$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 3, 51–62

XV Lietuvos komandinės matematikos olimpiados uždaviniai

Artūras Dubickas
arturas.dubickas@mif.vu.lt

Apie šios olimpiados, vykusios 2000 metais, rezultatus jau rašyta žurnalo „Alfa plius omega" 2000 metų antrajame numeryje. Šiame straipsnyje nagrinėjame olimpiados uždavinius. Būsimiesiems olimpiadų dalyviams tai turėtų būti įdomu.

Uždavinių sąlygos

1. Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti reiškinys

$$(1 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{1999} - x_{2000})^2 + x_{2000}^2,$$

kai $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ yra realieji skaičiai?

2. Ar gali reiškinys

$$\left(1 + \frac{1}{a_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n^2}\right)$$

įgyti sveikąją reikšmę, kai $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yra skirtingi, didesni už 1 natūralieji skaičiai?

3. Išspręskite lygtį $\sqrt{-3x^2 + 18x + 37} + \sqrt{-5x^2 + 30x - 41} = \sqrt{x^2 - 6x + 109}$.

4. Įrodykite, kad $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, jei x, y, z yra realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $x + y + z = 0$.

5. Raskite visas parametro a reikšmes, su kuriomis lygčių sistema

$$\begin{cases} ax^2 + 2y = a + 2, \\ 2ax^2 + (a + 1)y = 2a + 4 \end{cases}$$

neturi sprendinių.

6. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 11, \\ r^2 - 2n^2 = 1 \end{cases}$$

neturi sveikųjų sprendinių.

7. Įrodykite, kad lygtis $m^n + m^r = m^{2000s}$

a) turi bent vieną natūralųjį sprendinį (m, n, r, s);

b) turi be galo daug natūraliųjų sprendinių.

c) Raskite visus šios lygties natūraliuosius sprendinius.

8. Tegul $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2000} = 1$. Įrodykite, kad

$$\left(1998 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1998 + \frac{1}{x_2}\right) \cdots \left(1998 + \frac{1}{x_{2000}}\right) \geqslant 3998^{2000}.$$

9. Teigiamų realiųjų skaičių pora (x, y) tenkina sąlygas: $y > x$, $x^3 + 1 = 3x$ ir $y^3 + 1 = 3y$. Įrodykite, kad $y = \sqrt{x + 2}$.

10. Natūralųjį skaičių n vadiname *išskaidomuoju*, jei egzistuoja tokie natūralieji skaičiai m ir d, kad

$$n = \frac{m+1}{d+1} + \frac{m+2}{d+2}.$$

a) Raskite bent vieną neišskaidomą natūralųjį skaičių, didesnį už 1000.

b) Įrodykite, kad bent 1922 aibės $\{1, 2, 3, \dots, 2000\}$ skaičiai yra išskaidomi.

11. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys $(5n^2 + 6)/(n + 2)$ taip pat įgyja natūraliąsias reikšmes.

12. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis abu skaičiai $n + 1$ ir $16n + 1$ yra sveikųjų skaičių kvadratai.

13. Raskite visas funkcijas $f(x)$, $x > 0$, tenkinančias sąlygą $f(x^{2000}) = 5f(x^{-2000}) + \sin x$.

14. Du žaidėjai pakaitomis reiškinyje

$$(*)8^8 + (*)8^7 + (*)8^6 + (*)8^5 + (*)8^4 + (*)8^3 + (*)8^2 + (*)8$$

vieną žvaigždutę pakeičia skaičiumi 3 arba -3. Įrodykite, jog antrasis žaidėjas, kad ir ką darytų pirmasis, visada gali pasiekti, kad (po 8 ėjimų) gautasis skaičius dalytųsi iš 13.

15. Ar egzistuoja toks realiųjų skaičių trejetas (a, b, c), kad lygybė

$$(x + a)^2 + (2x + b)^2 + (2x + c)^2 = (3x + 1)^2$$

būtų teisinga su bet kokiu realiuoju skaičiumi x?

16. Skritulio formos pica dviem statmenais pjūviais padalijama į keturias dalis. Jonas paėmė didžiausią ir mažiausią picos dalis, o Marytei atiteko dvi likusios. Ar gali Marytei atitekti daugiau picos negu Jonui?

17. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 13$, $BC = 15$ ir $AC = 14$. Tegul BH yra kampo B aukštinė, o BM — pusiaukampinė. Raskite trikampio BHM plotą.

18. Trikampio ABC pusiaukampinės AD ir CE kertasi taške F. Raskite kampo B didumą, jei taškai B, D, E, F sudaro keturkampį, apie kurį galima apibrėžti apskritimą.

19. Dviejų panašių trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ po dvi kraštines sutampa: $AB = A_1B_1$ ir $AC = A_1C_1$. Ar būtinai sutampa jų trečiosios kraštinės BC ir B_1C_1?

