$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 50–59

Progresijos, „voratinkliai“ ir Jurgitos biotrąšos

Ričardas Kudžma
ricardas.kudzma@maf.vu.lt

Praėjusių metų valstybinio matematikos brandos egzamino uždavinį apie Jurgitos gėlę ir biotrąšas komentavo Vilius Stakėnas 2001 metų žurnalo „Alfa plius omega“ 2 numeryje. Skaitydamas straipsnelį, prisiminiau 1994 metų žurnalo „Mokykla“ 10–11 numerį, skirtą matematikai, kuriame rašiau apie tieses, progresijas ir ... „voratinklius“. Apie tai buvo rašyta ir knygelėje „Sekos“ (autoriai — A. Kudžmienė, R. Kudžma), kuri, ko gero, taip ir nesurado savo skaitytojo. Pabandysiu grįžti prie „voratinklių“ ir parodyti, kad jie galėjo padėti Jurgitai tręšiant savo gėlę.

1. Progresijos ir „voratinkliai“

Sakydami „Seka a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ..., tenkinanti sąlygą

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n, \dots, \qquad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

čia q, $q \neq 1$ ir $q \neq 0$ — pastovus skaičius, vadinama geometrine progresija“, mes iš visų sekų išskiriame specialias, turinčias tam tikrą savybę, sekas. Tai geometrinės progresijos apibrėžimas. Tačiau jis nieko nepasako apie tokių sekų egzistavimą. Beje, šiame apibrėžime (1) lygybę galima pakeisti jai ekvivalenčia ir labiau konstruktyvia

$$a_{n+1} = qa_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n, \dots. \tag{2}$$

Pačiom sekom apibrėžti arba konstruoti yra du pagrindiniai būdai. Šiuo konkrečiu atveju tai atrodytų taip:

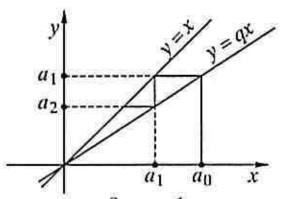
- *Globalusis, arba statinis.* Visą seką apibrėžiame iškart:

$$a_n = a_0 q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{3}$$

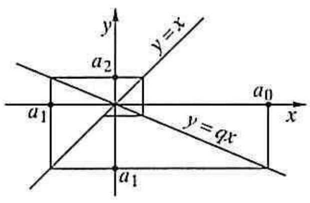
- *Rekurentusis, arba dinaminis.* Mintį tokiam apibrėžimui pasiūlo formulė (2). Pasirenkame pradinį sekos narį a_0. Po to apibrėžiame kitus sekos narius:

$$a_1 = qa_0, \quad a_2 = qa_1, \quad \dots, \quad a_{n+1} = qa_n, \quad \dots. \tag{4}$$

Akivaizdu, kad seka, nusakyta (3) ar (4) lygybe, tenkina (2) sąlygą. Labai gerai, kai algebros objektus mokame interpretuoti geometriškai. Geometrines progresijas (taip pat ir kai kurias kitas sekas) galima tirti „voratinklių“ metodu. Pasistengsime labai detaliai nusakyti „voratinklio“ braižymo procedūrą:



$0<q<1$



$-1<q<0$

- Koordinačių plokštumoje nubrėžiame tiesę $y = qx$.
- Abscisių ašyje pažymime tašką a_0.
- Iš šio taško iškeliame statmenį iki susikirtimo su tiese $y = qx$. Geometriškai gauname tašką, kurio ordinatė yra qa_0, t. y. kitas sekos narys yra a_1. Iš taško $(a_0; qa_0)$ brėžiame horizontalią atkarpą iki susikirtimo su ordinačių ašimi. Joje gauname reikšmę a_1. Jei a_1 būtų abscisių ašyje, tai galėtume procedūrą pakartoti ir rasti sekos narį $a_2 = qa_1$. Kaip reikšmę a_1 iš ordinačių ašies geometriškai perkelti į abscisių ašį? Yra paprastas atsakymas.
- Brėžiame tiesę $y = x$.
- Horizontalę, brėžtą per tašką $(a_0; a_1)$, pratęsiame iki susikirtimo (jei dar nesikerta) su tiese $y = x$. Šių tiesių susikirtimo taško koordinatės yra $(a_1; a_1)$.
- Iš taško $(a_1; a_1)$ brėžiame statmenį į abscisių ašį, kurioje gauname tašką a_1, ir t. t.

