$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 3, 40–47

Pierre de Fermat ir jo paskutinė teorema

Antanas Laurinčikas
antanas.laurincikas@maf.vu.lt

Pastarąjį dešimtmetį matematikų konferencijose, seminaruose arba tiesiog pokalbiuose prie puodelio kavos ir net laikraščiuose bene dažniausiai iš visų buvo minimas prancūzų matematiko Pierre de Fermat (Pjero Ferma) vardas. To kaltininkas buvo anglų matematikas A. Wiles, 1993 metais pranešęs, o 1995 metais visiškai įrodęs paskutinę Fermat teoremą, tvirtinančią, kad lygtis

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 2,$$

neturi sveikųjų sprendinių, t. y. nėra tokio sveikųjų skaičių trejeto (x, y, z), tenkinančio minėtą lygtį. Paskutinės Fermat problemos sprendimas buvo didžiulis įvykis ne tik matematikų, bet ir apskritai žmonijos gyvenime, pademonstravęs neišsenkamas žmogaus proto galimybes. Net pusketvirto amžiaus pasaulio matematikai niekaip negalėjo šios problemos įveikti. Yra dar viena graži proga prisiminti P. Fermat: 2001 metų rugpjūčio mėnesį jam sukako 400 metų.

Teisėjas ir matematikas

P. Fermat gimė 1601 metų rugpjūčio 20 dieną nedideliame pietvakarių Prancūzijos miestelyje Beaumont-de-Lomagne. Jo tėvas buvo pasiturintis komersantas, todėl savo sūnui galėjo suteikti neblogą išsilavinimą iš pradžių pranciškonų vienuolyne, paskui Tulūzos (Toulouse) universitete. Apie jaunojo Pierre'o matematinius gabumus nėra išlikusių jokių žinių.

Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Šeimos spaudžiamas, P. Fermat turėjo rinktis viešąją tarnybą. 1631 metais jis pradėjo eiti Tulūzos parlamento patarėjo pareigas ir su savo padėjėjais tvarkė įvairius miestiečių prašymus: jeigu kas nors norėjo kreiptis į karalių, tai pirma turėjo įtikinti P. Fermat, kad tai reikalinga. Taigi P. Fermat ir jo padėjėjai palaikė ryšius tarp sostinės Paryžiaus ir Tulūzos miesto. Reikia pažymėti, jog tas pareigas P. Fermat atliko kruopščiai ir sąžiningai. Be to, jis dar ėjo ir teisėjo pareigas, jam tekdavo pačios sunkiausios ir sudėtingiausios bylos.

Tarnyboje P. Fermat greit kilo karjeros laiptais. Tai leido jam užimti deramą vietą visuomenėje ir prie pavardės prisidėti garbingą dalelytę *de*, kuri buvo reikalinga ne tik ambicijoms patenkinti, bet ir teikė kai kurių privilegijų.

P. Fermat tarnybos metais Prancūzijos pirmuoju ministru tapo žinomas intrigų meistras kardinolas Richelieu. Jam nedaug kas galėjo įtikti. Tačiau P. Fermat vengė politinių intrigų ir nesikišo į politiką. Daug laiko atimdavo tarnyba, o laisvalaikį Pierre skyrė matematikai. Jis susirašinėjo su anglų matematikais K. Digby'u ir J. Wallisu, palaikė ryšį su Paryžiaus matematikais B. Pascaliu ir F. M. Mersenne'u, tačiau apskritai buvo gana užsidaręs. B. Pascalio įtakoje P. Fermat buvo susidomėjęs tuo metu nauja matematikos šaka — tikimybių teorija, vėliau įniko į analizę ir labai daug nuveikė diferencialinio skaičiavimo srityje. Jo darbai padarė įtaką net I. Newtonui. P. Fermat nebuvo profesionalus matematikas, jis buvo tik mėgėjas, tačiau tiek daug nuveikė, jog dažnai vadinamas matematikų mėgėjų karaliumi (profesionalių matematikų karaliumi laikomas C. Gauss). P. Fermat labai nemėgo skelbti savo darbų, jis buvo pasislėpęs genijus.