20. Ar galima kubą $1 \times 1 \times 1$ suvynioti į kvadratinį popieriaus lapą 3×3?

Komentarai, nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. Pažymėkime $1 - x_1 = y_1$, $x_1 - x_2 = y_2$, $\dots$, $x_{n-2} - x_{n-1} = y_{n-1}$, $x_{n-1} = y_n$. Sudėję k pirmųjų lygybių, gauname:

$$1 - x_k = y_1 + y_2 + \dots + y_k, \quad \text{kai } k \leqslant n - 1,$$
$$1 = y_1 + y_2 + \dots + y_n, \quad \text{kai } k = n.$$

Vadinasi, $x_k = 1 - y_1 - y_2 - \dots - y_k$. Turime rasti mažiausią reiškinio

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$$

įgyjamą reikšmę, kai $y_1+y_2+\dots+y_n=1$. Įrodysime, kad ji yra pasiekiama, kai $y_1=y_2=\dots=y_n=1/n$ (t. y. $x_1=(n-1)/n, x_2=(n-2)/n,\dots,x_{n-1}=1/n$) ir todėl ji yra lygi $1/n$, t. y. $1/2001$, kai $n=2001$.

1 būdas. Reiškinys

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(y_i-y_j)^2$$

yra lygus

$$(n-1)(y_1^2+\dots+y_n^2)-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j.$$

Kadangi

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j=(y_1+\dots+y_n)^2-(y_1^2+\dots+y_n^2),$$

gauname tapatybę

$$n(y_1^2+\dots+y_n^2)-(y_1+\dots+y_n)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(y_1-y_j)^2.$$

Jos dešinioji pusė yra neneigiamas skaičius, kuris lygus nuliui tada ir tik tada, kai $y_1=y_2==\dots=y_n$. Vadinasi,

$$y_1^2+\dots+y_n^2\geqslant\frac{1}{n}(y_1+\dots+y_n)^2=\frac{1}{n}.$$

Lygybę čia gauname tada ir tik tada, kai visi y_k yra lygūs. Kadangi jų suma lygi 1, tai visi y_k yra lygūs $1/n$.

2 būdas. Pirmasis būdas gali atrodyti labai formalus. Mažiausią reikšmę galima nesunkiai rasti priešingos prielaidos metodu. Tarkime, egzistuoja tokie $y_1,y_2,\dots,y_n$, kad jų suma yra lygi 1, o kvadratų suma pasiekia mažesnę negu $1/n$ reikšmę, kai $y_k\neq y_s$. (Jei visi y_k būtų lygūs, tai kvadratų sumos reikšmė būtų lygi $1/n$.) Pakeiskime y_k į $(y_k+y_s)/2$ ir y_s į $(y_k+y_s)/2$. Sumos $y_1+\dots+y_n$ reikšmė nepakis: ji bus lygi 1. O kvadratų suma dar labiau sumažės, nes

$$y_k^2+y_s^2-2\Big(\frac{y_k+y_s}{2}\Big)^2=\frac{1}{2}(y_k-y_s)^2>0,$$

todėl

$$\Big(\frac{y_k+y_s}{2}\Big)^2+\Big(\frac{y_k+y_s}{2}\Big)^2<y_k^2+y_s^2.$$

Vadinasi, mažiausioje kvadratų sumoje (jei tokia egzistuoja!) visi y_k yra lygūs (jei bent du nelygūs, tai tik ką įrodėme, kad egzistuoja dar mažesnė reikšmė). Egzistavimą čia būtų galima įrodyti pereinant prie ribos, tačiau griežto įrodymo čia nepateiksime.

Atsakymas. 1/2001.

2. Kadangi kiekvienas daugiklis reiškinyje yra didesnis už 1, tai ir pats reiškinys, kad ir kokie būtų teigiami skaičiai $a_1,a_2,\dots,a_n$, yra didesnis už 1. Kita vertus, reiškinys didžiausią reikšmę įgyja, kai $a_1,a_2,\dots,a_n$ yra mažiausi skaičiai, tenkinantys uždavinio sąlygą. Todėl reiškinio reikšmė negali būti didesnė už

$$r_n=\Big(1+\frac{1}{2^2}\Big)\Big(1+\frac{1}{3^2}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{(n+1)^2}\Big).$$

Įrodysime, kad su visais natūraliaisiais n ši reikšmė yra mažesnė už 2. Kadangi tarp 1 ir 2 nėra natūraliųjų skaičių, iš čia išplauktų, jog tas reiškinys sveikosios reikšmės įgyti negali.