Matome, kad „voratinklyje“ labai gražiai atsiskleidžia sekos kitimas, arba dinamika. Jei q tenkina sąlygą $-1 < q < 0$, tai gautasis brėžinys iš tikrųjų primena voratinklį. Pastebėsime, kad „voratinkliui“ braižyti naudojamės antruoju (rekurenčiuoju) geometrinės progresijos apibrėžimu.

2. Jurgitos biotrąšos

Šis uždavinys man taip patiko, kad aš jį daviau VU MIF pirmojo kurso studentams per kontrolinį (2001 11 17). Rugsėjo mėnesį jiems aiškinau „voratinklių“ metodą, nes jis, mano nuomone, padeda geriau suprasti sekos ribos sąvoką. Sąlygą truputį pakeičiau, todėl ją primenu:

Jurgita kiekvieną šeštadienį kambarinę gėlę patręšia 10 g biotrąšų. Yra žinoma, kad trąšų kiekis vazone per savaitę sumažėja apie 25%.

a) Tarkime, kad Jurgitos prižiūrima gėlė anksčiau nebuvo tręšta biotrąšomis. Parašykite formulę, nusakančią trąšų kiekį kiekvienos savaitės pabaigoje prieš pat naują tręšimą.

b) Biotrąšos veikia efektyviai tik tada, kai jų kiekis vazone iki kito tręšimo momento visą laiką yra didesnis nei 20 g. Apskaičiuokite, po kelių patręšimų tokiu būdu tręšiant gėlę trąšos ims veikti efektyviai visą laiką.

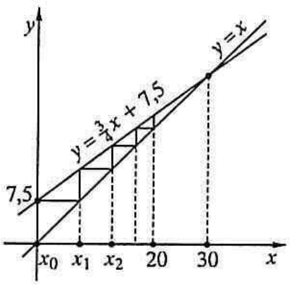
c) Parašykite formulę, pagal kurią galima būtų apskaičiuoti trąšų kiekį vazone po kiekvieno patręšimo.

d) Kai biotrąšų kiekis viršija 50 g, gėlė ima džiūti dėl per didelio trąšų kiekio. Įrodykite (dviem būdais), kad Jurgita gali ir toliau taip tręšti jos prižiūrimą gėlę (kad nenudžiūtų).

Palyginę su originalia formuluote, matome, kad pridėta viena dalis (a), kurioje yra prašoma parašyti trąšų, esančių vazone prieš pat naują tręšimą, kitimo formulę. Pradėkime spręsti.

a) Trąšų kiekį vazone prieš pat pirmąjį tręšimą pažymėkime x_0, o prieš pat $(n+1)$-ąjį tręšimą pažymėkime x_n. Jurgitos prižiūrima gėlė anksčiau nebuvo tręšta biotrąšomis, todėl $x_0 = 0$. Tada:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 10 \cdot \frac{3}{4} = (x_0 + 10) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}x_0 + 7{,}5,\\
&x_2 = (x_1 + 10) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}x_1 + 7{,}5,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_{n+1} = (x_n + 10) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}x_n + 7{,}5,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{5}
$$



b) Gavome rekurentiškai, arba dinamiškai, apibrėžtą seką. Jai tirti nubraižykime „voratinklį“. Tik minėtą funkciją $y = qx$ pakeiskime $g(x) = \frac{3}{4}x + 7{,}5$, nes $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, …, $x_{n+1} = g(x_n)$, ….

