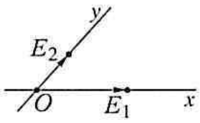
$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 41–47

Afinioji geometrija

Edmundas Mazėtis
edmundas@vpu.lt

Ne visada stačiakampė koordinačių sistema yra patogiausia. Straipsnio autorius — Vilniaus pedagoginio universiteto docentas — pateikia pavyzdžių, kai uždavinį galima greičiau išspręsti pasirinkus kitokią, ne stačiakampę koordinačių sistemą.

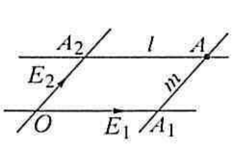
Sprendžiant įvairius geometrijos uždavinius, dažnai taikomas koordinačių metodas. Jo esmė ta, kad plokštumoje arba erdvėje kokiu nors būdu pasirenkama koordinačių sistema, nustatomos uždavinio sąlygoje nurodytų taškų koordinatės, užrašomos duotųjų figūrų toje koordinačių sistemoje lygtys ir — geometrinio uždavinio sprendimo sunkumai perkeliami ant algebros pečių. Vidurinėje mokykloje paprastai nagrinėjamos stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos. Tačiau tai nėra vienintelė galimybė plokštumoje ar erdvėje nustatyti taškų koordinates. Šiame straipsnyje susipažinsime su plokštumos afiniosiomis koordinačių sistemomis ir jų taikymais.



1 pav.

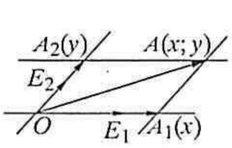
Plokštumos afiniąją koordinačių sistemą sudaro trys nustatyta tvarka išdėstyti plokštumos taškai O, E_1, E_2, nesantys vienoje tiesėje. Taškas O yra vadinamas koordinačių sistemos (O, E_1, E_2) *pradžios tašku*, taškai E_1 ir E_2 — šios koordinačių sistemos *vienetiniais taškais* (1 pav.).

Vektoriai $\overrightarrow{OE_1}$ ir $\overrightarrow{OE_2}$ yra vadinami vienetiniais vektoriais (nors šių vektorių ilgiai nebūtinai lygūs vienetui). Tiesės OE_1 ir OE_2 yra vadinamos atitinkamai pirmąja ir antrąja koordinačių ašimis, dažnai tiesiog Ox ir Oy ašimis.



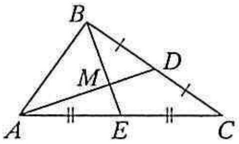
2 pav.

Kaip tokioje koordinačių sistemoje nustatomos kokio nors plokštumos taško A koordinatės? Nubrėžkime per tašką A tieses l ir m, lygiagrečias su tiesėmis OE_1 ir OE_2. Sakykime, kad tiesės m ir OE_1 kertasi taške A_1, o tiesės l ir OE_2 — taške A_2 (2 pav.). Vektoriai $\overrightarrow{OA_1}$ ir $\overrightarrow{OE_1}$ yra kolinearūs, taigi rasis skaičius x, tenkinantis sąlygą $\overrightarrow{OA_1} = x\,\overrightarrow{OE_1}$. Vektoriai $\overrightarrow{OA_2}$ ir $\overrightarrow{OE_2}$ irgi kolinearūs, taigi rasime skaičių y, kuriam bus teisinga lygybė $\overrightarrow{OA_2} = y\,\overrightarrow{OE_2}$. Pagal vektorių sudėties lygiagretainio taisyklę $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$. Vadinasi, $\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{OE_1} + y\,\overrightarrow{OE_2}$. Skaičiai x ir y yra vadinami *taško A afiniosiomis koordinatėmis* koordinačių sistemoje (O, E_1, E_2); kaip įprasta, rašoma $A(x; y)$ (3 pav.). Mokykliniame vadovėlyje parodyta, kad bet kuris plokštumos vektorius yra vieninteliu būdu išreiškiamas dviem nekolineariais vektoriais, taigi koordinačių sistemoje



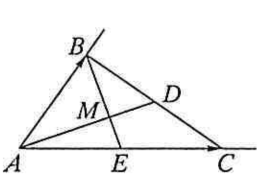
3 pav.

