$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 3, 48–50

Lyginiai, nelyginiai skaičiai

Leonas Narkevičius

Straipsnyje pateikiama galvosūkių ir uždavinių, kuriuos išspręsti galima išradingai pasinaudojus lyginių ir nelyginių skaičių savybėmis.

Dažnai sprendžiant uždavinius pakanka panagrinėti, kokie skaičiai — lyginiai ar nelyginiai gaunami atlikus tam tikrus veiksmus ar pertvarkymus. Paprastai, jei dviejų reiškinių lyginumas nesutampa (vienas iš jų lyginis, o kitas nelyginis), daroma išvada, kad kuris nors laukiamas rezultatas yra negalimas. Kituose uždaviniuose lyginumas taip pat padeda padaryti reikiamas išvadas apie sąryšius, po to jau gaunamas sprendinys arba matyti, jog jis vienintelis.

Pirmiausia reikia prisiminti paprasčiausius teiginius apie veiksmus su lyginiais ir nelyginiais skaičiais:

- sudėję du nelyginius skaičius, gauname lyginį skaičių;
- sudėję lyginį skaičių su nelyginiu, gauname nelyginį skaičių;
- sudauginę du nelyginius skaičius, gauname nelyginį skaičių;
- sudauginę lyginį skaičių su nelyginiu, gauname lyginį skaičių.

1 pavyzdys. *Trijų skaičių suma lyginė. Lyginė ar nelyginė yra šių skaičių sandauga?*

Sprendimas. Kadangi trijų skaičių suma lyginė, tai arba visi jie yra lyginiai, arba du nelyginiai ir vienas lyginis. Dauginant skaičius, tarp kurių yra bent vienas lyginis, gauname lyginį skaičių. Atsakymas: sandauga yra lyginis skaičius.

2 pavyzdys. *Ar galima* 31 *akmenuką išdėlioti į* 10 *krūvelių taip, kad kiekvienoje krūvelėje būtų trys, penki arba septyni akmenukai?*

Sprendimas. Kadangi kiekvienoje krūvelėje gali būti nelyginis skaičius akmenukų, o dešimties nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius, tai taip išdėlioti akmenukų negalima.

3 pavyzdys. *Sąsiuvinyje yra parašytas* 2001 *natūralusis skaičius. Ar galima taip užbraukti vieną iš šių skaičių, kad likusių skaičių suma būtų lyginė?*

Sprendimas. 1) Sakykime, kad surašyti skaičiai yra to paties lyginumo. Nubraukę bet kurį iš jų, gauname 2000 tik lyginių arba tik nelyginių skaičių. Šių skaičių suma būtinai bus lyginė. 2) Sakykime, kad surašyti skaičiai yra ir lyginiai, ir nelyginiai. Tuomet, jei nelyginių skaičių kiekis yra nelyginis skaičius, tai, užbraukus vieną iš jų, suma bus lyginis skaičius. Jei nelyginių skaičių kiekis yra lyginis skaičius, tai, užbraukus lyginį skaičių, suma būtinai bus lyginis skaičius.

Uždaviniai

1. Ratu sustojo 16 moksleivių. Ar galima jiems išdalyti 71 saldainį taip, kad bet kurių šalia stovinčių moksleivių turimų saldainių skaičius skirtųsi vienetu?
2. Dalydami natūralųjį skaičių a iš natūraliojo skaičiaus b, gavome skaičių c ir liekaną d. Ar gali visi skaičiai a, b, c ir d būti nelyginiai?
3. Viename rankraštyje buvo aprašytas miestas, kuriame yra 8 salos. Jos tarpusavyje ir su krantu sujungtos tiltais. Į krantą išeina 5 tiltai; iš 4 salų išeina 4 tiltai; iš 3 salų

eina 3 tiltai ir į vieną salą veda tik vienas tiltas. Ar gali būti taip, kaip parašyta sename rankraštyje?

