$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 3, 79–85

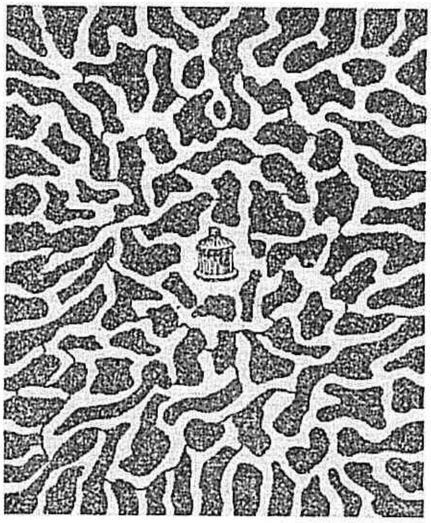
Daugelis sutiks, kad matematika yra labirintas. Tačiau ar kelio ieškojimas labirinte yra tik galvosūkis, ar ir matematinis uždavinys?

Viena vertus, kiekviename galvosūkyje yra bent kruopelė matematikos. Kita vertus, labirintą galima pavaizduoti grafu. Tada labirinto galvosūkis tampa dvi grafo viršūnes jungiančio kelio paieškos uždaviniu.

Šiame skyrelyje siūlome paklaidžioti po labirintus. Pirmasis tikrai buvo įrengtas Anglijoje, na o likusieji — sumodeliuoti kompiuteriu.

ε. 109

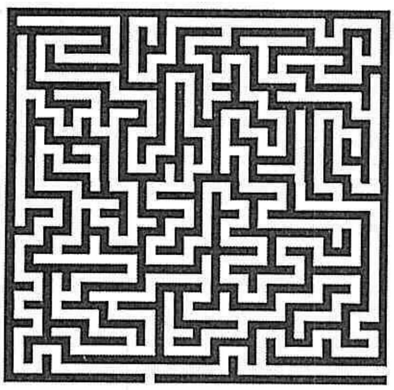
Raskite kelią į labirinto centre pastatytą pavėsinę:



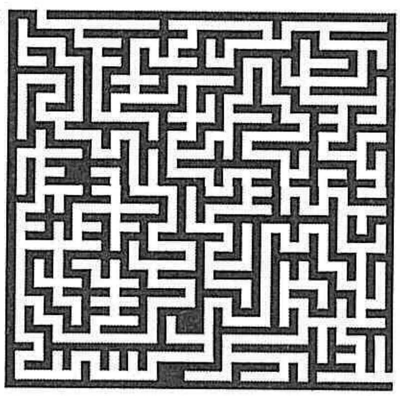
ε. 110

Raskite kelią labirintuose:

a)

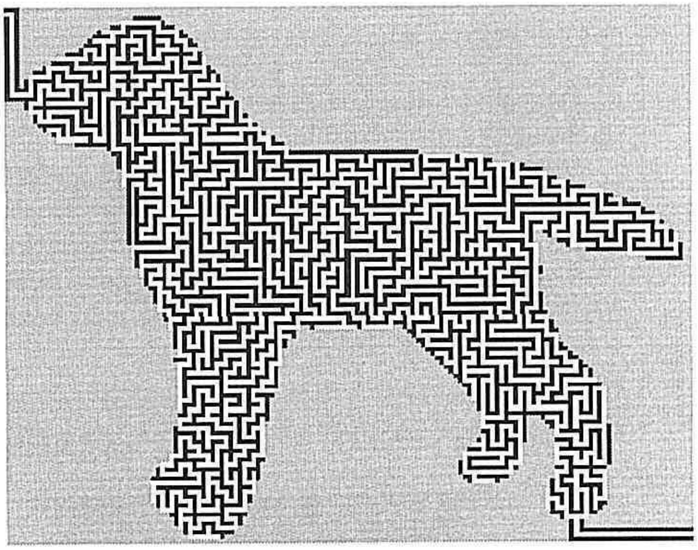


b)