1 būdas. Sumažinę vardiklius, reikšmę r_n padidinsime:

$$r_n < \left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right) = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdots\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1}.$$

Čia skaitiklis yra lygus $((n+1)!)^2$, o vardiklis —

$$(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\cdots(n+1-1)(n+1+1) = \frac{1}{2}n!(n+2)!$$

Skaitiklio ir vardiklio santykis

$$\frac{2(n+1)!^2}{n!(n+2)!} = \frac{2(n+1)}{n+2} = 2-\frac{2}{n+2}.$$

Jis yra mažesnis už 2. Tai ir reikėjo įrodyti.

2 būdas. Logaritmuokime:

$$\log r_n = \log\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Čia log arba ln (kaip dažnai žymima mokykloje) pagrindas yra e. Iš nelygybės $\log(1+x) < x$ (kurią galima įrodyti apskaičiavus pirmąją išvestinę) išplaukia

$$\log r_n < \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Neprarasdami bendrumo, laikykime $n \geqslant 4$. Tada

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2} < \\
&< \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1} < \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4} = \frac{97}{144}.
\end{aligned}$$

Vadinasi, $r_n < e^{97/144} = 1{,}96\ldots < 2$. Sumą

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}$$

galima įvertinti iš viršaus begaline suma $\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k^2}$. Tokia suma pagal visus natūraliuosius $k \geqslant 1$ yra lygi Rymano dzeta funkcijos reikšmei $\zeta(2)$. Pastaroji yra lygi $\pi^2/6$. Taigi tikslus sumos įvertis būtų $r_n < e^{\pi^2/6-1} = 1{,}905\ldots$

Atsakymas. Negali.

3. Pažymėkime $t = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. Tada:

$$-3x^2 + 18x + 37 = 64 - 3t, \qquad -5x^2 + 30x - 41 = 4 - 5t, \qquad x^2 - 6x + 109 = 100 + t.$$

Turime lygtį $\sqrt{64-3t} + \sqrt{4-5t} = \sqrt{100+t}$; čia $t = (x-3)^2 \geqslant 0$. Įrodysime, kad ją tenkina vienintelė reikšmė $t = 0$, kurią atitinka vienintelė reikšmė $x = 3$.

1 būdas. Kadangi $t \geqslant 0$, tai $\sqrt{64-3t} \leqslant \sqrt{64} = 8$, $\sqrt{4-5t} \leqslant \sqrt{4} = 2$ ir todėl kairioji lygties pusė neviršija 10. Dešinioji pusė $\sqrt{100+t} \geqslant \sqrt{100} = 10$, todėl ji lygi kairiajai tada ir tik tada, kai $t = 0$.

2 būdas. Keldami kvadratu, gauname:

$$68 - 8t + \sqrt{(64-3t)(4-5t)} = 100 + t, \qquad 2\sqrt{256 - 332t + 15t^2} = 32 - 9t,$$
$$1024 - 1328t + 60t^2 = 1024 - 576t + 81t^2, \qquad 752t + 21t^2 = 0.$$

Ši lygtis turi tik vieną neneigiamą sprendinį $t = 0$, kuris tenkina ir pradinę lygtį.

Atsakymas. $x = 3$.

4. *1 būdas*. Kadangi $z = -(x+y)$, tai

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 - (x+y)^3 = -3xy^2 - 3x^2y = -3xy(x+y) = 3xyz.$$

2 būdas. Iš tapatybės

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

išplaukia, kad dešinioji pusė yra lygi 0, kai $x + y + z = 0$.

3 būdas. Keliame kubu:

$$0 = (x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x+y) + 3xz(x+z) + 3yz(y+z) + 6xyz =$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 3xyz - 3xyz + 6xyz = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

4 būdas. Keliame kubu lygybę $z = -(x+y)$:

$$z^3 = -x^3 - y^3 - 3xy(x+y) = -x^3 - y^3 + 3xyz.$$

5. *1 būdas*. Iš pirmosios lygties gautą lygybę $y = (a + 2 - ax^2)/2$ įstatę į antrąją lygtį, gauname

$$2ax^2 + \frac{a+1}{2}(a + 2 - ax^2) = 2a + 4.$$

Dauginame abi puses iš 2:

$$4ax^2 + (a+1)(a+2) - a(a+1)x^2 = 4a + 8, \qquad (3a - a^2)x^2 + a^2 - a - 6 = 0,$$
$$a(3-a)x^2 + (a+2)(a-3) = 0, \qquad (3-a)(ax^2 - a - 2) = 0.$$

Jei $a = 3$, tai imdami bet kokį x, o $y = (5 - 3x^2)/2$, gauname lygties sprendinį.
Jei $a = 0$, gauname lygybę $-6 = 0$ — prieštarą. Sistema sprendinių neturi.
Jei $a \neq 0$ ir $a \neq 3$, tai $x^2 = 1 + 2/a$. Ši lygtis turi sprendinį tada ir tik tada, kai $1 + 2/a \geqslant 0$. Tada ir sistema turi sprendinį, imant $y = (a + 2 - ax^2)/2$. Lygtis $x^2 = 1 + 2/a$ neturi sprendinių, jei $1 + 2/a < 0$. Akivaizdu, kad nėra teigiamų a reikšmių, su kuriomis ši

nelygybė būtų teisinga. Jei a yra neigiamas skaičius, dauginame abi nelygybės puses iš teigiamo skaičiaus $-a$. Gauname $-a-2<0$, t. y. $a>-2$. Vadinasi, nelygybės $1+2/a<0$ sprendinių aibė yra intervalas $(-2;0)$. Todėl lygčių sistema neturi sprendinių tada ir tik tada, kai $-2<a<0$ arba $a=0$, t. y. kai a priklauso intervalui $(-2;0]$.

