$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 35–40

Trupmenos $\frac{3}{2}$ laipsnių seka


François Dress, Michel Mendès France

francois.dress@math.u-bordeaux.fr,

michel.mendes-france@math.u-bordeaux.fr

François Dress — Bordo universiteto profesorius. Jo mokslinių tyrinėjimų sritis — tolygusis pasiskirstymas, Varingo problema, pirminių skaičių savybės.

Bordo universiteto profesorius Michel Mendès France tyrinėja tolygiojo pasiskirstymo dėsnius, automatų teorijos ir statistinės mechanikos uždavinius.

Šis straipsnis buvo išspausdintas matematikai skirtame prancūzų mokslo populiarinimo žurnalo „La Recherche" numeryje (2001, *Nr.* 346). *Straipsnį spausdiname autoriams sutikus. Į lietuvių kalbą išvertė Vilius Stakėnas.*

Skaičiuodami trupmenos $\frac{3}{2}$ laipsnius, nagrinėdami jų dešimtainės išraiškos skaitmenis po kablelio, susidurtume su problema, kurios išspręsti matematikai kol kas negali. Paradoksali situacija: įrodyta, kad beveik visi skaičiai turi tam tikrą savybę, tačiau nė vienas toks skaičius nežinomas!

Kai kurie skaičiai yra *ypatingesni* nei kiti. Kokie tie skaičiai? Tarkime, kad „ypatingas" reiškia tiesiog „paprastas". Patys paprasčiausi skaičiai yra sveikieji, taigi jie yra ir patys ypatingiausi. O toliau? Po jų — racionalieji skaičiai, kurie reiškiami dviejų sveikųjų santykiu, pavyzdžiui, $\frac{5}{3}$ arba $\frac{355}{113}$. O kurie racionalieji skaičiai yra ypatingiausi? Mūsų požiūriu — tie, kurie yra patys paprasčiausi, pavyzdžiui, $\frac{1}{2}$ arba $\frac{3}{2}$, ir t. t.

Patikslinkime: paprastumas, apie kurį čia kalbame, yra susijęs su skaičiaus sudarymo, arba gavimo, būdu. Šiuo požiūriu skaičius 19 yra paprastesnis už racionalųjį skaičių $\frac{3}{2}$, pastarasis yra paprastesnis už algebrinį skaičių $\sqrt{163}$ arba $\theta = 1{,}3247\ldots$.

Algebriniai yra tokie skaičiai, kurie yra lygties, gautos prilyginus nuliui daugianarį su sveikaisiais koeficientais, sprendiniai. Pavyzdžiui, skaičius $x = \sqrt{163}$ yra lygties $x^2 - 163 = 0$ sprendinys, o skaičius

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{\frac{23}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{\frac{23}{27}}}{2}}$$

tenkina lygtį $\theta^3 - \theta - 1 = 0$.

Originalus skaičius? Ar požiūris į skaičius nepasikeistų, panagrinėjus jų laipsnių seką? Pavyzdžiui, panagrinėję θ laipsnius, galime pastebėti, kad jų reikšmės su dideliais rodikliais mažai skiriasi nuo sveikųjų skaičių:

$$\theta^{100} = 1630580875001{,}999999537\ldots.$$

Suapvalinę matome, kad θ^{100} reikšmė labai mažai skiriasi nuo sveikojo skaičiaus 1630580875002. Šis faktas rodo, kad skaičius θ yra labai ypatingas, tačiau kitaip negu tie skaičiai, kuriuos vadiname ypatingais anksčiau. Panagrinėjus didelius trupmenos $\frac{3}{2}$ laipsnius, priešingai, jokių ypatingumo požymių nematyti:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{100} = 406561177535215237{,}397279707\ldots.$$

Visiška nuobodybė! Šiuo požiūriu skaičių $\frac{3}{2}$ galima vadinti *atsitiktiniu*.