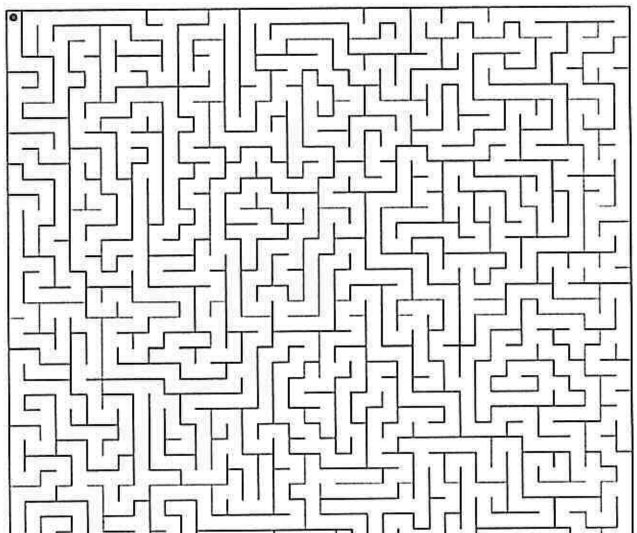
ε. 111

Įeikite ir išeikite:



ε. 112

Kaip nukeliauti iš vieno taško į kitą?



Mūsų skyrelyje — komandinės olimpiados „Baltijos kelias 2001“, vykusios 2001 lapkričio 2–6 dienomis Hamburge, uždaviniai.

α. 245

Egzaminui buvo paruoštas 8 uždavinių rinkinys. Kiekvienam studentui duoti 3 uždaviniai. Jokie du studentai negavo daugiau kaip vieno bendro uždavinio. Koks galėjo būti didžiausias studentų skaičius?

α. 246
◊◊◊
Natūralusis skaičius $n \geqslant 2$. Nustatykite, ar egzistuoja n tokių kas du nesikertančių netuščiųjų aibės $\{1, 2, 3, \dots\}$ poaibių, kad kiekvieną natūralųjį skaičių būtų galima vieninteliu būdu išreikšti suma ne daugiau kaip n dėmenų, paimtų iš skirtingų poaibių.

α. 247
◊◊◊
Į lentelę 7×7 surašomi skaičiai $1, 2, \dots, 49$ ir apskaičiuojama kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičių suma. Kai kurios iš tų 14 sumų yra lyginės, o kai kurios — nelyginės. Raide A pažymėkime sumą visų nelyginių sumų, o raide B — visų lyginių sumų. Ar galima tuos skaičius surašyti į lentelę taip, kad būtų $A = B$?

α. 248
◊◊◊
Skaičiai p ir q yra du skirtingi pirminiai. Irodykite, kad

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{1}{2}(p-1)(q-1);$$

čia $\lfloor x \rfloor$ — skaičiaus x sveikoji dalis.

α. 249
◊◊◊
Yra 2001 apskritimo taškas, nuspalvintas raudonai arba žaliai. Vienu žingsniu tuo pačiu metu visi taškai yra perspalvinami taip: jeigu abu taško P kaimynai yra tos pačios spalvos, kaip ir taškas P, tai taško P spalva nesikeičia, kitais atvejais taškas P yra perspalvinamas. Pradėję nuo pradinio spalvinimo F_1, nuosekliai gauname spalvinimus $F_2, F_3, \dots$. Įrodykite, kad atsiras toks numeris $n_0 \leqslant 1000$, jog $F_{n_0} = F_{n_0+2}$. Ar teiginys liktų teisingas, jeigu skaičių 1000 pakeistume skaičiumi 999?

α. 250
◊◊◊
Apskritimo c taškai A, B, C, D, E išsidėstę nurodyta tvarka, ir $AB \parallel EC$, $AC \parallel ED$. Apskritimo c liestinė taške E kerta tiesę AB taške P. Tiesės BD ir EC kertasi taške Q. Įrodykite, kad $AC = PQ$.

α. 251
◊◊◊
Per lygiagretainio $ABCD$ tašką A einantis apskritimas kerta atkarpas AB, AC ir AD atitinkamai vidiniuose taškuose M, K, N. Įrodykite, kad $AB \cdot AM + AD \cdot AN = AK \cdot AC$.

