$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 3, 63–65

XVI komandinė Lietuvos moksleivių matematikos olimpiada

2001 metų spalio 6 dieną Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete įvyko jau šešioliktoji komandinė Lietuvos moksleivių matematikos olimpiada profesoriaus Jono Kubiliaus taurei laimėti. Šiais metais ją laimėjo Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjaus komanda, antrieji liko Kauno technologijos universiteto gimnazistai, tretieji — svečiai iš Minsko. Olimpiadą rėmė: INFO-TEC, BALTIC AMADEUS, leidykla ALMA LITTERA, leidykla AMŽIUS, leidykla TEV, leidykla TYTO ALBA, NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS. Kartu vyko ir III Lietuvos individualioji jaunesniųjų klasių moksleivių olimpiada.

Būsimiems olimpiadų dalyviams bus naudinga panagrinėti, kokius uždavinius jaunieji matematikai sprendė šiais metais.

XVI komandinės Lietuvos moksleivių olimpiados uždaviniai

1. Išspręskite lygtį $2001 - 3x^2 = |3x^2 - 2001|$.

2. Išspręskite lygtį $8(\cos x)^2 + \sin 5x = 8(\cos x)^4 + 1$.

3. Išspręskite lygtį $x^3 = 4 + [x]$ (čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis).

4. Įrodykite nelygybę $\frac{a^4+b^4+3}{\sqrt{a^4+b^4+2}} > \frac{21}{10}$, kai a ir b yra bet kokie realieji skaičiai.

5. Raskite mažiausią reikšmę, kurią gali įgyti reiškinys $5(a^2 + b^2 + 2c^2) - 2(2ab + 6ac + bc - 2a + 3c)$, kai a, b, c — realieji skaičiai.

6. Raskite visas teigiamųjų skaičių poras $(x; y)$, tenkinančias lygčių sistemą $\begin{cases} x^{2y+x} = y^{3y-5x}, \\ x^3 y = 1. \end{cases}$

7. Raskite visas sveikąsias m reikšmes, su kuriomis reiškinio $\sqrt{m^2 + m + 1}$ reikšmė — taip pat sveikasis skaičius.

8. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis $4^n - 1$ dalijasi iš 7 be liekanos.

9. Tegul $a_n = \sqrt{|60\sqrt{11} - 199|} + \sqrt{60\sqrt{11} + 171 + n}$. Ar sekoje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ yra bent vienas natūralusis skaičius?

10. Raskite visas natūraliąsias reikšmes, kurias gali įgyti dviejų skirtingų natūraliųjų skaičių sandaugos ir sumos santykis.

11. Ar galima 1/2 užrašyti baigtine suma $1/n_1^2 + 1/n_2^2 + \cdots + 1/n_l^2$, kai $n_1, n_2, \ldots, n_l$ — skirtingi natūralieji skaičiai?

12. Raskite visus tokius daugianarius $p(x)$, kad lygybė $p(3x) \cdot p(-3x) = 81(x^2 - 1)^2$ būtų teisinga su visomis realiosiomis x reikšmėmis.

13. Funkcija $f(x)$ yra apibrėžta realiųjų skaičių aibėje ir įgyja realiąsias reikšmes. Tarkime, kad $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ su visomis realiosiomis x_1 ir x_2 reikšmėmis.
Ar visada $f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$ su visomis realiosiomis x_1, x_2, x_3 reikšmėmis?

14. Šachmatų lentą 6×6 dengia 18 domino kauliukų 2×1. (Vienas kauliukas dengia lygiai du lentos laukelius). Įrodykite, kad vienu statmenu arba horizontaliu pjūviu lentą galima perpjauti į dvi (nebūtinai lygias) dalis nesugadinant nė vieno domino kauliuko.

15. Įrodykite, kad ant vienetinio apskritimo, kurio centras — koordinačių pradžia, yra be galo daug taškų su racionaliosiomis koordinatėmis.

16. Į kelias dalis padalija plokštumą 2001 tiesė, jei jokios trys tiesės nesikerta viename taške ir jokios dvi tiesės nėra lygiagrečios?

17. Kiek mažiausiai plokštumos taškų su sveikosiomis koordinatėmis uždengia kvadratas, kurio kraštinė yra lygi $2,1$?

18. Tegul M yra trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas, O yra apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras, $\angle COM = 90°$. Įrodykite, kad $|\angle ABC - \angle BAC| = 90°$.

19. Žinoma, kad į trapeciją, kurios pagrindai yra lygūs 4 ir 16, galima įbrėžti apskritimą bei apie ją galima apibrėžti apskritimą. Raskite tų apskritimų spindulius.

20. Styga, kuri remiasi į $60°$ apskritimo lanką, dalija skritulį į du segmentus. Į mažesnįjį segmentą įbrėžtas kvadratas. Raskite jo kraštinę, jei to apskritimo spindulys yra lygus R.