2 būdas. Iš antrosios lygties atimkime pirmąją, padaugintą iš 2. Gauname $(a-3)y=0$. Vadinasi, $a=3$ arba $y=0$.
Pirmuoju atveju, kai $a=3$, lygčių sistema turi sprendinį, pavyzdžiui, $x=y=1$.
Antruoju atveju, kai $y=0$, lygčių sistema neturi sprendinių, jei lygtis $ax^2=a+2$ neturi sprendinių. Aišku, kad ši lygtis neturi sprendinių, kai $a=0$. Jei $a\neq 0$, ji neturi sprendinių, kai $1+2/a<0$. Ši nelygybė, kaip jau įrodėme pirmuoju būdu, yra teisinga, kai $-2<a<0$. Vadinasi, lygčių sistema neturi sprendinių, kai $-2<a\leqslant 0$.

Atsakymas. $-2<a\leqslant 0$.

6. *1 būdas.* Iš pirmosios lygties $11=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$ išplaukia, kad m ir n tenkina nors vieną iš keturių lygčių sistemų:

$$m-n=1,\qquad m+n=11, \tag{1}$$
$$m-n=11,\qquad m+n=1, \tag{2}$$
$$m-n=-1,\qquad m+n=-11, \tag{3}$$
$$m-n=-11,\qquad m+n=-1. \tag{4}$$

Visos jos turi po vieną sprendinį: $m=6$, $n=5$; $m=6$, $n=-5$; $m=-6$, $n=-5$; $m=-6$, $n=5$. Visais atvejais $n=5$ arba $n=-5$, todėl $n^2=25$. Iš antrosios lygties gauname $r^2=51$. Tokio sveikojo skaičiaus r nėra ($7^2<51$, o $8^2>51$), todėl lygčių sistema sprendinių neturi.

2 būdas. Kadangi r yra nelyginis skaičius, tai $r-1$ ir $r+1$ abu yra lyginiai. Todėl $2n^2=r^2-1=(r-1)(r+1)$ dalijasi iš 4. Vadinasi, n — lyginis. Iš pirmosios lygties matome, kad tada m yra nelyginis skaičius. Todėl $11=m^2-n^2=(2m_1+1)^2-(2n_1)^2=4m_1^2+4m_1-4n_1^2+1=4k+1$; čia m_1, n_1 ir k yra sveikieji skaičiai. Tačiau lygybė $10=4k$ yra negalima, nes k yra sveikasis skaičius. Prieštara.

Atsakymas. $\varnothing$.

7. *1 būdas.* Jei $m=1$, tai kairioji lygties pusė yra lygi 2, o dešinioji — 1. Gauname prieštarą. Vadinasi, $m\geqslant 2$. Kadangi n ir r įeina į lygtį simetriškai vienas kito atžvilgiu, neprarasdami bendrumo, galime laikyti $n\leqslant r$. Turime $m^{2000s}=m^n+m^r\leqslant 2m^r\leqslant m^{r+1}$, todėl $2000s\leqslant r+1$. Lygybė čia galima tik tuo atveju, kai $n=r$ ir $m=2$. Iš nelygybės $m^r<m^{2000s}$ išplaukia $r<2000s$. Kadangi s ir r yra natūralieji skaičiai, tai $r=2000s-1$. Lygties sprendiniai yra $(m,n,r,s)=(2,2000t-1,2000t-1,t)$; čia t — natūralusis skaičius.

2 būdas. Vėl laikykime $n\leqslant r$. Padaliję lygtį iš m^n, gauname: $m^{2000s-n}=1+m^{r-n}$, $m^{r-n}(m^{2000s-r}-1)=1$. Jei $m=1$, lygtis sprendinių neturi, nes kairioji pusė lygi nuliui. Jei $m\geqslant 2$, naudodamiesi nelygybe $r<2000s$, gauname $m^{r-n}=m^{2000s-r}-1=1$. Vadinasi, $r=n$ ir $2000s-r=1$. Iš čia lengvai gauname visų sprendinių aibę.

Atsakymas. $(m,n,r,s)=(2,2000t-1,2000t-1,t)$,
čia t — natūralusis skaičius.