Iš brėžinio matyti, kad seka didėja ir artėja į reikšmę, nusakytą tiesių $y = x$ ir $y = \frac{3}{4}x + 7{,}5$ sankirta. Išsprendę lygtį

$$
x = \frac{3}{4}x + 7{,}5,
\tag{6}
$$

gauname $x = 30$. Iš „voratinklio“ matome, kad seka kada nors viršys dvidešimties ribą, o sykį viršijusi visada bus didesnė už 20. Belieka tai įrodyti analiziškai. Norint atsakyti į pirmąjį klausimą, reikia skaičiuoti:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0,\\
&x_1 = 7{,}5,\\
&x_2 = 17{,}5 \cdot 0{,}75 = 13{,}125,\\
&x_3 = 23{,}125 \cdot 0{,}75 = 17{,}34375,\\
&x_4 = 27{,}34375 \cdot 0{,}75 = 20{,}5078125.
\end{aligned}
$$

Išspręsti uždavinį iki galo reikėtų matematinės indukcijos.

Indukcijos bazė: $n = 4$, $x_4 = 20{,}5078125 > 20$.

Indukcijos prielaida: $x_n > 20$ kokiam nors n, $n > 4$.

$$
\begin{aligned}
\text{Indukcijos žingsnis: } x_{n+1} &= \frac{3}{4}x_n + 7{,}5 && \text{(apibrėžimas)}\\
&> \frac{3}{4} \cdot 20 + 7{,}5 && \text{(prielaida)}\\
&= 15 + 7{,}5 = 22{,}5. && \text{(aritmetika)}
\end{aligned}
$$

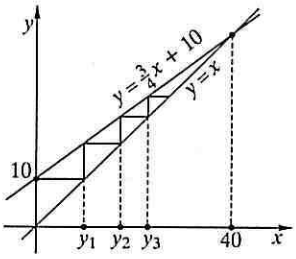
Kaip siūlo V. Stakėnas, galima tai padaryti ir vadovaujantis „sveiku protu“: jei $x > 20$ (prielaida), tai $\frac{3}{4}x + 7{,}5 > \frac{3}{4} \cdot 20 + 7{,}5 = 22{,}5 >$ > 20 (indukcijos žingsnis).

$\alpha + \omega$

c) Parašykime kitą tręšimo dėsnį. Pažymėkime y_n kiekį trąšų tuojau pat po n-ojo tręšimo. Tada:

$$y_1 = 10,\ y_2 = \frac{3}{4}y_1 + 10,\ \ldots,\ y_{n+1} = \frac{3}{4}y_n + 10,\ \ldots. \qquad (7)$$

d) Šiai sekai vėl nubraižykime „voratinklį". Reikia braižyti funkcijų $y = \frac{3}{4}x + 10$ ir $y = x$ grafikus.



„Voratinklis" labai „iškalbingas". Iš jo matyti, kad seka $\{y_n\}$ didėja, tačiau niekada neviršys skaičiaus, kurį reikia rasti iš lygties

$$x = \frac{3}{4}x + 10. \qquad (8)$$

Jos sprendinys $x = 40$. Geometriškai pagrįstą hipotezę nesunku įrodyti, nors tam ir reikia matematinės indukcijos metodo.

Indukcijos bazė: $y_1 = 10 < 40$.

Indukcijos prielaida: $y_n < 40$ kokiam nors n.

$$\begin{aligned} \text{Indukcijos žingsnis: } y_{n+1} &= \frac{3}{4}y_n + 10 && \text{(apibrėžimas)} \\ &< \frac{3}{4}\cdot 40 + 10 && \text{(prielaida)} \\ &= 30 + 10 = 40. && \text{(aritmetika)} \end{aligned}$$

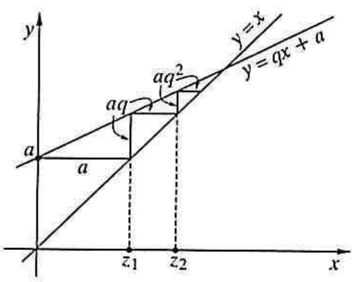
Pastebėkime, kad čia niekur neminėjome geometrinės progresijos vardo.