Kaip atsirado paskutinė Fermat teorema?

Analizės ir tikimybių teorijos rezultatų visiškai pakaktų įrašyti P. Fermat vardą tarp garbiausių matematikų. Tačiau didžiausia jo meilė buvo skaičių teorija. Jo parankinė knyga buvo Diofanto „Aritmetikos" lotyniškas vertimas. P. Fermat tiesiog žavėjosi skaičių sąryšiais. Vienas pavyzdys — jo atrasta nauja bičiuliškų skaičių (kai vienas skaičius yra kito skaičiaus daliklių suma) pora (17296 ir 18416). Patikrinkite! Kitas pavyzdys — skaičių $F_k = 2^{2^k} + 1$ (dabar vadinamų Fermat skaičiais) tyrinėjimas. P. Fermat manė, kad visi tokie skaičiai yra pirminiai. Iš tiesų $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ yra pirminiai. Skaičiaus F_7 jis jau neišnagrinėjo. Tačiau vėliau L. Euler įrodė, kad

$$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Taigi čia P. Fermat klydo, jo hipotezė nebuvo teisinga.

Skaitydamas Diofanto „Aritmetiką", P. Fermat paraštėse pasižymėdavo įvairias į galvą atėjusias mintis. Nagrinėdamas Pitagoro trejetus $\{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = z^2\}$, jis lyg netyčia užrašė naują lygtį

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

vietoje kvadratų parašydamas kubus. Iš karto ėmėsi ieškoti tokių trejetų (x, y, z), tenkinančių tą lygtį. Gerokai padirbėjo, bet nesugebėjo rasti nė vieno tokio trejeto. Po to pabandė imti ketvirtuosius laipsnius, vėl negalėjo rasti lygties sprendinių. Panašiai buvo ir su dar aukštesniais laipsniais. Taip gimė teorema, suformuluota šio straipsnelio pradžioje. P. Fermat rašė, kad jis žino labai įdomų tos teoremos įrodymą, tačiau paraštėje jį išdėstyti per maža vietos. Žinoma, sunkoka patikėti, kad toks įrodymas iš viso buvo žinomas, tačiau visko gali būti. Visa tai įvyko apie 1637 metus, kai P. Fermat dar nebuvo nė keturiasdešimties. Dar ilgą laiką P. Fermat sėkmingai darbavosi Prancūzijos teisėtvarkos sistemoje, nepamiršdamas ir matematikos, o 1665 metais sunkiai susirgo ir sausio 12 dieną mirė.

Kaip matematikas, P. Fermat dirbo atsiskyręs, tik retkarčiais susisiekdavo su Paryžiaus matematikais ir tai dažniausiai jų iniciatyva. Todėl jo pastabos „Aritmetikos" paraštėse tikriausiai ir būtų likę nežinomos, jei ne jo vyriausias sūnus Clément-Samuel. Vaikinas žavėjosi tėvo hobiu — matematika ir nusprendė tėvo atminimui išleisti minėtas paraščių pastabas. 1670 metais Tulūzoje pasirodė Diofanto „Aritmetikos" naujas leidimas su P. Fermat pastabomis. Jeigu ne ši sūnaus idėja, šiandieną galbūt niekas nekalbėtų apie paskutinę Fermat problemą, kurios tiek metų niekam nepavyko įveikti.

Pasirodžiusią knygą daugelis matematikų perskaitė ir ėmė įrodinėti P. Fermat suformuluotus teiginius. Vienas iš jų buvo ir XVIII amžiaus žvaigždė L. Euler. Taip pamažu buvo įrodytos visos P. Fermat pastabose suformuluotos teoremos, išskyrus vieną apie lygties

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 2,$$

neišsprendžiamumą sveikaisiais skaičiais. Todėl ji ir pavadinta paskutine Fermat teorema.