Dabar panagrinėkime skaičių sekas. Patyrinėkime iracionaliojo, pavyzdžiui, skaičiaus $\sqrt{2}$, kartotinių seką:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots, \quad 2\sqrt{2} = 2{,}828\ldots, \quad 3\sqrt{2} = 4{,}242\ldots$$

arba trupmenos $\frac{3}{2}$ laipsnių seką

$$\frac{3}{2} = 1{,}5, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3{,}375, \quad \ldots, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = 57{,}665\ldots.$$

arba aukso pjūvio skaičiaus $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, kuriuo 2000 metų naudojosi architektai ir menininkai, laipsnius

$$\varphi^2 = 2{,}61803\ldots, \quad \varphi^3 = 4{,}23606\ldots, \quad \ldots, \quad \varphi^{10} = 122{,}99186\ldots.$$

Kaip ir anksčiau, nagrinėkime tik skaitmenis po kablelio. Kai imamos tik skaičių sekos trupmeninės dalys, sakoma, kad seka nagrinėjama moduliu 1. Iš pirmosios sekos gauname tokią trupmeninių dalių seką:

$$u_1 = 0{,}414\ldots, \quad u_2 = 0{,}828\ldots, \quad u_3 = 0{,}242\ldots, \quad u_{10} = 0{,}142\ldots, \quad \ldots, \quad u_{100} = 0{,}421\ldots.$$

Antroji seka moduliu 1 yra

$$u_1 = 0{,}5, \quad u_2 = 0{,}25, \quad u_3 = 0{,}375, \quad \ldots, \quad u_{10} = 0{,}665\ldots, \quad \ldots, \quad u_{100} = 0{,}397\ldots.$$

o trečioji atrodo taip:

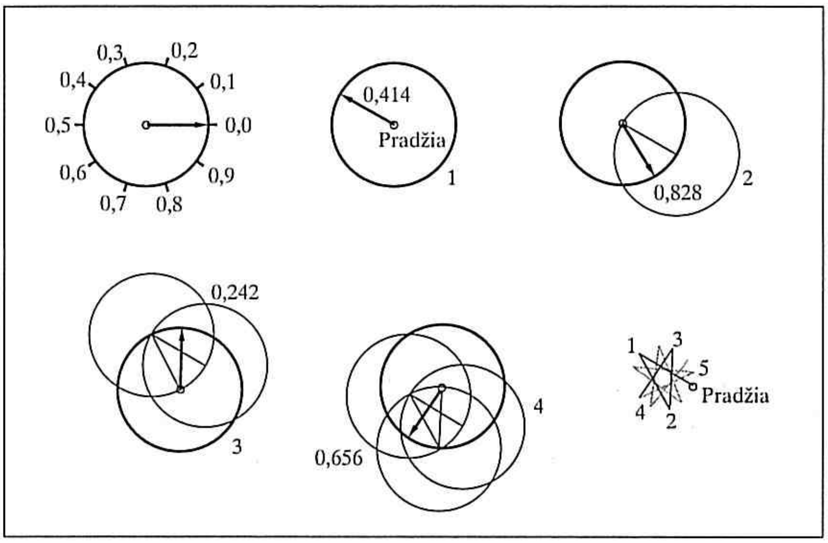
$$u_1 = 0{,}61803\ldots, \quad u_2 = 0{,}61803\ldots, \quad u_3 = 0{,}23606\ldots, \quad \ldots,$$
$$u_{10} = 0{,}99186\ldots, \quad \ldots, \quad u_{100} = 0{,}99999\ldots.$$

Jeigu galėtumėte apskaičiuoti šių sekų 10, 100 ar net 1000 narių moduliu 1, pastebėtumėte keistų dalykų. Tačiau dėl skaičiuoklių, taip pat ir asmeninių kompiuterių ribotų galimybių, įstengsite apskaičiuoti geriausiu atveju 50 pirmųjų skaičiaus $\frac{3}{2}$ arba φ laipsnių.