3. Atidesnė „voratinklio" analizė

Norėdami vienu metu aptarti abiejų sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ savybes, nagrinėsime šiek tiek bendresnę situaciją. Sakykime, turime seką $\{z_n\}$, nusakytą sąryšiu

$$z_{n+1} = qz_n + a, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad z_1 = a. \qquad (9)$$

Laikykime $0 < a$ ir $0 < q < 1$. Nubraižykime „voratinklį". Jame galime pastebėti dvi sekas panašiųjų trikampių:



1) stačiųjų lygiašonių, kurių įžambinės yra tiesėje $y = x$;
2) stačiųjų, kurių įžambinės yra tiesėje $y = qx + a$, o vertikaliųjų ir horizontaliųjų statinių ilgių santykis yra pastovus ir lygus q.

Todėl vertikaliųjų (kaip ir horizontaliųjų) statinių ilgių seka yra geometrinė progresija

$$a, qa, q^2a, \ldots, q^na, \ldots. \qquad (10)$$

Iš „voratinklio" matome, kad seka $\{z_n\}$ yra (10) geometrinės progresijos suma, t. y.

$$z_n = a + qa + q^2a + \cdots + q^{n-1}a. \qquad (11)$$

Šią formulę nesunku gauti ir analiziškai iš (9) apibrėžimo:

$$
\begin{aligned}
z_2 &= qz_1 + a = qa + a,\\
z_3 &= qz_2 + a = q(qa+a) + a = q^2a + qa + a,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_n &= q^{n-1}a + \cdots + qa + a && \text{(prielaida)}\\
z_{n+1} &= qz_n + a =\\
&= q(q^{n-1}a + \cdots + qa + a) + a =\\
&= q^n a + \cdots + qa + a. && \text{(žingsnis)}
\end{aligned}
$$

Norėčiau pabrėžti vieną sekos, apibrėžtos (9) formule, ir geometrinės progresijos sumų skirtumą. Formulėse (9) galime imti ir $z_0 = 0$. Tada

$$
\begin{aligned}
z_1 &= qz_0 + a = q\cdot 0 + a = a,\\
z_2 &= qz_1 + a = qa + a,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Seka $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ būtų pirmųjų narių sumos tokios sekos $0, a, qa, \ldots, q^{n-1}a, \ldots$, kuri nėra geometrinė progresija — trukdo nulis. Nepriklausomai nuo to, ar pradedame nariu $z_0 = 0$, ar $z_1 = a$, galime rasti

$$z_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}. \tag{12}$$

Beje, ši formulė tinka ir kai $n = 0$.

4. Algebrinis Jurgitos biotrąšų uždavinio sprendimas

Grįžkime prie Jurgitos biotrąšų uždavinio ir pasinaudokime ką tik gautomis formulėmis. Į (12) formulę įstatę konkrečias reikšmes $q = \frac{3}{4}$, $a = 7{,}5$, gauname

$$x_n = \frac{7{,}5\cdot\left(1-(\frac{3}{4})^n\right)}{1-\frac{3}{4}} = 30\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{13}$$

Sprendžiame nelygybę:

$$
\begin{aligned}
x_n &> 20,\\
30\cdot(1-(0{,}75)^n) &> 20,\\
30 - 30\cdot(0{,}75)^n &> 20,\\
-30\cdot(0{,}75)^n &> -10,\\
(0{,}75)^n &< \frac{-10}{-30} = 0{,}3333,\\
n\ln 0{,}75 &< \ln 0{,}3333,\\
n &> \frac{\ln 0{,}3333}{\ln 0{,}75} = \frac{-1{,}0987}{-0{,}2877} = 3{,}8192.
\end{aligned}
$$

Matome, kad po ketvirtojo tręšimo trąšų kiekis visada bus didesnis nei 20 g.

Antroji uždavinio dalis sprendžiama paprasčiau:

$$y_n = \frac{10 \cdot \left(1 - (\frac{3}{4})^n\right)}{1 - \frac{3}{4}} = 40 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) < 40, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Šią dalį taip sprendė dauguma mano studentų. Manau, kad taip samprotavo ir moksleiviai per valstybinį egzaminą.

