirstųsi dviejuose taškuose. Susikirtimo taškus pažymėkite raidėmis A ir B. Įrodykite, kad:
a) AB iš taškų O_1 ir O_2 matoma tuo pačiu kampu;
b) O_1O_2 iš taškų A ir B matoma tuo pačiu kampu.
Kuris iš šių tvirtinimų teisingas, jei nubrėžtųjų apskritimų spinduliai yra skirtingo ilgio?

5. $ABCD$ — trikampė piramidė. Įrodykite, kad visos piramidės sienos yra lygūs trikampiai, jei $\angle ABD =$ $= \angle BDC$, $\angle ADB = \angle CBD$, $\angle ADC = \angle BAD$.

Lygiašonis trikampis

1. Ant lapo nubrėžtas apskritimas. Kaip liniuote ir skriestuvu nustatyti jo centrą?

2. Nubraižykite trikampį. Nubrėžkite dviejų jo kraštinių vidurio statmenis. Tegu O — jų susikirtimo taškas. Įrodykite, kad:
a) taškas O vienodai nutolęs nuo visų trikampio viršūnių;
b) taškas O priklauso trečiosios trikampio kraštinės vidurio statmeniui.

3. Ant žemės nubrėžta tiesė ir joje pažymėtas taškas. Reikia nubrėžti tiesę, statmeną nubrėžtajai ir einančią per pažymėtąjį tašką. Ar sugebėsite tai padaryti neturėdami matavimo instrumentų?

4. Greta dviejų gyvenviečių eina kelias. Kur jūs siūlytumėte įrengti autobuso sustojimo aikštelę, kad ji būtų patogi abiejų gyvenviečių gyventojams?

5. Taisyklingosios keturkampės piramidės $PABCD$ pagrindas — kvadratas $ABCD$. Kokios rūšies yra trikampiai PCD, PQC, APC, BPD (taškas Q — kvadrato įstrižainių susikirtimo taškas)?

Trikampio nelygybė

1. Vieno trikampio dvi kraštinės lygios kito trikampio dviem kraštinėms, o kampas tarp pirmojo trikampio tų kraštinių didesnis negu tarp antrojo. Įrodykite, kad ir trečioji pirmojo trikampio kraštinė didesnė už atitinkamą antrojo trikampio kraštinę.

2. Jūs einate keliu pro greta stovintį bokštą. Kuo arčiau bokšto prieinate, tuo geriau jį matote. Kuo tai būtų galima paaiškinti?

3. Įrodykite, kad trikampio pusiaukraštinė trumpesnė už jos gretimų kraštinių sumos pusę ir ilgesnė už jų skirtumo pusę.

Trikampio kampų suma

1. Stačiojo trikampio vienas kampas lygus 30°. Įrodykite, kad ilgis statinio, esančio prieš tą kampą, lygus pusei įžambinės ilgio. Suformuluokite ir įrodykite atvirkštinį teiginį.
2. Jūs stovite lygioje nuokalnės vietoje. Sugalvokite būdą nustatyti kampui, kurį sudaro nuokalnė su horizontaliuoju paviršiumi.
3. Lygiašonio trikampio priekampis lygus α. Kam turi būti lygus kampas α, kad tas trikampis būtų: lygiakraštis; statusis?
4. Kam lygus kampas tarp dviejų trikampio pusiaukampinių, jei trečiasis trikampio kampas lygus α? Kaip išspręsti atvirkštinį uždavinį?
5. Iš taško A, esančio kampo viduje, nubrėžti statmenys į to kampo kraštines. Nustatykite, kaip priklauso kampo A didumas nuo duotojo kampo didumo.
6. Yra dvi susikertančios tiesės. Pažymėkite tašką, nepriklausantį nė vienai iš tų tiesių. Per tą tašką nubrėžkite tieses, statmenas duotosioms. Įrodykite, kad kampas tarp nubrėžtų tiesių lygus kampui tarp duotųjų tiesių.

Lygiagretumas

1. Įrodykite, kad lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas dalija jas pusiau.
2. Nubrėžkite dvi lygiagrečias tieses a ir b. Tiesėje a pažymėkite du taškus K ir M. Per šiuos taškus nubrėžkite dvi tieses, sudarančias su tiese a lygius kampus. Įrodykite, kad šių tiesių atkarpos, esančios tarp tiesių a ir b, yra lygios.
3. Įrodykite: jei keturkampio įstrižainių susikirtimo taškas dalija jas pusiau, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.
4. Nubrėžkite tiesę ir pažymėkite tašką, nepriklausantį tai tiesei. Per šį tašką nubrėžkite tiesę, lygiagrečią su nubrėžtąja.

P.S. Įdomu, kaip sektųsi mūsų dešimtokams ar dvyliktokams laikyti tokį egzaminą. Sėkmės.