Todėl mes šiek tiek padirbėjome už jus. Pradėkime nuo paprasčiausio: apskaičiuokime 100 pirmųjų skaičiaus $\sqrt{2}$ kartotinių moduliu 1. Pamatysime, kad 51 iš šių skaičių yra tarp 0 ir 0,5, o likusieji 49 — tarp 0,5 ir 1. Skaičiuodami, kiek iš šių skaičių patenka į intervalus $(0; 0{,}1)$, $(0{,}1; 0{,}2)$, $\ldots$, $(0{,}9; 1)$, gautume: 10, 10, 10, 10, 11, 10, 10, 10, 10, 9. Matome, kad tarp 0 ir 1 visur yra skaičių ir beveik po lygiai kiekviename iš išvardytų intervalų. Panašų rezultatą gautume panagrinėję mažesnius intervalus. Sakoma, kad skaičiaus $\sqrt{2}$ kartotiniai yra tolygiai pasiskirstę moduliu 1.

Panašiai patyrinėję moduliu 1 šimtą pirmųjų skaičiaus φ laipsnių, gautume tokius skaičių atitinkamuose intervaluose kiekius: $48, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 48$. Galima būtų lažintis (matematikas sakytų — galima iškelti hipotezę), kad skaičiaus φ laipsniai nėra tolygiai pasiskirstę moduliu 1! O kokią hipotezę galima suformuluoti apie skaičiaus $\frac{3}{2}$ laipsnius? Apskaičiavę, kiek skaičių patenka į intervalus $(0; 0{,}1)$, $(0{,}1; 0{,}2)$, $\ldots$, $(0{,}9; 1)$, gautume: 12, 8, 10, 12, 9, 11, 7, 13, 11. Pažvelgus į šią seką taip pat galima padaryti prielaidą, kad ji tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1, tačiau tolygumas nėra toks taisyklingas. Žinoma, tarp hipotezės ir įrodymo glūdi ertmė. Hipotezės apie skaičiaus $\sqrt{2}$ kartotinius ir φ laipsnius jau įrodytos, tačiau apie skaičiaus $\frac{3}{2}$ laipsnius — vis dar ne. Teiginys dar tebėra hipotezė, o kartu — ir iššūkis.

Sekos vaizdavimas. Kaip šią hipotezę pradėti nagrinėti? Įsivaizduokime apskritimo formos skaitiklį, panašų į laikrodį, tik sužymėtą ne valandomis, bet intervalo [0; 1) skaičiais: pradinis apskritimo taškas pažymėtas skaičiumi 0,0, ketvirtį apskritimo atitinkantis taškas pažymėtas 0,25 ir t. t. Intervalo [0; 1) skaičių seką galime pavaizduoti kelionės plokštumoje trajektorija (1 pav.).



1 pav.

Kiekvieną kitą sekos narį atitinka naujas trajektorijos žingsnis, šio žingsnio kryptį rodo skaitiklio rodyklė, nukreipta iš skaitiklio centro į apskritimo tašką, atitinkantį naująjį sekos narį. Pagal pirmuosius sekos narius atidėję kelio žingsnius, gauname netaisyklingo klaidžiojimo trajektorijos pradžią. Jeigu šitaip žingsniuojant ir tolstama nuo kelionės pradžios taško, ir artėjama prie jo, tačiau atstumas iki šio taško visada lieka daug mažesnis už visą nueitą kelią, tai yra požymis, kad seka tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Priešingai, jeigu keliaujama sparčiai tolstant nuo pradžios taško, tai yra pagrindo manyti, kad seka nėra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Tikslų tolygaus pasiskirstymo kriterijų suformulavo Hermann Weyl (Hermanas Veilis).

Veilio kriterijus

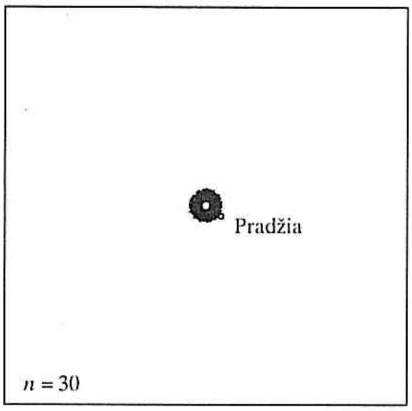
Herman Weyl 1916 metais paskelbė tolygaus pasiskirstymo moduliu 1 kriterijų: seka $\{u_n\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 tada ir tik tada, kai su bet kokiu h, $h \neq 0$, teisingas sąryšis

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi h u_n} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Šį kriterijų galima interpretuoti grafiškai. Kiekvienam iš pirmųjų N narių hu_n priskirkime po apskritimo tašką (1 pav.). Veilio kriterijus tvirtina, kad visiems h šitaip gautų taškų aibės svorio centras, kai $N \to \infty$, artėja prie apskritimo centro. Naudojantis šiuo kriterijumi, nesunku įrodyti, kad bet kokio iracionaliojo skaičiaus kartotinių seka yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1.