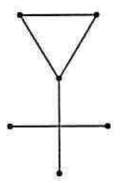
III Lietuvos individualiosios jaunesniųjų klasių moksleivių olimpiados uždaviniai

V, VI klasės

1. Maišelyje yra 9 kilogramai razinų. Kaip turint svirtines svarstykles (su lėkštelėmis) ir vieną 200 gramų masės svarelį mažiausiu skaičiumi svėrimų atsverti 2 kilogramus razinų?

2. Telegrafu galima persiųsti tokius ženklus: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, $+$, $-$, $\times$ (daugybos ženklas), : (dalybos ženklas) ir $=$ (lygybės ženklas). Siunčiant teisingą skaitinę lygybę, vienas ženklas buvo perduotas neteisingai ir buvo gauta neteisinga lygybė $9 \times 5 + 1045 = 1990$. Kokia galėjo būti pradinė teisinga lygybė? Pasistenkite rasti visus atsakymus.

3. Brėžinyje nubrėžtos 6 plokštumos atkarpos, kurių galai yra šešiuose skirtinguose taškuose. Nubraižykite tokį brėžinį, kad 6 atkarpų galai būtų septyniuose skirtinguose taškuose. Apskritai keliuose taškuose gali būti 6 skirtingų atkarpų galai? (Atkarpų ilgiai nebūtinai vienodi, atkarpos gali kirstis ir vidiniuose taškuose, ir tie taškai nelaikomi atkarpų galais; iš kiekvieno atkarpos galo einant atkarpomis ar jų dalimis turi būti galima pasiekti bet kurį kitą galą.)



4. Brėžinyje pavaizduota 3×3 lentelė. Leidžiama visus kurios nors eilutės arba visus kurio nors stulpelio ženklus pakeisti priešingais, o tokį veiksmą kartoti kiek norima kartų. Ar taip darant kada nors galima gauti lentelę, kurioje būtų: a) 8 pliusai; b) visi 9 pliusai?

+	+	−
−	+	+
+	−	+

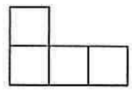
VII, VIII klasės

1. Nagrinėkime natūraliuosius skaičius, kurie užrašomi vien tik trejetais ir septynetais, būtinai panaudojant bent vieną trejetą ir bent vieną septynetą, o skaitmenų suma dalijasi ir iš 3, ir iš 7. Raskite mažiausią tokį skaičių.

2. Raskite lygties $x - y = x^2 + xy + y^2$ sveikuosius sprendinius.

3. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kampai DAB ir ABC yra lygūs, kraštinės BC ilgis lygus 1, o kraštinės AD ilgis yra 3. Įrodykite, kad kraštinės CD ilgis yra didesnis už 2.

4. Balto languoto popieriaus lape nupieštas kvadratas 4×4. Greta pavaizduotą figūrą, sudarytą iš 4 langelių ir primenančią raidę L, pavadinkime kampu.



a) Kiek mažiausiai kvadrato langelių reikia nuspalvinti juodai, kad bet kuriame bet kaip pasuktame kampe, susidarančiame iš kvadrato langelių, būtų bent vienas juodai nuspalvintas langelis?

b) Tas pats klausimas, jei kampą galima dar ir apversti kita puse.

I N F O

ANTROJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI ĮVYKO IR PAVYKO

2001 m. gruodžio 10 d. Raseiniuose įvyko jau antroji Raseinių krašto individualioji ir komandinė olimpiados profesoriaus Jono Kubiliaus įsteigtai taurei laimėti. Joje dalyvavo 18 komandų. Kiekvienoje iš jų buvo po tris aštuntokus ir dar po du devintokus, kuriuos kiekviena mokykla delegavo individualioms kovoms.

Dalyvių geografija, kaip ir pernai, buvo gana plati — jau vien tai rodo, koks paklausus ir reikalingas yra toks renginys energingai ir valingai žemaičių žemei. Dalyvavo ir beveik pirmą vietą užėmė Raudondvario vidurinės mokyklos komanda, buvo atvažiavę jurbarkiečiai, radviliškėnai.

Pernykščiai taurės laimėtojai — Raseinių „Kalno" vidurinės mokyklos, kurią yra baigęs ir taurės steigėjas, atstovai — šiais metais mokytojos Irenos Viršilienės vadovaujami, labai stengėsi ir jiems vėl pavyko. Susumavus ir individulių, ir komandinių varžybų rezultatus, individualiai jie buvo geriausi, o komandai teko antroji vieta. Antrieji likę raudondvariškiai, atvirkščiai, invidualiai buvo antri, o komanda gavo pirmąją vietą.

Olimpiados nugalėtojus apdovanojo Raseinių savivaldybės švietimo skyriaus vedėjas Jonas Tamošaitis, kuris yra lituanistas, ir, kaip prisipažino, buvęs matematikos olimpiadininkas.

Skirstėmės su mintimis, kad visi tie dalykai — ir menai, ir mokslai — yra tokie panašūs, nors ir skirtingai vadinami.

Romualdas Kašuba