(O, E_1, E_2) taško A koordinatės nustatomos vienareikšmiškai. Iš taško afiniųjų koordinačių apibrėžimo išplaukia, kad taško O koordinatės yra $(0; 0)$, taškų E_1 ir E_2 — atitinkamai $(1; 0)$ ir $(0; 1)$. Be to, jei taškas M yra tiesėje OE_1, tai antroji jo koordinatė lygi nuliui, o jei tiesėje OE_2 — tai pirmoji jo koordinatė lygi nuliui. Pastebėkime, kad atskiru atveju, kai tiesės OE_1 ir OE_2 statmenos, o atkarpų OE_1 ir OE_2 ilgiai lygūs vienetui, gauname įprastą stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą.



4 pav.

1 pavyzdys. *Trikampio ABC pusiaukraštinės AD ir BE kertasi taške M (4 pav.). Nustatykime taškų M ir E koordinates koordinačių sistemose (A, B, C) ir (A, B, D).*



5 pav.

Sprendimas. Koordinačių sistemos (A, B, C) pradžios taškas yra A, vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra jos vienetiniai vektoriai (5 pav.). Norėdami rasti taškų M ir E koordinates, išreikškime vektorius $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AE}$ vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$. Kadangi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, o $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, tai koordinačių sistemoje (A, B, C) ieškomos taškų koordinatės yra $M(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $E(0; \frac{1}{2})$.

Dabar raskime tų pačių taškų koordinates sistemoje (A, B, D). Išreikškime vektorius $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AE}$ vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$. Gauname $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Taigi koordinačių sistemoje (A, B, D) taškų M ir E koordinatės yra $M(0; \frac{2}{3})$, $E(-\frac{1}{2}; 1)$.

1 užduotis. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O, taškas E yra kraštinės AB vidurio taškas. Raskite:

a) taškų O ir E koordinates koordinačių sistemoje (A, B, D);

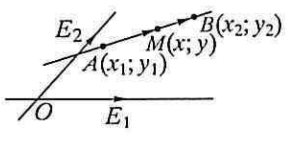
b) taškų A ir D koordinates koordinačių sistemoje (O, E, C).

Sakykime, kad afiniojoje koordinačių sistemoje (O, E_1, E_2) taškų A ir B koordinatės atitinkamai yra $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Kadangi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(x_2\,\overrightarrow{OE_1} + y_2\,\overrightarrow{OE_2}\right) - \left(x_1\,\overrightarrow{OE_1} + y_1\,\overrightarrow{OE_2}\right) = \\ = (x_2 - x_1)\,\overrightarrow{OE_1} + (y_2 - y_1)\,\overrightarrow{OE_2},$$

tai skaičiai $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ yra vadinami vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ afiniosiomis koordinatėmis; žymima $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

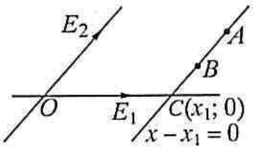
Taigi ir afiniosiose, kaip ir stačiakampėse, koordinačių sistemose vektoriaus koordinatės nustatomos pagal tą pačią taisyklę, t. y. iš vektoriaus galo taško koordinačių atimamos jo pradžios taško koordinatės.



6 pav.