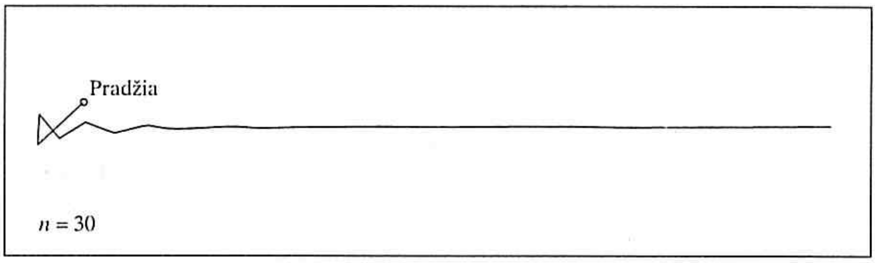
Grafinis klaidžiojimo vaizdas yra gera pedagoginė priemonė, padedanti suprasti problemos esmę.

Nagrinėkime minėtas tris sekas ir pavaizduokime po 30 jas atitinkančių klaidžiojimo trajektorijų žingsnių. Trajektorija, atitinkanti skaičiaus $\sqrt{2}$ kartotinius, susipynusi į kamuolį, kurio centras — pradžios taškas (2 pav.).



2 pav.

Laužyta trajektorijos linija išsitenka nedidelėje srityje. Ji sudaro nebaigtą braižyti 30 spindulių žvaigždę. Tęsdami skaičiavimus toliau, nubraižę trajektoriją gautume žvaigždę su vis didesniu skaičiumi spindulių, vis labiau primenančią juodą žiedą. Priešingai, „aukso pjūvio" skaičiaus laipsnių sekos trajektorija labai greitai tolsta nuo pradžios taško į begalybę (3 pav.).



3 pav.

„Aukso pjūvio" skaičiaus „pusbroliai"

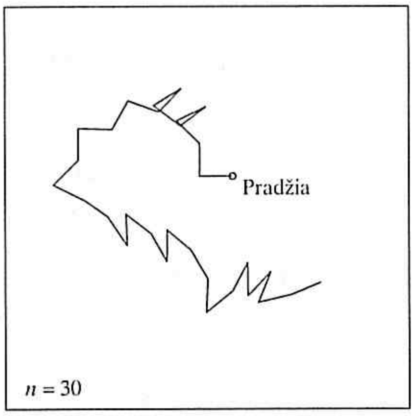
„Aukso pjūvio" skaičiaus „pusbroliai" (pvz., skaičius θ) buvo atrasti XX amžiaus pradžioje, o pirmuosius svarbius rezultatus apie 1930 metus gavo prancūzas Charles Pisot (Šarlis Pizo) ir indas Vijayaraghavanas. Todėl šie skaičiai vadinami PV skaičiais. Jų laipsniai ne tik nėra tolygiai pasiskirstę moduliu 1, bet moduliu 1 artėja prie nulio.

Nuo Dalambero laikų žinoma, kad bet kuri lygtis

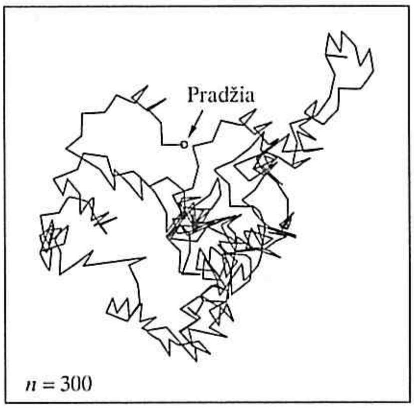
$$x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_{d-1} x + a_d = 0$$