Leonhard Euler (1707–1783)

Andrew Wiles (1953)

Dabar jau žinoma, kad ši geniali teorema yra visiškai įrodyta. Todėl norėtųsi bent trumpai apžvelgti tą daugiau nei 350 metų atkarpą, kurios prireikė paskutinei Fermat teoremai įrodyti. Jos įrodymas susijęs su Kembridžu — vienu iš garsiausių pasaulio mokslo centrų. Autoriui nusišypsojo laimė 2001 metų liepą praleisti Kembridžo Darvino koledže, dirbti Niutono matematikos institute, vaikščioti jo apvaliais koridoriais, žinant kad čia A. Wiles pirmą kartą viešai paskelbė apie paskutinės Fermat teoremos įrodymą. Negana to, autorių priėmė ir juo rūpinosi buvęs A. Wileso mokslinis vadovas profesorius J. Coates. Taigi tam tikra prasme teko prisiliesti prie Fermat teoremos nugalėtojų aplinkos.

A. Wiles: nuo galvosūkių prie paskutinės Fermat teoremos

Andrew Wiles gimė ir augo Kembridže. Nuo pat mažens buvo guvus berniukas, mėgo spręsti galvosūkius ir matematikos uždavinius, prašydavo mokytojo papildomų užduočių. Jam patikdavo lankytis netoli namų esančioje nedidukėje bibliotekoje, kurioje buvo knygučių su galvosūkiais. Vieną 1963 metų dieną toks apsilankymas Andrew buvo lemtingas — jo dėmesį patraukė E. T. Bello knygelė „Paskutinė problema“, kurioje buvo glaustai išdėstyta paskutinės Fermat teoremos istorija. Berniukas, užgniaužęs kvapą, perskaitė knygelę. Čia viskas taip buvo aišku ir paprasta, nesudėtinga. Jis būtinai būtinai išspręs panašią į Pitagoro teoremos lygybę lygtį ir nušluostys nosį žymiems matematikams. Grįžęs namo, Andrew nedelsdamas ėmėsi darbo ir buvo tikras greit surasiąs Fermat teoremos įrodymą. Deja, visos pastangos nedavė rezultatų. Nesėkmė berniuko nenuvylė. Jis prisiekė būtinai išspręsias problemą, visą laiką nešiojosi ją savo galvoje ir po 30 metų sau duotą žodį ištesėjo.

Taigi A. Wiles pasišventė matematikai. Jis baigė Oksfordo universitetą, o 1975 metais Kembridžo Emanuelio koledže pradėjo savo mokslinę karjerą — ėmėsi rašyti disertaciją. Jo mokslinis vadovas buvo John Coates (g. 1945 m.), australų kilmės matematikas, Emanuelio koledžo profesorius. Tebedirba jis ten ir dabar. J. Coates labai malonus, tolerantiškas žmogus, pasaulinio garso matematikas, mokslo organizatorius. Jis prisimena, kaip vienas iš kolegų rekomendavo jam gabų studentą (A. Wilesą). Profesorius sutiko tapti jo vadovu ir dabar jaučiasi dėl to nepaprastai laimingas. J. Coates pasiūlė Andrew tyrinėti elipsines kreives, tuo metu visai neįtardamas, kad ši sritis bus raktas paskutinei Fermat teoremai įrodyti. Galbūt profesoriui kažką į ausį pašnibždėjo intuicija, gana daug lemianti painiuose matematikos labirintuose.

Elipsine vadinama kreivė, apibrėžiama lygtimi

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c;$$

čia a, b ir c — skaičiai. A. Wileso vienas iš doktorantūros uždavinių buvo nurodyti plokštumoje skaičių sveikųjų taškų (x, y) (x ir y yra sveikieji skaičiai), gulinčių elipsinėse kreivėse. Tai labai sudėtingas uždavinys, ir jo sprendimas įmanomas tik specialaus pavidalo elipsinėms lygtims. Tačiau, ruošdamas disertaciją, A. Wiles visada buvo šalia Fermat problemos, niekada jos nepamiršo. Jis kaupė žinias ir ruošėsi.