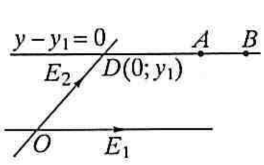
Užrašykime tiesės, einančios per taškus $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$, lygtį afiniojoje koordinačių sistemoje (O, E_1, E_2). Sakykime, taškas $M(x; y)$ yra bet kuris tiesės AB taškas. Tuomet vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AM}$ yra kolinearūs (6 pav.), t. y. $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$. Kadangi vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinatės yra $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, o vektoriaus $\overrightarrow{AM}$ — $\{x - x_1; y - y_1\}$, tai $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$, $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$. Kita vertus, jei teisingos šios lygybės, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AM}$ yra kolinearūs, taigi taškas M yra tiesėje AB. Iš čia išplaukia, kad gautąsias lygtis

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$



7 pav.

tenkina tik tiesės AB taškų koordinatės. Šios lygtys yra vadinamos *parametrinėmis tiesės AB lygtimis*. Jei $x_2 = x_1$, tai gauname lygtį $x - x_1 = 0$. Tai tiesės, lygiagrečios su tiese OE_2, lygtis (7 pav.). Analogiškai, jei $y_2 = y_1$, tai gauname tiesės, lygiagrečios su tiese OE_1, lygtį $y - y_1 = 0$ (8 pav.).



8 pav.

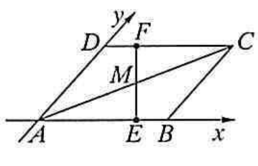
Jei $x_1 \neq x_2$ ir $y_1 \neq y_2$, tai iš tiesės lygčių išplaukia $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Pažymėję $A = y_2 - y_1$, $B = x_1 - x_2$, $C = -x_1(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1)$, gauname $Ax + By + C = 0$. Taigi afiniojoje, kaip ir stačiakampėje, koordinačių sistemoje tiesė užrašoma pirmojo laipsnio lygtimi su dviem kintamaisiais.

Sakykime, kad plokštumoje yra dvi tiesės a: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ir b: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Tuomet jų sankirtos taško $M(x_0; y_0)$ koordinatės turi tenkinti lygybes

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Kaip žinome iš tiesinių lygčių sistemų teorijos, jei $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, tai ši sistema turi vienintelį sprendinį, t. y. tiesės a ir b kertasi taške M. Jei $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq$ $\neq \frac{C_1}{C_2}$, tai sistema sprendinių neturi, taigi tiesės a ir b yra lygiagrečios. Jei $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, tai abi sistemos lygtys sutampa, sistema turi be galo daug sprendinių; taigi sutampa ir tiesės a, b.

2 pavyzdys. *Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse AB ir CD pažymėti taškai E ir F taip, kad: $AE : EB = 4$, $CF : FD = 3 : 2$. Nustatykime, kokiu santykiu tiesė EF dalija įstrižainę AC.*



9 pav.

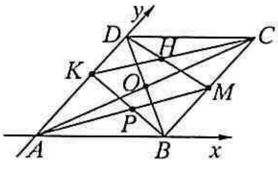
Sprendimas. Panagrinėkime afiniąją koordinačių sistemą (A, B, D). Joje lygiagretainio viršūnių koordinatės yra $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $D(0; 1)$, $C(1; 1)$, nes $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (9 pav.).

Pagal uždavinio sąlygą $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$, todėl taškų E ir F koordinatės yra $E(\frac{4}{5}; 0)$, $F(\frac{2}{5}; 1)$. Tiesės AC lygtis yra $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0}$, arba $x - y = 0$; tiesės EF lygtis yra $\frac{x-\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}-\frac{4}{5}} = \frac{y-0}{1-0}$, arba $5x + 2y - 4 = 0$. Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ 5x + 2y - 4 = 0, \end{cases}$$

randame tiesių AC ir EF sankirtos taško M koordinates $M(\frac{4}{7}; \frac{4}{7})$. Tuomet $\overrightarrow{AM} = \{\frac{4}{7}; \frac{4}{7}\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1; 1\}$ ir $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{7}\,\overrightarrow{AC}$, iš čia $AM : MC = 4 : 3$.