turi d sprendinių — realiųjų ar ne, skirtingų ar sutampančių. Tarkime, visi šios lygties koeficientai yra sveikieji skaičiai. Jeigu vienas šios lygties sprendinys x yra didesnis už 1 realusis skaičius, o kiti $d-1$ sprendinių moduliu mažesni už vienetą, tai skaičius x vadinamas PV skaičiumi. Taigi sveikieji didesni už 1 skaičiai yra PV skaičiai, „aukso pjūvio" skaičius ir jo „pusbroliai" — taip pat PV skaičiai. Galima nesunkiai įrodyti, kad x^n moduliu 1 artėja prie nulio. Kur kas sunkiau įrodyti atvirkštinį teiginį: jeigu skaičius x yra didesnis už vienetą, o jo laipsniai x^n moduliu 1 greitai artėja prie nulio (pavyzdžiui, atstumas iki nulio mažėja greičiau nei $1/n$), tai x yra PV skaičius. Šie skaičiai glaudžiai susiję su sveikaisiais, todėl vaidina svarbų vaidmenį įvairiose matematikos, taip pat ir fizikos srityse.

Kelias, vaizduojantis trupmenos $\frac{3}{2}$ laipsnius, atrodo gana mįslingai. Jis labai primena tokį atsitiktinį klaidžiojimą, kai vengiama per daug nutolti nuo pradinio taško (4 pav.). Dar keistesnį vaizdą gauname atidėję ne 30, bet 300 pirmųjų trajektorijos žingsnių (5 pav.). Trajektorija primena tolygų pasiskirstymą moduliu 1, tačiau iki įrodymo labai toli — nei įspūdžiai, nei skaičiavimų rezultatai nėra įrodymo argumentai. Šiandien matematikai priversti pripažinti, kad negali atsakyti į klausimą, ar ši seka moduliu 1 yra tolygiai pasiskirsčiusi, ar ne.



4 pav.



5 pav.

Paradoksalioji trupmena $\frac{3}{2}$. Taigi mįslė, kartu ir paradoksas — kodėl tokio paprasto skaičiaus kaip $\frac{3}{2}$ laipsnių seka elgiasi chaotiškai, o tokių sudėtingų skaičių kaip φ ir θ laipsniai — labai taisyklingai.

Bandydami išsiaiškinti situaciją, pirmiausia atsakykime į klausimą, kokia savybė būdinga nagrinėtų sekų daugumai: tolygaus pasiskirstymo moduliu 1 ar priešingai — netolygaus pasiskirstymo? Atsakymas visiškai aiškus kartotinių sekoms, tačiau visiškai neaiškus laipsnių sekoms. Žinoma, kad iracionaliųjų skaičių kartotinių sekos yra tolygiai pasiskirčiusios moduliu 1, taip pat žinoma (tai įrodyti galima dar paprasčiau), kad jokio racionaliojo skaičiaus kartotinių seka nėra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Vėliau pamatysime, kad tam tikra prasme iracionaliųjų skaičių yra daug daugiau negu racionaliųjų. Taigi galima teigti, kad skaičių kartotinių sekoms tolygaus pasiskirstymo moduliu 1 savybė yra tipinė. Nagrinėdami laipsnių sekas, susiduriame su nauju paradoksu, dar įspūdingesniu negu jau minėtasis: žinomi skaičiai, didesni už vienetą, kurių laipsnių sekos nėra tolygiai pasiskirsčiusios moduliu 1, ir kartu žinoma, kad tokie skaičiai yra išimtys, kad tolygaus pasiskirstymo savybė yra tipinė tokioms sekoms, tačiau nežinomas nė vienas skaičius, kuriam galėtume įrodyti, kad jo laipsnių seka moduliu 1 yra pasiskirsčiusi tolygiai!