α. 252
◊◊◊
Taškas N yra iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinės BC vidurio taškas, o $\angle AND = 135°$. Įrodykite, kad

$$AB + CD + BC + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot BC \geqslant AD.$$

$\alpha + \omega$

α. 253

◊◊◊

Duotas rombas $ABCD$. Raskite geometrinę vietą taškų P, esančių rombo viduje ir tenkinančių lygybę $\angle APD + \angle BPC = 180°$.

α. 254

◊◊◊

Trikampyje ABC kampo BAC pusiaukampinė kerta kraštinę BC taške D. Žinoma, kad $BD \cdot CD = AD^2$, $\angle ADB = 45°$. Raskite trikampio ABC kampų didumus.

α. 255

◊◊◊

Funkcija f yra apibrėžta su visais natūraliaisiais skaičiais ir įgyja realiąsias reikšmes. Visiems sveikiesiems skaičiams $a > 1$, $b > 1$ yra teisinga lygybė

$$f(ab) = f(d)\left(f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{d}\right)\right);$$

čia d yra skaičių a ir b didžiausiasis bendrasis daliklis. Raskite visas galimas $f(2001)$ reikšmes.

α. 256

◊◊◊

Teigiamieji skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tenkina lygybes $\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 3$ ir $\sum_{i=1}^{n} a_i^5 = 5$. Įrodykite, kad $\sum_{i=1}^{n} a_i > 3/2$.

α. 257

◊◊◊

Tegu $a_0, a_1, a_2, \ldots$ yra natūraliųjų skaičių seka, $a_0 = 1$ ir $a_n = a_{\lfloor 7n/9 \rfloor} + a_{\lfloor n/9 \rfloor}$, $n = 1, 2, \ldots$. Įrodykite, kad egzistuoja natūralusis skaičius k, kuriam $a_k < \frac{k}{2001!}$; čia $\lfloor x \rfloor$ — skaičiaus x sveikoji dalis.

α. 258

◊◊◊

Yra $2n$ kortelių. Kiekvienoje kortelėje parašyta po realųjį skaičių x, $1 \leqslant x \leqslant 2$ (skirtingose kortelėse gali būti skirtingi skaičiai). Įrodykite, kad korteles galima padalyti į tokias dvi krūveles, kad vienos krūvelės kortelėse užrašytų skaičių suma s_1 ir kitos krūvelės kortelėse užrašytų skaičių suma s_2 tenkintų sąlygą $\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{s_1}{s_2} \leqslant 1$.

α. 259

◊◊◊

Tegu $a_0, a_1, a_2, \ldots$ yra teigiamųjų skaičių seka, tenkinanti sąlygą $i \cdot a_i^2 \geqslant (i+1) \cdot a_{i-1}a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Tegu x ir y yra teigiamieji skaičiai, o $b_i = xa_i + ya_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Įrodykite, kad nelygybė $i \cdot b_i^2 > (i+1) \cdot b_{i-1}b_{i+1}$ yra teisinga su visais sveikaisiais skaičiais $i \geqslant 2$.

α. 260
◊◊◊

Funkcija f yra apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje ir tenkina sąlygą: kiekvienam $n > 1$ egzistuoja toks skaičiaus n pirminis daliklis p $(p \leqslant n)$, kad $f(n) = f(n/p) - f(p)$. Žinoma, kad $f(2001) = 1$. Raskite $f(2002)$.

α. 261
◊◊◊

Tegu n — natūralusis skaičius. Įrodykite, kad iš aibės $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ galima taip išrinkti ne mažiau kaip $2^{n-1} + n$ skaičių, jog kiekvienų paimtų dviejų skirtingų skaičių x ir y sandauga $x \cdot y$ nesidalytų iš jų sumos $x + y$.

α. 262
◊◊◊

Tegu a yra nelyginis skaičius. Įrodykite, kad su bet kokiais natūraliaisiais skaičiais n ir m $(n \neq m)$ $a^{2^n} + 2^{2^n}$ ir $a^{2^m} + 2^{2^m}$ neturi didesnių už vienetą bendrų daliklių.

α. 263
◊◊◊

Koks yra mažiausias teigiamasis nelyginis skaičius, turintis tiek pat teigiamųjų daliklių, kaip ir skaičius 360?

