$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 3, 72–73

Istorija apie dviratininkus ir daugianarius

Vytautas Gylys
alphapliusomega@tev.lt; apo@tev.lt

Vieną gražią dieną Valdas Vanagas man parodė uždavinį, kurį jam parodė Juozas Mačys, kurį Juozui Mačiui parodė jo sūnus, kurį pastarajam parodė... Kur grandinės pradžia, nežinau.

Pabandžiau išspręsti uždavinį: naudodamasis visais duomenimis, parašiau kelias lygtis, pasižiūrėjau į jas ir nusprendžiau, kad norėdamas galėčiau jas išspręsti. Ir nustūmiau į šalį.

Tačiau sutikęs Valdą sužinojau, kad Juozas Mačys sugebėjo šį uždavinį išspręsti paprastai. Nutariau, kad ir mano, kaip dviratininko, garbė reikalauja rasti paprastą sprendimą.

Visų pirma nusprendžiau atsisakyti kai kurių konkrečių uždavinio sąlygos detalių ir suformulavau uždavinį taip:

Iš to paties taško tuo pačiu metu skirtingomis kryptimis išvažiavo du dviratininkai. Po tam tikro laiko iš to paties taško išvažiavo trečiasis dviratinkas, norėdamas pasivyti pirmąjį, po to sugrįžęs į pradinį tašką vytis antrąjį, o pasivijęs grįžti į pradinį tašką ir baigti kelionę. Ar nesutaupytų šiek tiek laiko trečiasis dviratininkas, jeigu iš pradžių vytųsi antrąjį, o po to pirmąjį? Visi trys dviratinkai važiuoja pastoviais greičiais.

Perskaičius taip suformuluotą sąlygą galima gūžtelti pečiais: kaip galime tai žinoti? Nežinome nei greičių, nei po kiek laiko į kelionę išvyko trečiasis dviratininkas. Tačiau galima nesunkiai atsakyti į klausimą keliais konkrečiais atvejais. Pavyzdžiui, jei trečiojo dviratininko greitis nėra didesnis už pirmųjų dviejų, tai ar jis iš pradžių vysis pirmąjį, o po to antrąjį, ar atvirkščiai — kelionės niekada nebaigs. Taigi ir laiko nesutaupys. Laiko nesutaupys ir tuomet, kai vienas iš pirmųjų dviratininkų tiesiog stovės kelionės pradžios taške (t. y. važiuos nuliniu greičiu).

Pasirodo, kad šis atsakymas teisingas visais atvejais!

Kartais būna, kad apibendrinus uždavinį jo sprendimas ne ką tepasunkėja. Taip atsitiko ir šį kartą. Pabandykime išspręsti tokį apibendrintą uždavinį.

Iš to paties taško tuo pačiu metu skirtingomis kryptimis išvažiavo n dviratininkų. Jų greičiai atitinkamai lygūs $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Po valandos iš to paties taško išvažiavo dar vienas dviratininkas, jo greitis $v = 1$. Jis ketina pasivyti pirmąjį dviratininką, grįžti į pradinį tašką, pasivyti antrąjį ir t. t. Kiek laiko šis dviratinkas keliaus, jei kelionę jis ketina baigti pasivijęs n-ąjį dviratininką ir sugrįžęs į pradinį tašką?

Uždavinio sąlygoje minimi tik du konkretūs skaičiai: besivejantis dviratininkas išvyko po valandos, o jo greitis lygus 1. Matematikas iš karto supras, kad tai nemažina bendrumo. Bet kurį kitą atvejį galima suvesti į pastarąjį, atitinkamai parinkus laiko ir atstumo matavimo vienetus.

Taip pat aišku, kad pakanka nagrinėti atvejį, kai $0 < v_1, v_2, \ldots, v_n < 1$. Pažymėkime T_m besivejančio dviratininko kelionės laiką nuo pradžios iki to momento, kai pasivijęs m-ąjį dviratininką jis atsidūrė pradiniame taške. Beveik akivaizdu, kad

$$T_1 = \frac{2v_1}{1 - v_1}.$$

Iš tikrųjų, kai besivejantis dviratininkas išvyko, atstumas tarp jo ir pirmojo dviratininko buvo lygus v_1. Laikas, kurio reikia pirmajam dviratininkui pavyti, lygus laikui, kurį sugaištų besivejantis dviratininkas, važiuodamas atstumą v_1 greičiu $1 - v_1$, t.y. $v_1/(1 - v_1)$. Kadangi tiek pat laiko teks sugaišti grįžtant į pradinį tašką, tai šį dydį reikia padvigubinti.

Kiek parymojęs ir pamąstęs parašiau rekurenčiają formulę:

$$T_{m+1} = T_m + 2 \cdot \frac{(T_m + 1)v_{m+1}}{1 - v_{m+1}},$$

arba

$$T_{m+1} = \frac{(v_{m+1} + 1)T_m + 2v_{m+1}}{1 - v_{m+1}}.$$

Tikiuosi, skaitytojas netruks įsitikinti, kad ši formulė teisinga. Dabar jau galime ir skaičiuoti:

$$T_2 = \frac{1}{1 - v_2} \cdot \left(\frac{(1 + v_2)2v_1}{1 - v_1} + 2v_2\right) = \\ = \frac{2(v_1 + v_2)}{(1 - v_1)(1 - v_2)}.$$

Naudojantis šia formule, galima gauti atsakymą ir į pradinio uždavinio klausimą. Ar besivejantis dviratininkas pirma vysis pirmąjį, o paskui antrąjį dviratininką, ar atvirkščiai, kelionės laikas bus tas pats.

Verta paskaičiuoti T_3, T_4 ir pabandyti atspėti, kam lygu T_n. Aš taip ir padariau. Atspėjau T_n formulę, o po to indukcijos metodu įrodžiau, kad ji iš tiesų teisinga. Praleisiu matematines detales ir užrašysiu teiginį, kuris man pasirodė gana įdomus.

Teorema. *Iš to paties taško tuo pačiu metu skirtingomis kryptimis išvažiavo n dviratininkų. Jų greičiai:* $0 < v_1, v_2, \ldots, v_n < 1$. *Po valandos iš to paties taško išvažiavo dar vienas dviratininkas, jo greitis* $v = 1$. *Pasirinkęs kryptį jis vejasi ta kryptimi važiuojantį dviratininką, pasivijęs grįžta į pradinį tašką ir vejasi kitą dviratininką. Laikas, kurį užtruks šis dviratininkas nuo kelionės pradžios iki to momento, kai pasivijęs paskutinį dviratininką sugrįš į pradinį tašką, nepriklauso nuo to, kokia tvarka jis vijosi dviratininkus, ir lygus*

$$T_n = \frac{2}{(1 - v_1) \cdots (1 - v_n)} \times \\ \times \sum_{2k+1 \leqslant n} \sigma_{2k+1}(v_1, \ldots, v_n);$$

čia

$$\sigma_j(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant n} v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_j}$$

yra simetriniai daugianariai.

Beje, pasinaudojus formule

$$T_2 = \frac{2(v_1 + v_2)}{(1 - v_1)(1 - v_2)},$$

galima rasti, kokiais greičiais keliavo pradinio, Valdui Vanagui ramybės nedavusio, uždavinio dviratininkai.