3 pavyzdys. *Taškai M, K yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse BC, AD. Tiesės AM ir BK kertasi taške P, o tiesės MD ir KC — taške H. Įrodykime, kad lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas O yra tiesėje PH.*



10 pav.

Sprendimas. Nagrinėkime plokštumos afiniąją koordinačių sistemą (A, B, D) (10 pav.). Tuomet $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$, $C(1;1)$. Tiesės AD lygtis yra $x=0$, todėl taško K koordinatės $K(0;k)$; tiesės BC lygtis yra $x=1$, tad taško M koordinatės $M(1;m)$. Kadangi $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$, tai $O(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. Tiesės AM lygtis yra $\frac{x}{1}=\frac{y}{m}$, $mx-y=0$. Tiesės KB lygtis yra $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{k}$, $kx+y-k=0$. Taško P koordinates randame iš sistemos

$$\begin{cases} mx-y=0, \\ kx+y-k=0, \end{cases} \quad \text{t. y. } P\Big(\frac{k}{k+m}; \frac{mk}{k+m}\Big).$$

Tiesės KC lygtis yra $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{k-1}$, $(k-1)x+y-k=0$, o tiesės DM lygtis yra $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{m-1}$, $(m-1)x-y+1=0$. Taško H koordinates randame iš sistemos

$$\begin{cases} (k-1)x+y-k=0, \\ (m-1)x-y+1=0, \end{cases} \quad \text{t. y. } H\Big(\frac{k-1}{k+m-2}; \frac{km-1}{k+m-2}\Big).$$

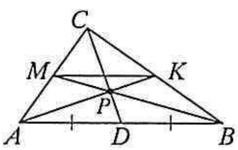
Užrašome tiesės OP lygtį

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{k}{k+m}-\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{km}{k+m}-\frac{1}{2}}, \quad (2mk-k-m)x+(m-k)y+k-mk=0.$$

Belieka į šią lygtį įstatyti taško H koordinates ir įsitikinti, kad jos tiesės OP lygtį tenkina, t. y. taškas H yra tiesėje OP.

Sprendžiant šį uždavinį stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje, skaičiavimai gerokai sudėtingesni. Sakykime, kad stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos pradžios taškas yra A, o taškas D yra Oy ašyje, t. y. $A(0;0)$, $D(0;d)$. Tuomet $B(a;b)$, o $C(a;b+d)$, nes $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Taškas K yra Oy ašyje, todėl $K(0;k)$; taškas M yra tiesėje $x=a$, todėl $M(a;m)$. Dabar reikia parašyti tiesių AM, KB, DM, KC, AC, BD lygtis, rasti taškų $P=AM\cap KB$, $H=DM\cap KC$, $O=AC\cap$ $\cap BD$ koordinates ir patikrinti, ar taškas H yra tiesėje OP. Atlikite tai savarankiškai ir palyginkite skaičiavimų sudėtingumą.

4 pavyzdys. *Trikampio ABC pusiaukraštinėje CD pažymėtas taškas P. Tiesės AP ir BC kertasi taške K, tiesės BP ir AC — taške M. Įrodykime, kad tiesės MK ir AB yra lygiagrečios* (11 *pav.*).



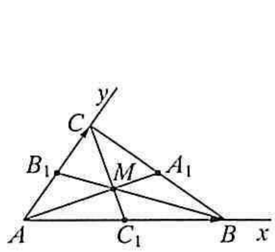
11 pav.

Sprendimas. Parenkame koordinačių sistemą (D, B, C). Tuomet $D(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $A(-1;0)$. Tiesės CD lygtis yra $x=0$. Taškas P yra tiesėje CD, todėl $P(0;p)$. Užrašome tiesių AP, BP, AC ir CB lygtis: $px-y+p=0$, $px+y-p=0$, $x-y+1=0$ ir $x+y-1=0$. Iš sistemų

$$\begin{cases} px+y-p=0, \\ x-y+1=0 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} px-y+p=0, \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

randame taškų M ir K koordinates $M(\frac{p-1}{1+p}; \frac{2p}{1+p})$, $K(\frac{1-p}{1+p}; \frac{2p}{1+p})$. Kadangi vektorius $\overrightarrow{MK}\{\frac{2(1-p)}{1+p}; 0\}$ kolinearus su koordinatine ašimi DB, tai tiesės MK ir AB yra lygiagrečios.