α. 264
◊◊◊

Iš skaičių ketverto (a, b, c, d) vienu ėjimu galima gauti bet kurį iš ketvertų (c, d, a, b), (b, a, d, c), $(a + nc, b + nd, c, d)$, $(a + nb, b, c + nd, d)$; čia n — bet kuris kiekvieną kartą laisvai pasirenkamas sveikasis skaičius. Ar galima po kelių ėjimų iš ketverto $(1, 2, 3, 4)$ gauti ketvertą $(3, 4, 5, 7)$?

Šiame skyrelyje skelbiame 8-osios tarptautinės universitetų studentų olimpiados, vykusios Prahoje 2001 liepos 19–25 dienomis, uždavinius.

ω. 73
◊◊◊

n yra natūralusis skaičius. Į $n \times n$ matmenų matricos eilutes iš kairės į dešinę surašomi skaičiai $1, 2, 3, \ldots, n^2$. Pasirenkame n elementų po vieną iš kiekvienos tos matricos eilutės ir kiekvieno stulpelio. Visus pasirinktuosius skaičius sudedame. Kokios galimos pasirinktųjų skaičių sumos?

ω. 74
◊◊◊

Natūralieji skaičiai r, s ir t yra tarpusavyje poromis pirminiai. Jeigu a ir b yra komutatyviosios multiplikatyviai užrašomos grupės su vienetiniu elementu e elementai, kad $a^r = b^s = (ab)^t = e$, tai $a = b = e$. Įrodykite.

ω. 75
◊◊◊

Raskite

$$\lim_{t \to 1-0} (1 - t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1 + t^n}.$$

$\alpha + \omega$

ω. 76

◊◊◊

k yra natūralusis skaičius, o $p(x)$ — n-ojo laipsnio polinomas, kurio koeficientai lygūs -1, 1 arba 0. Tarkime, šis polinomas dalijasi iš $(x-1)^k$. Tegu q yra toks pirminis skaičius, kad $\frac{q}{\ln q} < \frac{k}{\ln(n+1)}$. Įrodykite, kad visos kompleksinės q-ojo laipsnio vieneto šaknys yra ir polinomo $p(x)$ šaknys.

ω. 77

◊◊◊

A yra $n \times n$ matmenų matrica, kurios elementai — kompleksiniai skaičiai. Be to, $A \neq \lambda I$ su visais $\lambda \in \mathbb{C}$. Įrodykite, kad A yra panaši į matricą, kuri turi daugiausiai vieną nenulinį elementą pagrindinėje įstrižainėje.

ω. 78

◊◊◊

Realios diferencijuojamos funkcijos a, b, f ir g tenkina sąlygas: $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) > 0$ su visais $x \in \mathbb{R}$. Be to,

$$\lim_{x\to\infty} a(x) = A > 0, \qquad \lim_{x\to\infty} b(x) = B > 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

ir

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x)\frac{f(x)}{g(x)} = b(x).$$

Įrodykite, kad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{A+1}.$$

ω. 79

◊◊◊

Tegu r ir s yra sveikieji skaičiai, ne mažesni už 1, o $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{s-1}$ yra tokie realieji neneigiami skaičiai, kad

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{r-1}x^{r-1} + x^r) \times \\ \times (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{s-1}x^{s-1} + x^s) = \\ = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{r+s-1} + x^{r+s}.\end{aligned}$$

Įrodykite, kad visi a_i ir visi b_j yra lygūs arba nuliui, arba vienetui.

ω. 80

◊◊◊

Tegu $a_0 = \sqrt{2}$, $b_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$, $b_{n+1} = \frac{2b_n}{2+\sqrt{4+b_n^2}}$.

a) Įrodykite, kad abi sekos konverguoja, o jų ribos lygios nuliui.
b) Įrodykite, kad seka $(2^n a_n)$ didėja, seka $(2^n b_n)$ mažėja ir abiejų sekų ribos yra lygios.
c) Įrodykite, kad egzistuoja tokia teigiama konstanta C, jog su visais n galioja nelygybė $0 < b_n - a_n < \frac{C}{8^n}$.