4. Barsukų šalyje buvo pristeigta tiek komisijų, kad niekas net tiksliai nežinojo, kiek jų yra. Be viso to, vyriausiasis Barsukas kiekvieną dieną į kurią nors komisiją arba paskirdavo vieną naują narį, arba vieną buvusį atleisdavo. Lygiai po metų pasirodė, kad kiekvienoje komisijoje narių skaičius yra vėl toks, koks buvo. Ar galėjo taip būti?
5. Ar egzistuoja tokie natūralieji skaičiai a ir b, kad $ab(a-b) = 45\,045$?
6. Trijų iš eilės einančių skaičių sumą pažymėkime a, o po jų iš eilės einančių trijų skaičių sumą pažymėkime b. Ar gali sandauga ab būti lygi $111\,111\,111$?
7. Kubo viršūnėse yra surašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Kiekvienoje kubo sienoje užrašykime skaičių, esančių jos viršūnėse, sumą. Ar gali būti, kad sienose esančios sumos bus šeši iš eilės einantys skaičiai?
8. Keletas valstiečių turi 128 avis. Jei atsitinka taip, kad kurio nors nuosavybe tampa ne mažiau kaip pusė visų avių, tai likusieji susimoko ir kitą dieną jį apiplėšia, kiekvienas pasiimdamas tiek avių, kiek jis tuo metu turi. Jei du turi po 64 avis, tai apiplėšia kurį nors vieną iš jų. Vieną kartą per keletą dienų įvyko 7 apiplėšimai. Įrodykite, kad po jų visos avys tapo vieno valstiečio nuosavybe.
9. Skaičius $n(n+2)$ baigiasi skaitmeniu 4 (n — natūralusis skaičius). Koks gali būti priešpaskutinis šio skaičiaus skaitmuo?
10. Du broliai turėjo avių bandą. Jie ją pardavė, už kiekvieną avį gaudami tiek litų, kiek bandoje buvo avių. Gautus pinigus jie dalijosi taip: 10 litų vyresniajam broliui, 10 litų jaunesniajam, 10 litų vyresniajam ir t. t. Galiausiai vyresniajam paėmus paskutinę jam priklausančią dešimtinę, jaunesniajam liko mažiau negu 10 litų. Tuomet, kad pelnas būtų padalytas po lygiai, vyresnysis brolis atidavė jaunesniajam peiliuką. Kiek kainavo peiliukas?
11. Ar galima tarp iš eilės surašytų skaičių $1\,2\,3\,4 \ldots 99\,100\,101$ įrašyti „+“ ir „−“ ženklus taip, kad gautume reikšmę, lygią 0?
12. Natūralusis skaičius $n > 5$. Įrodykite, kad skaičių n galima išreikšti pirminio ir sudėtinio skaičių suma.
13. Ar egzistuoja tokie natūralieji skaičiai m ir n, kad būtų teisinga lygybė $2^n + 1 = m^3$?
14. Žinoma, kad n ir n^3+9 yra pirminiai skaičiai. Raskite n.
15. Iškilasis daugiasienis turi n sienų, kurios visos yra trikampiai. Kokia gali būti n reikšmė?

Sprendimai

1. Jei greta stovinčių moksleivių turimų saldainių skaičius skirsis vienetu, tai aštuoni iš jų turės lyginį skaičių saldainių ir aštuoni — nelyginį. Aštuonių lyginių ir aštuonių nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius, todėl 71 saldainio taip išdalyti negalima.
2. Pagal uždavinio sąlygą $a = bc + d$. Tarkime, kad visi keturi skaičiai yra nelyginiai. Tada skaičius bc yra nelyginis. Prie jo pridėję nelyginį skaičių d, gauname lyginį skaičių. O kairėje lygybės pusėje yra nelyginis skaičius a. Gavome prieštarą. Taigi taip būti negali.
3. Pastebėkime, kad tiltų galų skaičius turi būti lyginis, nes kiekvienas tiltas turi du galus. O rankraštyje nurodytų galų skaičius yra $5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 = 31$, t. y. nelyginis skaičius. Gauname prieštarą.
4. Tam, kad narių skaičius taptų toks, koks buvo, reikia, kad pašalinamų ir naujai paskiriamų narių skaičius būtų toks pat, t. y. kad metuose būtų lyginis skaičius dienų. Taigi taip gali atsitikti keliamaisiais metais.
5. Jei skaičiai a ir b abu lyginiai, tai ši lygybė akivaizdžiai negalima. Jei abu skaičiai nelyginiai, tai skirtumas $a - b$ yra lyginis ir sandauga vis tiek lyginė. Jei vienas iš skaičių a ir b lyginis, kitas nelyginis, tai kaip daugiklis jis sandaugą paverčia lygine. Taigi tokie skaičiai neegzistuoja.