5. Rekurenčioji geometrinės progresijos sumos formulė

Su geometrine progresija yra susijusi dar viena labai svarbi seka — geometrinės progresijos pirmųjų narių suma

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_0 + a_0 q + \cdots + a_0 q^n, \tag{14}$$

jei pradedame nariu a_0, arba

$$\sigma_n = a_1 + \cdots + a_n = a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1}, \tag{15}$$

jei pradedame nariu a_1. Formulės (14) ir (15) gali būti nagrinėjamos trim aspektais:

- Jos yra specialių sekų apibrėžimai. Matematinėje analizėje jos vadinamos dalinių sumų sekomis. Indeksas n rodo, kad paskutinis dėmuo yra a_n.
- Tai yra globalūs apibrėžimai, nes visi sekos nariai nusakomi iškart.
- Jos turi ir lengvai pastebimą rekurentiškumo savybę. Akivaizdu, kad

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_n + a_{n+1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Globalus apibrėžimas nėra toks išsamus kaip (3) formule nusakyta geometrinė progresija arba (12) formule nusakyta seka. Tai pataisoma, nes gana lengvai išvedamos formulės

$$s_n = \frac{a_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{17}$$

ar

$$\sigma_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Straipsnelio pradžioje į geometrinių progresijų klasę buvo neįtrauktos tokios sekos, kurių $q = 1$. Taip susitarta tikriausiai dėl to, kad

(17) ir (18) formulės visada turėtų prasmę. Rekurentiškumas, nusakytas (16) lygybėmis, taip pat nėra toks, kad galėtume braižyti „voratinklius“. Dar reikia padirbėti.

$$
\begin{aligned}
s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n, && \text{(dauginame iš } q\text{)}\\
s_n q &= a_0 q + a_1 q + \cdots + a_n q\\
&= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} && (a_n \text{ apibrėžimai})\\
&= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} - a_0\\
&= s_{n+1} - a_0, && (s_{n+1} \text{ apibrėžimas})\\
s_{n+1} &= q s_n + a_0. && (19)
\end{aligned}
$$

Aišku, kad $s_0 = a_0$. Gavome tikrą rekurenčiąją formulę, analogišką pačios geometrinės progresijos rekurenčiam apibrėžimui. Taigi apsukome ratą: iš rekurenčiosios (9) formulės geometriškai ir algebriškai gavome geometrinę progresiją ir jos sumas, o dabar išvedėme rekurenčiąją (19) formulę geometrinės progresijos sumų sekai.

6. Pradinės sąlygos pakeitimas

Atidžiam skaitytojui nagrinėjant (9) formulę, turėtų kilti klausimas, kodėl reikia sąlygos $z_1 = a$. Man taip pat knietėjo sužinoti, kaip į šios sąlygos pakeitimą sureaguos pirmakursiai. Uždavinį apie Jurgitos gėlę per žiemos egzaminų sesiją (2002 01 08) tiems patiems studentams pateikiau truputį pakeitęs formuluotę:

Jurgita kiekvieną šeštadienį kambarinę gėlę patręšia 10 g biotrąšų. Yra žinoma, kad trąšų kiekis vazone per savaitę sumažėja apie 25%. Tarkime, kad trąšų kiekis vazone prieš pat pirmą tręšimą buvo c g, $0 < c < 40$.

a) Parašykite formulę, nusakančią trąšų kiekį kiekvienos savaitės pabaigoje prieš pat naują tręšimą.
b) Ištirkite (geometriškai ir analiziškai) sekos, gautos dalyje (a) monotoniškumą ir aprėžtumą.
c) Apskaičiuokite sekos iš (a) ir (b) ribą.
d) Biotrąšos veikia efektyviai tik tada, kai jų kiekis vazone iki kito tręšimo momento visą laiką yra didesnis nei 20 g. Įrodykite, kad kada nors (nesvarbu po kelių tręšimų) tokiu būdu tręšiant gėlę trąšos ims veikti efektyviai visą laiką.
e) Parašykite formulę, pagal kurią galima būtų apskaičiuoti trąšų kiekį vazone po kiekvieno patręšimo?
f) Kai biotrąšų kiekis viršija 50 g, gėlė ima džiūti dėl per didelio trąšų kiekio. Įrodykite, kad Jurgita gali ir toliau taip tręšti jos prižiūrimą gėlę (kad nenudžiūtų).