5 pavyzdys. *Trikampio ABC kraštinėse AB, AC, BC pažymėti taškai C_1, B_1 ir A_1, tenkinantys sąlygas $AC_1 : C_1B = k$, $BA_1 : A_1C = l$, $CB_1 : B_1A = m$. Įrodykime, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške tada ir tik tada, kai $klm = 1$ (Čevos teorema).*

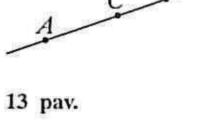


12 pav.

Įrodymas. Pasirinkime afiniąją plokštumos koordinačių sistemą (A, B, C) (12 pav.). Tuomet $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, $A_1(\frac{1}{1+l}; \frac{l}{1+l})$, $B_1(0; \frac{1}{m+1})$, $C_1(\frac{k}{1+k}; 0)$, nes $\overrightarrow{AA_1} = \frac{\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC}}{1+l}$, $\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{m+1}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC_1} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$.

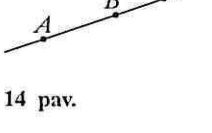
Užrašome tiesių AA_1, BB_1, CC_1 lygtis. Gauname AA_1: $lx - y = 0$, BB_1: $x + (m+1)y - 1 = 0$, CC_1: $(1+k)x + ky - k = 0$. Randame tiesių AA_1 ir BB_1 sankirtos taško M koordinates $M(\frac{1}{lm+l+1}; \frac{l}{lm+l+1})$. Tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 eina per vieną tašką M tada ir tik tada, kai taškas M yra tiesėje CC_1, t. y. kai teisinga lygybė $\frac{1+k}{lm+l+1} + \frac{kl}{lm+l+1} - k = 0$. Iš jos gauname $klm = 1$.

Spręstuose pavyzdžiuose nagrinėjama tiesės, atkarpos, taškų ir tiesių priklausomybė, tiesių lygiagretumas, lygiagrečių atkarpų ilgių santykis. Šios sąvokos yra plokštumos afiniosios geometrijos elementai. Plokštumos *afiniąją geometriją* sudaro geometrinės figūros, jų ryšiai ir savybės, taip pat geometriniai dydžiai, kurie visose afininiosiose koordinačių sistemose yra vienodi. Pastebėkime, kad atstumas tarp dviejų taškų nėra afiniosios geometrijos sąvoka, nes žinoma atstumo tarp taškų $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ formulė $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ yra teisinga tik stačiakampėse Dekarto koordinačių sistemose. Pagal šią formulę apskaičiavę atstumus tarp tų pačių taškų skirtingose afiniosiose koordinačių sistemose, gauname skirtingus rezultatus. Pavyzdžiui, atstumas tarp 1 pavyzdžio taškų M ir E koordinačių sistemoje (A, B, C), jeigu jį skaičiuosime pagal minėtą formulę, yra $\frac{\sqrt{5}}{6}$, o koordinačių sistemoje (A, B, D) — $\frac{\sqrt{13}}{6}$. Kampų didumai, figūrų plotai ir kitos sąvokos, kurioms apibrėžti naudojama atstumo sąvoka, taip pat nėra afiniosios geometrijos objektai, todėl afiniųjų koordinačių sistemų nereikia naudoti sprendžiant uždavinius, kuriuose kalbama apie atstumus, kampų didumus, figūrų plotus, taip pat apie figūras — stačiakampius, kvadratus, apskritimus ir pan.



13 pav.