ω. 81
◊◊◊

Kiek daugiausia taškų galima pasirinkti ant erdvės $\mathbb{R}^n$ vienetinės sferos, jei atstumas tarp bet kurių iš jų turi būti didesnis už $\sqrt{2}$?

ω. 82
◊◊◊

Tegu $A = (a_{k,l})$, $k, l = 1, \dots, n$, yra $n \times n$ matmenų kompleksinė matrica tokia, kad su kiekvienu $m \in \{1, \dots, n\}$ ir $1 \leqslant j_1 < \dots < j_m \leqslant n$ matricos (a_{j_k, j_l}), $k, l = 1, \dots, m$, determinantas yra lygus nuliui. Įrodykite, kad $A^n = 0$ ir atsiras tokia perstata $\sigma \in S_n$, jog visi matricos $(a_{\sigma(k), \sigma(l)})$, $k, l = 1, \dots, n$, nenuliniai elementai bus virš įstrižainės.

ω. 83
◊◊◊

Įrodykite, kad nėra tokios funkcijos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jog $f(0) > 0$ ir $f(x+y) \geqslant f(x) + yf(f(x))$ su visais $x, y \in \mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ — realiųjų skaičių aibė.

ω. 84
◊◊◊

Tegu $f_n(\vartheta) = \sin\vartheta \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \sin(4\vartheta) \cdot \dots \cdot \sin(2^n\vartheta)$. Įrodykite, kad visiems ϑ ir n teisinga nelygybė

$$\left|f_n(\vartheta)\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\left|f_n(\pi/3)\right|.$$

$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 3, 86–87

Sprendimai

ε. 107

◊◊◊

Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, turintį tokią savybę: bet kurį jo skaitmenį pakeitus bet kuriuo kitu gaunamas sudėtinis skaičius (t. y. jis dalijasi ne tik iš vieneto ir paties savęs).

Aišku, kad kiekvienas skaičius, kurio bet kurį skaitmenį pakeitę gauname sudėtinį skaičių, nėra vienaženklis — pakeitę vienaženklį skaičių, pavyzdžiui, trejetu (jeigu jis ne trejetas) arba penketu (jei tai trejetas), gausime pirminį. Tirkime dviženklius skaičius. Kadangi nuo 10 iki 19 turime kelis pirminius (11, 13, 17 ir 19), tai užtenka antrą skaitmenį pakeisti vienu iš skaitmenų 1, 3, 7, 9. Lygiai taip pat galima padaryti su trečios dešimties skaičiais (pirminiai 23 ir 29), ketvirtos dešimties (pirminiai 31 ir 37), penktos dešimties (pirminiai 41, 43 ir 47), šeštos dešimties (pirminiai 53 ir 59), septintos dešimties (pirminiai 61 ir 67), aštuntos dešimties (pirminiai 71, 73, 79), devintos dešimties (pirminiai 83 ir 89) skaičiais. O štai nuo 90 iki 99 tėra tik vienas pirminis skaičius — 97 (nes $91 = 7 \cdot 13$). Aišku, kad nelygus skaičiui 97 joks skaičius nuo 90 iki 99 netinka: pakeitę jo paskutinį skaitmenį septynetu, gausime pirminį skaičių. Bet pakeitę skaičiaus 97 antrą skaitmenį, gausime vien sudėtinius skaičius. Vis dėlto skaičius 97 taip pat netinka — pakeitę pirmąjį skaitmenį, pavyzdžiui, vienetu, gausime pirminį skaičių 17. Taigi pirmajame šimte norimų skaičių nėra.

Tikrinkime antrąjį šimtą. Vienuoliktoje dešimtyje (nuo 100 iki 109) turime net 4 pirminius (101, 103, 107 ir 109), dvyliktoje — tik vieną pirminį — 113 (111 ir 117 dalijasi iš 3, o 119 — iš 7). Deja, ir skaičius 113 netinka: pakeitę antrą skaitmenį nuliu, gauname pirminį 103.