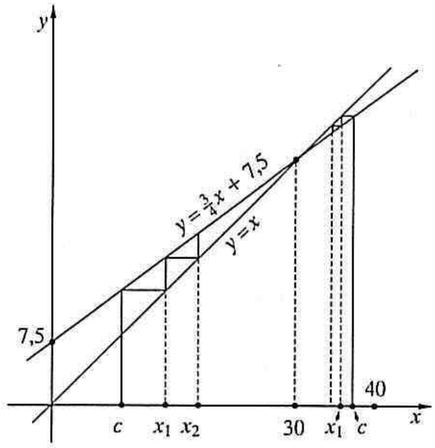
Lengva matyti, kad trąšų kitimo formulės lieka tos pačios kaip ir anksčiau, t. y.

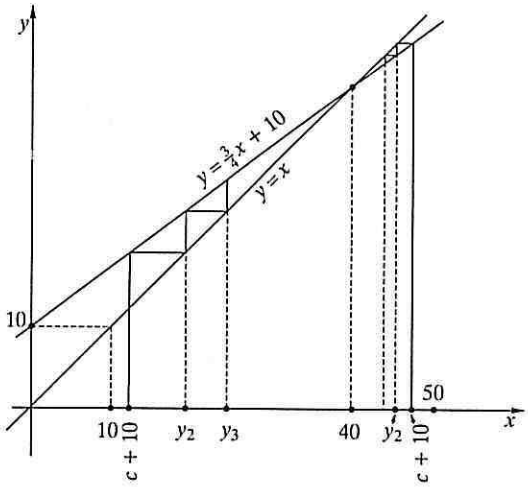
$$x_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot (x_n + 10) = \frac{3}{4} x_n + 7{,}5, \qquad y_{n+1} = \frac{3}{4} y_n + 10.$$

Pasikeičia tik pradinės sąlygos:

$$x_0 = c, \qquad y_1 = c + 10. \tag{20}$$

7. Geometrinis sprendimas Nubraižykime abiem sekoms „voratinklius".





Matome, kad sekos didėjimas ar mažėjimas priklauso nuo c reikšmės. Jei $0 < c < 30$, tai abi sekos didėja, jei $c > 30$ — mažėja. Taip pat iš brėžinio matome, kad seka $\{x_n\}$ artėja į 30, o seka $\{y_n\}$ — į 40. Iš sekos ribos apibrėžimo išplaukia, kad egzistuoja toks skaičius N, jog $x_n > 20$, kai $n > N$. Paskutinė dalis įrodoma indukcijos metodu.

Indukcijos bazė: $y_1 = c + 10 < 40 + 10 = 50$.

Indukcijos prielaida: $y_n < 50$ kokiam nors n.

Indukcijos žingsnis:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{3}{4}y_n + 10 && \text{(apibrėžimas)}\\ &< \frac{3}{4}\cdot 50 + 10 && \text{(prielaida)}\\ &= 37{,}5 + 10 = 47{,}5 < 50. && \text{(aritmetika)} \end{aligned}$$

8. Analizinis sprendimas Gauti analizines sekų išraiškas šį sykį sunkiau:

$$x_1 = \frac{3}{4}\cdot(x_0+10) = \frac{3}{4}\cdot(c+10) = \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}\cdot 10,$$

$$x_2 = \frac{3}{4}\cdot(x_1+10) = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}c + \frac{3}{4}\cdot 10 + 10\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^2 c + \left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot 10 + \frac{3}{4}\cdot 10,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n c + \left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot 10 + \cdots + \frac{3}{4}\cdot 10 =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n c + \frac{\frac{3}{4}\cdot 10\cdot\left(1-(\frac{3}{4})^n\right)}{1-\frac{3}{4}} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n c + 30\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) =$$

$$= 30 + (c - 30)\left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

$$x_n = 30 + (c - 30)\left(\frac{3}{4}\right)^n. \tag{21}$$

Iš čia matyti, kad seka didėja, kai $c < 30$, ir mažėja, kai $c > 30$. Šį įspūdį galima sustiprinti nagrinėjant skirtumus

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (c - 30)\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = \\ &= (c - 30)\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4} - 1\right) = \frac{30 - c}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned} \tag{22}$$