6. Kadangi iš viso yra šeši iš eilės einantys skaičiai, tai viename trejete bus du lyginiai skaičiai ir vienas nelyginis, o kitame — vienas lyginis ir du nelyginiai. Taigi viena iš šių sumų bus lyginė, o kita — nelyginė. Lyginio ir nelyginio skaičių sandauga yra lyginė, todėl ji negali būti lygi 111 111 111.
7. Kiekviena kubo viršūnė priklauso trims sienoms, todėl skaičiuojant visą sienų skaičių sumą kiekvienas iš viršūnėse esančių skaičių bus padaugintas iš trijų, t. y. bendra suma bus $3\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8) = 108$. Tarp bet kurių iš eilės einančių skaičių visada bus trys lyginiai ir trys nelyginiai, taigi jų suma bus nelyginis skaičius. Todėl ji negali būti lygi 108.
8. Po pirmojo apiplėšimo visų, išskyrus apiplėštąjį, valstiečių avių skaičius padvigubėjo, taigi jis dalijasi iš 2. Kadangi ir visa suma dalijasi iš 2, tai ir apiplėštojo avių skaičius dalijasi iš 2. Analogiškai po antrojo apiplėšimo kiekvieno valstiečio avių skaičius dalijasi iš 4, po trečiojo iš 8, ..., o po septintojo — iš $2^7 = 128$. Vadinasi, vieno valstiečio nuosavybe tapo 128 avys, o kitų — po 0.
9. *1 būdas.* Ieškomasis skaičius negali būti vienženklis, nes 4 negali būti išreikštas dviejų skaičių, kurie skiriasi 2, sandauga. Taigi šis skaičius yra ne mažesnis kaip dviženklis. Skaičiai n ir $(n+2)$ abu yra vienodo lyginumo, todėl jie abu yra lyginiai. Sandaugos paskutinis skaitmuo 4 galės būti gautas tik tada, kai dauginamieji skaičiai baigsis 4 ir 6. Be to, sandaugos dešimčių ir vienetų skaitmenys priklausys tik nuo dauginamųjų dešimčių ir vienetų skaitmenų. Patikriname visus variantus: $04 \cdot 06 = 24$, $14 \cdot 16 = 224$, $24 \cdot 26 = 624, \dots, 94 \cdot 96 = 9024$. Matome, kad visais atvejais priešpaskutinis skaitmuo yra 2.
   2 būdas. Prie skaičiaus $n(n+2)$ pridėkime 1. Tada skaičiaus paskutinis skaitmuo bus 5 ir $n(n+2)+1 = (n+1)^2$. Bet skaičiaus, kuris baigiasi skaitmeniu 5, kvadratas visada baigiasi 25. Taigi priešpaskutinis skaitmuo yra 2.
10. Kadangi buvo n avių ir kiekvieną iš jų pardavė po n litų, tai surinkta n^2 litų. Visos dešimtinės neužteko jaunesniajam broliui, todėl priešpaskutinis n^2 skaitmuo — nelyginis. Panagrinėkime kvadratų lentelę. Jei priešpaskutinis skaitmuo nelyginis, tai paskutinis skaitmuo — 6. Taigi jaunesniajam broliui trūko 4 litų ir peilis kainuoja 2 litus.
11. Kadangi tarp skaičių yra 51 nelyginis, tai juos sudėję ar atėmę visuomet gausime nelyginį skaičių. Taigi reikšmės, lygios 0, gauti negalime.
12. Jei n yra lyginis skaičius, tai jį išreiškiame taip: $n = 2 + (n-2)$. Skaičius 2 yra pirminis, o $(n-2)$ yra sudėtinis, kuris yra didesnis už 2 ir dalijasi iš 2.
    Jei n yra nelyginis skaičius, tai jį išreiškiame taip: $n = 3 + (n+3)$. Skaičius 3 yra pirminis, o $(n-3)$ yra lyginis, didesnis už 2 skaičius, todėl jis sudėtinis.
13. Lygybę pertvarkykime taip: $2^n+1 = m^3 \Leftrightarrow 2^n = m^3-1 \Leftrightarrow 2^n = (m-1)(m^2+m+1)$. Kadangi m^2+m+1 yra dvejeto daliklis ir $m^2+m+1 > 1$, tai jis turi būti lyginis skaičius, tačiau akivaizdu, kad jis yra nelyginis. Gauta prieštara rodo, kad tokie skaičiai neegzistuoja.
14. Jei $n = 2$, tai $n^3 + 9 = 17$ taip pat yra pirminis. Jei $n > 2$, tai n yra nelyginis skaičius. Bet tuomet $n^3 + 9$ yra lyginis, didesnis už 2, skaičius, todėl jis nėra pirminis. Taigi vienintelė galima n reikšmė yra 2.
15. Parodysime, kad n yra lyginis skaičius. Jei daugiasienis turi s briaunų, tai yra teisinga lygybė $3n = 2s$. Iš to išplaukia, kad n yra lyginis skaičius. Akivaizdu, kad $n \geqslant 4$. Pavyzdžiui, kai $n = 4$, gaunama trikampė piramidė. Jei $n = 2k$, $k \geqslant 3$, tai suglaudžiame pagrindais dvi k-kampes piramides ir gauname n-kampį, kurio visos sienos yra trikampiai.