8. Tegul $n=2000$. Įrodysime nelygybę

$$\left(n-2+\frac{1}{x_1}\right)\left(n-2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(n-2+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant(2n-2)^n;$$

čia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.
1 būdas. Į Minkovskio nelygybę

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1\cdots b_n},$$

kuri teisinga su visais neneigiamais skaičiais $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, įstatykime

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = n-2,$$
$$b_1 = \frac{1}{x_1}, \quad \ldots, \quad b_n = \frac{1}{x_n}.$$

Gausime nelygybę

$$\sqrt[n]{\Bigl(n-2+\frac{1}{x_1}\Bigr)\cdots\Bigl(n-2+\frac{1}{x_n}\Bigr)} \geqslant \sqrt[n]{(n-2)^n} + \Bigl(\frac{1}{x_1\cdots x_n}\Bigr)^{1/n} = n-2+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}.$$

Pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdots x_n},$$

gauname $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leqslant 1/n$. Todėl

$$n-2+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}} \geqslant n-2+n = 2n-2$$

ir pakėlus n-uoju laipsniu

$$\Bigl(n-2+\frac{1}{x_1}\Bigr)\cdots\Bigl(n-2+\frac{1}{x_n}\Bigr) \geqslant (2n-2)^n.$$

2 būdas. Tegul $1 \leqslant k \leqslant n$. Rašome

$$n-2+\frac{1}{x_k} = \frac{(n-2)x_k+1}{x_k} = \frac{x_1+\cdots+x_{k-1}+(n-1)x_k+x_{k+1}+\cdots+x_n}{x_k}.$$

Kadangi $(n-1)x_k$ yra lygus $(n-1)$ elemento x_k sumai, tai, pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę, gauname

$$\frac{x_1+\cdots+x_{k-1}+(n-1)x_k+x_{k+1}+\cdots+x_n}{2n-2} \geqslant \sqrt[2n-2]{x_1\cdots x_{k-1}x_k^{n-1}x_{k+1}\cdots x_n}.$$

Todėl

$$n-2+\frac{1}{x_k} \geqslant (2n-2)\sqrt[2n-2]{x_1\cdots x_{k-1}x_k^{1-n}x_{k+1}\cdots x_n}.$$

Sudauginę tokias nelygybes su $k = 1, 2, \ldots, n$ gausime

$$\Bigl(n-2+\frac{1}{x_1}\Bigr)\cdots\Bigl(n-2+\frac{1}{x_n}\Bigr) \geqslant (2n-2)^n.$$

9. *1 būdas.* Pažymėkime $f(t) = t^3 - 3t + 1$. Kadangi $f(-2) = -1$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$, tai lygtis $f(t) = 0$ turi tris realiuosius sprendinius intervaluose

$(-2;-1)$, $(0;1)$ ir $(1;2)$. Pažymėkime juos atitinkamai z, x ir y. Pastebėkime, jei u yra lygties $f(t)=0$ sprendinys, tai ir u^2-2 yra tos lygties sprendinys. Iš tiesų

$$f(u^2-2)=(u^2-2)^3-3(u^2-2)+1=u^6-6u^4+9u^2-1=$$
$$=(u^3-3u)^2-1=(u^3-3u-1)(u^3-3u+1)=f(u)\big(f(u)+2\big),$$

todėl iš $f(u)=0$ išplaukia $f(u^2-2)=0$. Taigi aibės $\{x^2-2, y^2-2, z^2-2\}$ ir $\{x, y, z\}$ sutampa. Aišku, kad $y^2-2\neq y$, nes $0<y<1$. Taigi $y^2-2=z$ arba $y^2-2=x$. Pakanka įrodyti, kad pirmojo atvejo negali būti. Jei $y^2-2=z$, tai z^2-2 yra lygu y arba x. Jei $z^2-2=y$, tai $x^2-2=x$, kas neįmanoma, nes $x<1$. Taigi $z^2-2=x$, todėl $x^2-2=y$. Lygybė $x^2=2+y$ yra negalima, nes jos karioji pusė yra mažesnė už 1, o dešinioji didesnė už 3. Įrodėme, kad $y^2-2=x$, todėl $y=\sqrt{x+2}$.

2 būdas. Lygtį $x^3+1=3x$, kur $0<x<1$, perrašome tokiu pavidalu $1=(1-x)^2(x+2)$. Todėl $1=(1-x)\sqrt{x+2}$, t. y. $\big(\sqrt{x+2}\big)^3+1=3\sqrt{x+2}$. Taigi $\sqrt{x+2}$ tenkina lygtį ir yra teigiamas skaičius, didesnis už 1. Tarp lygties trijų sprendinių toks skaičius yra tik y. Todėl $\sqrt{x+2}=y$.