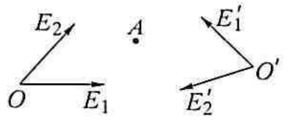
Sakykime, A, B, C yra trys skirtingi vienos tiesės taškai. Tuomet vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra kolinearūs. Raskime skaičių λ, tenkinantį sąlygą $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Šis skaičius λ yra vadinamas *trijų tiesės taškų A, B, C paprastuoju santykiu* ir žymimas $\lambda = (AB, C)$. Jei taškas C yra atkarpoje AB, tai λ yra teigiamas skaičius, nes vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CB}$ vienakrypčiai (13 pav.); tuomet skaičius λ yra lygus atkarpų AC ir CB ilgių santykiui. Jei taškas C nėra atkarpoje AB (14 pav.), tai vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra priešingų krypčių ir skaičius λ yra neigiamas, jo modulis lygus atkarpų AC ir CB ilgių santykiui.



14 pav.

2 užduotis. Sakykime, $\lambda = (AB, C)$. Įrodykite, kad $(BA, C) = \frac{1}{\lambda}$, $(CA, B) = -\frac{1}{1+\lambda}$, $(CB, A) = -\frac{\lambda}{1+\lambda}$, $(AC, B) = -1 - \lambda$, $(BC, A) = -\frac{1+\lambda}{\lambda}$.

Įrodykime, kad trijų tiesės taškų paprastasis santykis visose afiniosiose koordinačių sistemose yra vienodas. Tuo tikslu raskime formules, nustatančias taško A koordinačių $(x;\, y)$ vienoje koordinačių sistemoje ir jo koordinačių $(x';\, y')$ kitoje koordinačių sistemoje ryšį.



15 pav.

Sakykime, (O, E_1, E_2) ir (O', E_1', E_2') yra dvi plokštumos afiniosios koordinačių sistemos (15 pav.). Jei $(x;\, y)$ ir $(x';\, y')$ — taško A koordinatės šiose koordinačių sistemose, tai $\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{OE_1} + y\,\overrightarrow{OE_2}$ ir $\overrightarrow{O'A} = x'\,\overrightarrow{O'E_1'} + y'\,\overrightarrow{O'E_2'}$. Sakykime, taško O' koordinatės koordinačių sistemoje (O, E_1, E_2) yra $(x_0;\, y_0)$, t. y. $\overrightarrow{OO'} = x_0\,\overrightarrow{OE_1} + y_0\,\overrightarrow{OE_2}$.

Vektorius $\overrightarrow{O'E_1'}$ ir $\overrightarrow{O'E_2'}$ išreiškę nekolineariais vektoriais $\overrightarrow{OE_1}$ ir $\overrightarrow{OE_2}$, gauname: $\overrightarrow{O'E_1'} = a\,\overrightarrow{OE_1} + b\,\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{O'E_2'} = c\,\overrightarrow{OE_1} + d\,\overrightarrow{OE_2}$. Be to, teisinga nelygybė $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ (priešingu atveju vektoriai $O'E_1'$ ir $O'E_2'$ būtų kolinearūs, patikrinkite tai patys). Kadangi $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$, tai

$$\overrightarrow{OA} = x_0\,\overrightarrow{OE_1} + y_0\,\overrightarrow{OE_2} + x'\,\overrightarrow{O'E_1'} + y'\,\overrightarrow{O'E_2'} = x_0\,\overrightarrow{OE_1} + \\ + y_0\,\overrightarrow{OE_2} + x'(a\,\overrightarrow{OE_1} + b\,\overrightarrow{OE_2}) + y'(c\,\overrightarrow{OE_1} + d\,\overrightarrow{OE_2}).$$