Nuo 120 iki 129 yra tik vienas pirminis — 127, bet ir jis netinka: pakeitę dvejetą nuliu, turime pirminį skaičių 107. Nuo 130 iki 139 yra 3 pirminiai — 131, 137 ir 139. Nuo 140 iki 149 yra tik vienas pirminis 149, bet jis taip pat netinka: pakeitę ketvertą nuliu, gausime pirminį 109. Nuo 150 iki 159 pirminiai yra du — 151 ir 157. Nuo 160 iki 169 pirminiai du — 163 ir 167. Nuo 170 iki 179 pirminiai du — 173 ir 179. Nuo 180 iki 189 pirminis tik vienas — 181, bet jis irgi netinka: pakeitę aštuonetą nuliu, gauname pirminį 101. Nuo 191 iki 199 pirminiai vėl keturi — 191, 193, 197 ir 199 (na ir nesuprantamai pasiskirstę tie pirminiai skaičiai!). Taigi ir antrame šimte nėra skaičių, kurių bent vieną skaitmenį pakeitę gautume vien sudėtinius.

Pradedame trečią šimtą — ir iš karto atsiranda vilties: nuo 200 iki 209 nėra pirminių ($203 = 7 \cdot 29$, $209 = 11 \cdot 19$). Imkime mažiausią „kandidatą“ — skaičių 200. Jau žinome, kad keisdami jo paskutinį skaitmenį, pirminių negausime, o dėl pirmo ir antro skaitmens — tai akivaizdu: bet kuris gautas skaičius baigsis 0 ir todėl dalysis, pavyzdžiui, iš 10.

Vadinasi, mažiausias norimas skaičius yra 200.

Baigdami padarysime keletą pastabų. Pirma, aišku, kad sprendžiant šį uždavinį labai padeda pirminių skaičių lentelė. Antra, nesunku rasti ir daugiau skaičių, turinčių tokią savybę: tai, pavyzdžiui, 202, 204, 206, 208 (skaičius 201 netinka, nes 101 pirminis; 203 netinka, nes 103 pirminis; 207 netinka, nes 107 pirminis; 209 netinka, nes 109 pirminis). Siūlome skaitytojui rasti septintą tokį skaičių.

ε. 108

◇◇◇

Tomo skaičiuoklis sugedo: užrašant skaičius galima naudotis tik trimis skaitmenų 1–9 mygtukais. Naudojantis šiais mygtukais, galima sudaryti šešis dviženklius skaičius, kurių kiekvieno skaitmenys skiriasi. Visus šiuos skaičius sudėjus, pasirodė, kad suma užrašoma tais pačiais trimis skaitmenimis, kurių mygtukai veikia. Kokie tai skaitmenys?

Sakykime, kad suma yra $\overline{abc}$. Vadinasi, $\overline{ab}+\overline{ba}+\overline{ac}+\overline{ca}+\overline{bc}+\overline{cb}=\overline{abc}$,

$$\begin{aligned}
&10a+b+10b+a+11(a+c)+11(b+c)=\overline{abc},\\
&22(a+b+c)=100a+10b+c,\\
&12b+21c=78a,\\
&4b+7c=26a.
\end{aligned}$$

Liko išspręsti šią lygtį, kur a, b, c — nelygūs nenuliniai skaitmenys.

Kadangi $26a=4b+7c\leqslant 4\cdot 9+7\cdot 9=99$, tai $a\leqslant 3$. Išspręskime lygtį su šitomis a reikšmėmis.

Kai $a=1$, tai gauname $4b+7c=26$. Matome, kad c lyginis, bet nesidalija iš 4, t. y. lygus arba 2, arba 6. Reikšmė 6 per didelė, lieka $c=2$, tada $b=3$.

Kai $a=2$, tai $4b+7c=52$. Matome, kad c dalijasi iš 4, t. y. lygus 4 arba 8. Reikšmė 8 per didelė, lieka $c=4$, tada $b=6$.

Kai $a=3$, tai $4b+7c=78$. Vėl $c=2$ arba $c=6$. Reikšmė 2 per maža ($4b+14=78$, $4b=64$, $b=16$). Lieka $c=6$, tada $b=9$.

Vadinasi, tai arba mygtukų trejetas 1, 2, 3, arba mygtukų trejetas 2, 4, 6, arba mygtukų trejetas 3, 6, 9.

Juozas Mačys