3 būdas. Įrodysime, kad lygties $t^3+1=3t$ sprendiniai yra $2\sin 10°$, $2\sin 50°$ ir $-2\sin 70°$. Iš tiesų, kadangi

$$(\sin\alpha)^3=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4},$$

tai įrašę pirmąją reikšmę į lygtį, gauname $3t-t^3=6\sin 10°-6\sin 10°+2\sin 30°=2\sin 30°=1$. Įrašę antrąją reikšmę, gauname $3t-t^3=6\sin 50°-6\sin 50°+2\sin 150°=2\sin 30°=1$. Įrašome trečiąją reikšmę: $3t-t^3=-6\sin 70°+6\sin 70°-2\sin 210°=2\sin 30°=1$. Kadangi $0<x<y$, tai $x=2\sin 10°$, o $y=2\sin 50°$. Tada

$$y^2-x=4\sin^2 50°-2\sin 10°=2(1-\cos 100°)-2\sin 10°=2+2\sin 10°-2\sin 10°=2$$

ir $y=\sqrt{x+2}$.

10. *1 būdas.* Pastebėkime, kad

$$n-2=\frac{m-d}{d+1}+\frac{m-d}{d+2}=\frac{(m-d)(2d+3)}{(d+1)(d+2)}.$$

Skaičiai $2d+3$ ir $d+1$ yra tarpusavyje pirminiai. Jei s būtų jų bendrasis daliklis, tai s dalytų $2d+3-2(d+1)=1$, t. y. $s=1$. Analogiškai, $2d+3$ ir $d+2$ neturi bendrų daliklių. Vadinasi, $m-d$ dalijasi iš $(d+1)(d+2)$ be liekanos. Tai reiškia, kad egzistuoja toks sveikasis skaičius k, kad $m=d+k(d+1)(d+2)$. Aišku, kad k yra neneigiamas, nes $m>0$. Jei $k=0$, tai $m=d$, skaičius $n=2$ yra išskaidomas. Tegul $k>0$. Tada $n-2=k(2d+3)$. Skaičius $n>2$ yra išskaidomas tada ir tik tada, kai $n-2$ dalijasi iš nelyginio skaičiaus, didesnio arba lygaus 5. Vadinasi, skaičius n yra neišskaidomas, jei jis gali būti užrašytas kaip $2+2^r$ arba $2+3\cdot 2^r$; čia r yra neneigiamas sveikasis skaičius. Pavyzdžiui, skaičius $2+2^{10}=1026$ yra neišskaidomas. Tai a) dalies atsakymas. Iš viso tarp pirmųjų N (kai $N\geqslant 5$) yra $1+[\log_2(N-2)]$ skaičių pavidalo $2+2^r$. Tarp jų yra $1+[\log_2(N-2)/3]$ skaičių pavidalo $2+3\cdot 2^r$. (Čia [...] žymi sveikąją dalį.) Iš viso yra $N-2-[\log_2(N-2)]-[\log_2(N-2)/3]$ išskaidomų skaičių. Kai $N=2000$, gauname

$$1998-[\log_2 1998]-[\log_2(1998/3)]=1998-10-9=1979.$$

Kadangi $1979 > 1922$, tai įrodo b) dalį.

2 būdas. Pažymėkime $m+1=u$, $d+1=v$. Tada

$$n=\frac{u}{v}+\frac{u+1}{v+1}.$$

Imdami $u=v^2+2v$, gauname $n=2v+3$. Todėl kiekvienas nelyginis skaičius, didesnis už 5, yra išskaidomas (čia $v\geqslant 2$). Tegul $n=2l$; čia l yra natūralusis skaičius. Iš lygties

$$2l=\frac{u}{v}+\frac{u+1}{v+1}$$

gauname

$$u-v=\frac{2v(v+1)}{2v+1}(l-1).$$

Kadangi $2v(v+1)$ ir $2v+1$ neturi bendrų daugiklių, tai $l-1$ dalijasi iš $2v+1$ ($v\geqslant 2$). Tai bus neįmanoma, kai $l-1=2^r$ arba $l-1=3\cdot 2^r$. Vadinasi, n yra neišskaidomas, kai $n=2+2^{r+1}$ arba $n=2+3\cdot 2^{r+1}$. Norint rasti visus neišskaidomus skaičius, čia dar reikėtų patikrinti $n=3$ ir $n=5$.

Atsakymas. Skaičius 1026 yra neišskaidomas. Iš viso yra 1979 neišskaidomi skaičiai.

11. *1 būdas.* Pažymėkime $n+2=m\geqslant 3$. Tada

$$\frac{5(m-2)^2+6}{m}=\frac{5m^2-20m+26}{m}=5m-20+\frac{26}{m}.$$

Todėl m dalija 26. Kadangi $m\geqslant 3$, galimi du atvejai: $m=13$, $m=26$ ir atitinkamai $n=11$, $n=24$.