Vektorius $\overrightarrow{OA}$ vienareikšmiškai išreiškiamas vektoriais $\overrightarrow{OE_1}$ ir $\overrightarrow{OE_2}$. Taigi

$$\begin{cases} x = ax' + cy' + x_0, \\ y = bx' + dy' + y_0. \end{cases}$$

Gavome formules, nusakančias taško A koordinačių skirtingose afiniosiose koordinačių sistemose ryšį. Pagal trijų taškų paprastojo santykio apibrėžimą $\lambda = (AB, C) = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}$. Kitoje koordinačių sistemoje $\lambda' = (AB, C) = \frac{x_C' - x_A'}{x_B' - x_C'} = \frac{y_C' - y_A'}{y_B' - y_C'}$. Bet $x_C - x_A = a(x_C' - x_A') + c(y_C' - y_A')$, $x_B - x_C = a(x_B' - x_C') + c(y_B' - y_C')$ ir

$$\lambda = \frac{a(x_C' - x_A') + c(y_C' - y_A')}{a(x_B' - x_C') + c(y_B' - y_C')} = \frac{(x_C' - x_A')\left(a + c\frac{y_C' - y_A'}{x_C' - x_A'}\right)}{(x_B' - x_C')\left(a + c\frac{y_B' - y_C'}{x_B' - x_C'}\right)}.$$

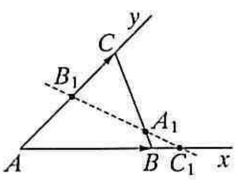
Tačiau iš lygybės $\frac{x_C' - x_A'}{x_B' - x_C'} = \frac{y_C' - y_A'}{y_B' - y_C'}$ gauname $\frac{y_C' - y_A'}{x_C' - x_A'} = \frac{y_B' - y_C'}{x_B' - x_C'}$. Iš čia išplaukia, kad $\lambda = \frac{x_C' - x_A'}{x_B' - x_C'} = \lambda'$, t. y. trijų taškų paprastasis santykis, pakeitus koordinačių sistemą, nesikeičia.

3 užduotis. Norėdami įrodyti, kad trijų tiesės taškų paprastasis santykis visose afiniosiose koordinačių sistemose yra vienodas, tarėme, jog $x_C' \neq x_A'$ ir $x_C' \neq x_B'$. Jei $x_C' = x_A'$, tai ir $x_C' = x_B'$, tuomet $y_C' \neq y_A'$ ir $y_C' \neq y_B'$. Kaip pasikeis įrodymas šiuo atveju?

Jei $\lambda = (AB, C)$ yra trijų tiesės taškų A, B ir C paprastasis santykis, tai bet kokiam plokštumos taškui O teisinga lygybė $\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$. Iš tikrųjų $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$, t. y.

$(1+\lambda)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB}$, iš čia gaunama įrodomoji lygybė. Be to, trijų taškų paprastasis santykis negali būti lygus -1. Jei $\lambda = -1$, tai $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$, t. y. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{O}$, arba $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$. Vadinasi, taškai A ir B sutampa.

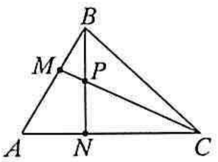
6 pavyzdys. *Trikampio ABC kraštinėse BC ir CA, ir kraštinės AB tęsinyje pažymėti taškai atitinkamai A_1, B_1 ir C_1. Be to, $(AB, C_1) = \alpha$, $(BC, A_1) = \beta$, $(CA, B_1) = \gamma$. Taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai $\alpha\beta\gamma = -1$ (Menelajo teorema). Įrodykime tai.*



16 pav.