Iš kur žinome, kad tolygaus pasiskirstymo moduliu 1 savybė yra tipinė laipsnių sekoms? Tai 1933 metais įrodė olandų matematikas J. F. Koksma. Įrodymas nėra paprastas. Norėdami suprasti pačią rezultato formuluotę, turime panagrinėti, kaip begalinės aibės gali būti skirstomos į „mažas" ir „dideles". Tokius klausimus nagrinėjančią kryptį matematikai vadina *mato teorija*, tačiau šiuos dalykus galima aptarti naudojantis ne mato, bet tikimybės sąvoka.

Diskretumas ir tirštumas. Panagrinėkime skaičių, atvirkštinių natūraliesiems, aibę

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots.$$

Nors ji ir begalinė, tačiau „visai maža": pavyzdžiui, tarp trupmenų $\frac{1}{3}$ ir $\frac{1}{2}$, taip pat ir tarp $\frac{1}{400}$ ir $\frac{1}{399}$ ir t. t. nėra nė vieno šios aibės elemento. Sakoma, kad ši aibė yra diskreti. O dabar panagrinėkime visų racionaliųjų skaičių aibę: paėmus du racionaliuosius skaičius, kad ir kaip jie mažai skirtųsi, visada tarp jų bus kitas racionalusis skaičius, netgi be galo daug racionaliųjų skaičių! Sakoma, kad visų racionaliųjų skaičių aibė yra tiršta. Nagrinėdami skaičius, kurių dešimtainėje išraiškoje nėra skaitmens 7, gautume keistą aibę: nei diskrečią, nei tirštą, tačiau turinčią daug elementų (daugiau negu dvi minėtos aibės).

Dabar įsivaizduokime, kad į intervalą (0; 1) bakstelime plonos adatos smaigaliu, labai plonos, be galo plonos... Tikimybė pataikyti į vienos iš minėtų aibių elementą lygi nuliui! Taigi tikimybė, kad šiuo būdu „pasmeigsime" natūraliojo skaičiaus atvirkštinį, arba racionalųjį skaičių, arba skaičių, kurio dešimtainėje išraiškoje nėra skaitmens 7, lygi nuliui. Tokias aibes matematikai vadina *nulinio mato*, arba *nulinės tikimybės*, aibėmis. Nedidelis tikimybinis paradoksas: nors tikimybė lygi nuliui, tai anaiptol nereiškia, kad tokio skaičiaus „pasmeigti" negalima...

Priešingai, tikimybė pataikyti į skaičių, kuris nepriklauso vienai iš šių trijų aibių, lygi vienetui, t. y. šių aibių papildiniai yra vienetinės tikimybės aibės. Matematikai, įpratę prie vaizdingos ir kiek mįslingos kalbos, sako, kad šiai aibei priklauso beveik visi skaičiai.

Dabar teoremą, apie kurią kalbame, galime suformuluoti taip: didesnių už vienetą skaičių, kurių laipsnių seka yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1, aibė yra vienetinės tikimybės aibė. Kodėl didesnių už vienetą? Nes jokio teigiamo, mažesnio už vienetą skaičiaus laipsnių seka nėra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Todėl mes ir nagrinėjame skaičių $\frac{3}{2}$. Tai pats paprasčiausias skaičius, kurio laipsnių seka galbūt yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Kadangi joks kitas, turintis šią savybę skaičius nėra žinomas, kodėl nepradėjus nuo minėtojo skaičiaus? Jeigu pavyktų įrodyti, kad taip ir yra, tai ar teisingiau būtų sakyti, kad šis skaičius labai ypatingas, ar kad tarsi atsitiktinis?

Matematinė problema yra įdomi tada, kai ji yra dalelė plačios tyrinėjimų srities, kai ji yra susijusi su kitomis problemomis. Pavienių gražių rezultatų nebūna.

Pavyzdžiui, Wileso–Fermat teorema įdomi tuo, kad ji susijusi su sudėtinga algebrine skaičių teorija. Racionaliųjų skaičių laipsnių pasiskirstymo moduliu 1 problema reikšminga tuo, kad ji susijusi su giliomis aritmetinės aproksimacijos (matematikai sako — *diofantinių artinių*) teorijos sąvokomis ir statistiniais sudėtingų determinuotų (matematikai sako — *ergodinių procesų*) procesų tyrimais.