2 būdas. Dalydami $5n^2+6$ iš $n+2$ „kampu“, gauname $5n^2+6=(5n-10)(n+2)+26$. Vadinasi, 26 dalijasi iš $n+2$. Iš lygčių $n+2=1$, $n+2=13$, $n+2=26$ gauname du *natūraliuosius* sprendinius: $n=11$ ir $n=24$.

Atsakymas. $n=11$ ir 24.

12. Tarkime, kad $n+1=m^2$ ir $16n+1=d^2$. Tada $16m^2-d^2=15$.

1 būdas. Išskaidome $16m^2-d^2$ kaip kvadratų skirtumą: $(4m-d)(4m+d)=15$; čia $4m+d>5$, nes $m,d>1$. Galimas vienintelis atvejis: $4m-d=1$, $4m+d=15$. Taigi $m=2$, $d=7$ ir $n=3$.

2 būdas. Iš lygties $16m^2-d^2=15$ aišku, kad $d<4m$. Jei $d=4m-1$, tai $15=16m^2-(4m-1)^2=8m-1$, todėl $m=2$ ir $n=3$. Jei $d=4m-2$, tai lygtis $15=16m^2-(4m-2)^2=16m-4$ sprendinių neturi. Jei $d\leqslant 4m-3$, tai $d^2+15\leqslant 16m^2-24m+24\leqslant 16m^2$. Lygybė galima, tik kai $m=1$. Tačiau tada $n=0$ nėra natūralusis skaičius.

Atsakymas. $n=3$.

13. Lygtyje $f(x^{2000})=5f(x^{-2000})+\sin x$ pakeičiame $x\to 1/x$. Gauname

$$f(x^{-2000})=5f(x^{2000})+\sin(1/x).$$

Prie pirmos lygties pridedame antrąją, padaugintą iš 5:

$$f(x^{2000})=\sin x+25f(x^{2000})+5\sin(1/x).$$

Iš čia gauname

$$f(x^{2000}) = -\frac{\sin x + 5\sin(1/x)}{24}.$$

Pakeitę x į $x^{1/2000}$, gauname

$$f(x) = -\frac{\sin(x^{1/2000}) + 5\sin(x^{-1/2000})}{24}.$$

Atsakymas. Vienintelė funkcija $-\frac{1}{24}(\sin(x^{1/2000}) + 5\sin(x^{-1/2000}))$.

14. *1 būdas.* Pastebėkime, kad skaičiai $8^8 - 8^4$, $8^7 - 8^3$, $8^6 - 8^2$, $8^5 - 8$ dalijasi iš 13. Suskirstome skaičius į 4 poras: $\{8^8, 8^4\}$, $\{8^7, 8^3\}$, $\{8^6, 8^2\}$, $\{8^5, 8\}$. Pirmajam žaidėjui parašius prie kokios nors poros vieno skaičiaus koeficientą 3 arba -3, antrasis prie kito tos pačios poros skaičiaus rašo atitinkamai -3 arba 3. Gautasis skaičius dalysis iš 13.

2 būdas. Kadangi 8^2+1 dalijasi iš 16, suskirstome poromis $\{8^8, 8^6\}$, $\{8^7, 8^5\}$, $\{8^4, 8^2\}$, $\{8^3, 8\}$. Dabar antrasis gali toje pačioje poroje įrašyti tokį pat ženklą. Po 8 žingsnių visų porų sumos $\pm 3(8^8 + 8^6)$, $\pm 3(8^7 + 8^5)$, $\pm 3(8^4 + 8^2)$ ir $\pm 3(8^3 + 8)$ dalijasi iš 13, todėl ir gautasis skaičius dalijasi iš 13.

15. *1 būdas.* Tarkime, kad toks trejetas egzistuoja. Lygybė yra teisinga su visais realiaisiais x, todėl ji teisinga ir su $x = -1/3$. Tačiau

$$\left(-\frac{1}{3} + a\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + b\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + c\right)^2 = 0$$

tada ir tik tada, kai $a = 1/3$, $b = c = 2/3$. Įrašę šį trejetą, tikrai gauname tapatybę

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(2x + \frac{2}{3}\right)^2 = (1 + 4 + 4)\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = (3x + 1)^2,$$

todėl $(a, b, c) = (1/3, 2/3, 2/3)$ yra vienintelis ieškomas trejetas.