Įrodymas. Nagrinėkime afiniąją plokštumos koordinačių sistemą (A, B, C) (16 pav.). Tuomet $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$. Kadangi $\overrightarrow{CB_1} = \frac{\gamma}{1+\gamma}\overrightarrow{CA}$, tai $\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{1+\gamma}\overrightarrow{AC}$ ir $B_1(0; \frac{1}{1+\gamma})$. Kadangi $\overrightarrow{AC_1} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{AB}$, tai $C_1(\frac{\alpha}{1+\alpha}; 0)$. Kadangi $\overrightarrow{AA_1} = \frac{\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}}{1+\beta}$, tai $A_1(\frac{1}{1+\beta}; \frac{\beta}{1+\beta})$. Užrašome tiesės B_1C_1 lygtį $\frac{x - \frac{\alpha}{1+\alpha}}{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{y}{\frac{1}{1+\gamma}}$, arba $(1+\alpha)x + \alpha(1+\gamma)y - \alpha = 0$. Taškas A_1 yra tiesėje B_1C_1 tada ir tik tada, kai jo koordinatės tenkina tiesės lygtį, t. y. kai teisinga lygybė $\frac{1+\alpha}{1+\beta} + \frac{\alpha(1+\gamma)\beta}{1+\beta} - \alpha = 0$. Pertvarkę gauname $1 + \alpha\beta\gamma = 0$, tai ir reikėjo įrodyti.

7 pavyzdys. *Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC yra taškai M ir N, be to $(AB, M) = \frac{3}{2}$, $(AC, N) = \frac{1}{4}$. Tiesės BN ir CM kertasi taške P (17 pav.). Raskime santykius (BN, P) ir (CM, P).*



17 pav.

Sprendimas. Uždavinį spręskime taikydami Menelajo teoremą. Trikampio AMC kraštinėse AC, CM ir MA arba jų tęsiniuose yra taškai N, P, B, be to, $\alpha = (AC, N) = \frac{1}{4}$, $\beta = (CM, P)$ — ieškomasis skaičius. Raskime skaičių $\gamma = (MA, B)$. Kadangi $(AB, M) = \frac{3}{2}$, tai remiantis 2 užduoties formulėmis $\gamma = (MA, B) = -\frac{1}{1+\frac{3}{2}} = -\frac{2}{5}$. Taškai N, P ir B yra vienoje tiesėje, todėl pagal Menelajo teoremą $\alpha\beta\gamma = -1$, t. y. $\frac{1}{4} \cdot \beta \cdot (-\frac{2}{5}) = -1$; iš čia $\beta = 10$.

Trikampiui ABN ir jo kraštinėse esantiems taškams M, P ir C pritaikę Menelajo teoremą, gauname $(BN, P) = \frac{5}{6}$. Patikrinkite tai.

O dabar pabandykite savarankiškai išspręsti keletą plokštumos afiniosios geometrijos uždavinių.

4 užduotis. Trapecijos $ABCD$ šoninių kraštinių AD ir CB vidurio taškai yra M ir K. Ar tiesės AK ir CM lygiagrečios?

5 užduotis. Duoti du lygiagretainiai $ABCD$ ir $AMNP$. Taškas M yra atkarpoje AB, o taškas P — atkarpoje AD. Įrodykite, kad tiesės MD, BP ir NC susikerta viename taške.

6 užduotis. Trikampio ABC kraštinėse AB, BC ir CA pažymėti taškai C_1, A_1, B_1. Be to, $AC_1 : C_1B = k$, $AB_1 : B_1C = l$. Tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 eina per vieną tašką M_0 ir $AM_0 : M_0A_1 = m$. Įrodykite, kad $m = k + l$ (van Obelio teorema).

7 užduotis. Į trikampį ABC įbrėžtas lygiagretainis $ADEF$, kurio viršūnės D, E ir F yra atitinkamai trikampio kraštinėse AB, BC ir AC. Per kraštinės BC vidurio tašką M nubrėžta tiesė AM, kertanti tiesę DE taške K. Įrodykite, kad keturkampis $CFDK$ yra lygiagretainis.

8 užduotis. Trikampio ABC kraštinėje AB yra taškas M, $(AB, M) = 2$. Tiesė CM kerta trikampio ABC pusiaukraštinę BD taške P. Raskite paprastuosius santykius (BD, P) ir (CM, P).