Analogiškai gauname sekos $\{y_n\}$ išraišką:

$$y_1 = c + 10,$$

$$y_2 = \frac{3}{4}y_1 + 10 = \frac{3}{4}c + \frac{3}{4} \cdot 10 + 10,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} y_n &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} c + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot 10 + \cdots + \frac{3}{4} \cdot 10 + 10 = \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} c + \frac{10 \cdot \left(1 - (\frac{3}{4})^n\right)}{1 - \frac{3}{4}} = \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} c + 40 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right), \end{aligned} \tag{23}$$

arba

$$y_n = 40 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(c - 40 \cdot \frac{3}{4}\right) = 40 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}(c - 30). \tag{24}$$

Šių skaičiavimų buvo galima ir neatlikinėti, jei būtume susieję sekas $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$:

$$y_{n+1} = x_n + 10, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

ar

$$x_n = \frac{3}{4}y_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{26}$$

Tačiau ir dabar galima pasinaudoti (25), (26) sąryšiais ir pasitikrinti, ar teisingai surandome sekas $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$. Iš (24) išraiškos arba iš skirtumų

$$y_{n+1} - y_n = (c - 30)\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right) = \frac{30 - c}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \tag{27}$$

matyti sekos $\{y_n\}$ monotoniškumas. Jos aprėžtumą taip pat galima gauti iš (24) formulės. Jei $0 < c < 40$, tai

$$y_n \leqslant 40 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot (40 - 30) = 40 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot 10 < 40 + 10 = 50.$$

9. Moralas

Turime geometrinius ir analizinius sprendimus, galime juos palyginti. Savaime aišku, jie vienas kito nepakeičia, o tik papildo. Analiziniai sprendiniai tam tikra prasme yra galutiniai, bet norint juos gauti reikia gerokai paplušėti. Be to, labai nesunku apsirikti ir padaryti kokią nors aritmetinę klaidelę ar pasimesti tarp trijų labai panašių (12), (17) ir (18) formulių. Su „voratinkliais" klaidą padaryti sunkiau. Jie leidžia daryti įtikinamas hipotezes, kurias vėliau nesunku pagrįsti.

Pabaigoje galima pateikti keletą apibrėžimų. Nagrinėtos straipsnelyje sekos vadinamos:

- dinaminėmis sistemomis — jos aprašo kokio nors proceso (trąšų kitimo) dinamiką;
- diskrečiosiomis — laikas nagrinėjamas diskrečiaisiais laiko momentais;
- vienamatėmis — sistemos būsenos nusakomos realiaisiais skaičiais;
- deterministinėmis — sistemos būsenos nusakomos vienareikšmiškai; nėra jokio atsitiktinumo.

Taigi nagrinėjome — *deterministines diskrečiąsias vienamates dinamines sistemas*. Bendresnė tokia sistema būtų nusakoma taip:

$$x_{n+1} = g(x_n), \tag{28}$$

čia g — funkcija, apibrėžta kokiame nors intervale, ir jos reikšmės iš to paties intervalo. Pradinis sekos narys x_0 taip pat turi priklausyti tam intervalui. Kai g yra paprasčiausia kvadratinė funkcija (pvz., $y = b - x^2$, b — parametras), tai sistema tampa gana sudėtingu ir įdomiu objektu. Sudėtingu todėl, kad negalima gauti sekos išraiškos $x_n = f(n)$, t. y. globalaus apibrėžimo. Lieka tik rekurentusis (28) apibrėžimas. „Voratinkliai" — labai svarbus tokių sistemų tyrimo metodas.

Taškai $x = 30$ ir $y = 40$ yra sekų atitinkamai $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ pusiausvyros taškai. Be to, jie dar vadinami pritraukiančiaisiais taškais (angl. *attractor*), nes sekos (sistemos) konverguoja prie jų nepriklausomai nuo pradinių reikšmių.

Kokius sudėtingus objektus mes nagrinėjome! Gal geriau ir nežinoti jų pavadinimų. Juk žinomas machinatorius Ostapas Benderis taip pat nežinojo, kad garsiajame simultane Vasiukuose daugiau kaip su puse varžovų jis žaidė ispaniškas partijas.