2 būdas. Sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2a + 4b + 4c = 6, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1. \end{cases}$$

Įrašę $a = 3 - 2b - 2c$ į antrąją lygtį, gauname

$$b^2 + c^2 = 1 - (3 - 2b - 2c)^2 = (4 - 2b - 2c)(2b + 2c - 2).$$

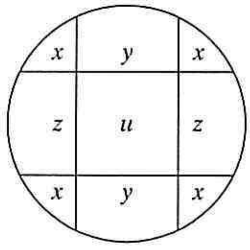
Pažymėkime $d = b + c$. Tada:

$$d^2 - 2bc = (4 - 2d)(2d - 2) = -4d^2 + 12d - 8,$$
$$10d^2 - 24d + 16 = 4bc, \quad (3d - 4)^2 + d^2 - 4bc = 0.$$

Tačiau $d^2 = (b + c)^2 \geqslant 4bc$, todėl lygybė galima tik tada, kai $3d = 4$ ir $d^2 = 4bc$. Iš čia gauname sprendinį $a = 1/3$, $b = c = 2/3$. Tikrinti nereikia, nes sudarytos sistemos sprendiniai tenkina lygtį su visais realiaisiais x.

Atsakymas. $a = 1/3$, $b = c = 2/3$.

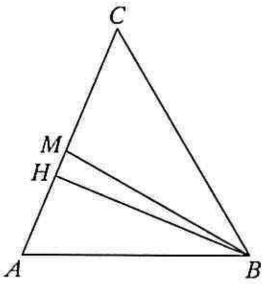
16. Įsivaizduokime dar du simetriškus pjūvius:



Keturios dalys yra x, $x+z$, $x+y$ ir $x+y+x+u$. Jonui atiteko $x+x+y+z+u = 2x+y+z+u$, o Marytei $x+z+x+y = 2x+y+z$. Čia visi skaičiai yra neneigiami, todėl Jonui picos atiteko ne mažiau negu Marytei.

Atsakymas. Negali.

17. Kadangi $AB < BC$, tai $AH < HC$. Todėl taškas M yra atkarpoje HC.



1 būdas. Trikampio pusperimetris yra

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21,$$

o plotas

$$S = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84.$$

Kita vertus, $S = AC \cdot BH/2$, todėl $BH = 12$. Naudojantis Pitagoro formule,

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Pagal pusiaukampinės savybę

$$\frac{13}{5+HM} = \frac{15}{9-HM},$$

todėl $HM = 1{,}5$. Trikampio BHM plotas yra

$$\frac{BH\cdot HM}{2} = \frac{12\cdot 1{,}5}{2} = 9.$$

2 būdas. Pažymėkime $AM = x$. Kadangi

$$\frac{BC}{CM} = \frac{AB}{AM},$$

iš lygties

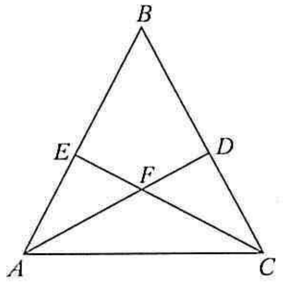
$$\frac{15}{14-x} = \frac{13}{x}$$

gauname $x = 6{,}5$. Tegul $AH = y$. Tada $BH^2 = 13^2 - y^2 = 15^2 - (14 - y)^2$, todėl $y = 5$. Vadinasi, $BH = 12$, o $HM = AM - AH = 6{,}5 - 5 = 1{,}5$. Trikampio BHM plotas yra lygus

$$\frac{BH \cdot HM}{2} = 9.$$

Atsakymas. 9.

18. *1 būdas*. Tegul $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.



Kadangi $\beta + \angle AFC = 180°$;
čia

$$\angle AFC = 180° - \frac{\alpha + \gamma}{2} = 180° - \frac{180° - \beta}{2} = 90° + \frac{\beta}{2},$$

todėl

$$\frac{3\beta}{2} + 90° = 180°.$$

Gauname $\beta = 60°$.

2 būdas. Kampai $\angle AEC = 180° - \alpha - \gamma/2$ ir $\angle APB = 180° - \beta - \alpha/2$ yra lygūs, todėl $\alpha + \gamma/2 = \beta + \alpha/2$, t. y. $\alpha + \gamma = 2\beta$. Kadangi $\alpha + \beta + \gamma = 3\beta = 180°$, tai $\beta = 60°$.

Atsakymas. 60°.

19. Trikampių, kurių kraštinės yra $1, a, a^2$ ir a, a^2, a^3, po dvi kraštines sutampa ir jie yra panašūs. Tačiau tų trikampių trečiosios kraštinės 1 ir a^3 nėra lygios, kai $a > 1$. Pakanka įrodyti, kad yra toks $a > 1$, kad egzistuoja trikampiai, kurių kraštinės $1, a, a^2$ ir a, a^2, a^3. Taip bus, jei $a^2 < 1 + a$, t. y. jei $1 < a < (1 + \sqrt{5})/2$.

Atsakymas. Nebūtinai.

20. Suvynioti negalima, nes kelio $ABCDA$ ilgis yra lygus $1 + \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$, o ilgiausios popieriaus lapo vietos, t. y. jo įstrižainės, ilgis yra $3\sqrt{2}$ — mažiau kaip $2 + 2\sqrt{2}$.

Atsakymas. Negalima.