Fermat problemos istorija: keliai ir klystkeliai

Apskritai paskutinės Fermat problemos sprendimo istorija ilga ir gana sudėtinga, joje daug nusivylimų ir net tragiškų atvejų. Kaip minėjome, P. Fermat nepateikė bendrojo savo teoremos įrodymo atvejo, tačiau Diofanto „Aritmetikos" paraštėse gana smulkiai aprašė atvejį $n = 4$. Jis naudojosi vadinamuoju begalinio nuolydžio metodu, kuris lengvai atveda į prieštarą.

Tarkime, lygtis

$$x^4 + y^4 = z^4$$

turi sveikąjį sprendinį (x_1, y_1, z_1). Tada galima įrodyti, kad ji turi mažesnį sprendinį (x_2, y_2, z_2) (su mažesniais x, y, z). Iš čia vėl išplaukia, kad yra dar mažesnis sprendinys (x_3, y_3, z_3) ir t. t. Tęsdami procesą, gauname prieštarą, nes x, y, z turi būti sveikieji skaičiai. Vadinasi teorema teisinga visiems n, kurie dalijasi iš keturių.

L. Euler bandė begalinio nuolydžio metodą pritaikyti bendruoju atveju. Tačiau, praėjus beveik 100 metų nuo Fermat teoremos suformulavimo, jam pasisekė įrodyti tik atvejį $n = 3$. Įrodydamas L. Euler naudojosi vadinamaisiais menamais, arba kompleksiniais skaičiais. Skaičių $i = \sqrt{-1}$ laikydami menamuoju vienetu, bet kurį kompleksinį skaičių galime užrašyti pavidalu $a + bi$ su realiais a ir b ir pavaizduoti tašku plokštumoje. L. Eulerio rezultatas buvo svarbus dar ir tuo, kad 3 yra pirminis skaičius, o visi sveikieji skaičiai yra sudaryti iš pirminių. Fermat teoremos įrodymui visiems n, reikėjo pirma ją įrodyti pirminėms n reikšmėms, o iš čia gauti bendrąją atvejį. Taigi L. Eulerio rezultatas buvo pirmasis šia linkme.

Sophie Germain (1776–1831)

Kitą svarbų sprendžiant šią problemą žingsnį žengė moteris, viena iš pirmųjų XIX a. pabaigos moterų matematikių. Sophie Germain sukūrė naują gražų metodą, kuris „beveik" tiko tokiems pirminiams $n = p$, kai skaičius $2p + 1$ vėl yra pirminis, pavyzdžiui, $n = 5$. Tačiau skaičiui $n = 7$ metodas jau netiko, nes $2 \cdot 7 + 1 = 15$ nėra pirminis skaičius. S. Germain rezultatai teigė: jei lygtis

$$x^n + y^n = z^n$$

turėtų sprendinį (x_0, y_0, z_0), tai kuris nors iš x_0, y_0 ar z_0 būtų n kartotinis. S. Germain ir jos kolegos nagrinėjo nurodytus laipsnius n atskirai, stengdamiesi įrodyti, jog x, y ar z negali būti n kartotiniai, ir kartu gauti Fermat teoremą tuo konkrečiu atveju. 1825 metais G. L. Dirichlet ir A.-M. Legendre patobulino Germain metodą ir nepriklausomai vienas nuo kito iki galo išnagrinėjo atvejį $n = 5$. 1839 metais dar vienas prancūzas G. Lamé modifikavo Germain metodą ir įrodė Fermat teoremą, kai $n = 7$. Pačios S. Germain gyvenimas gana tragiškas. Būdama moteris, ji labai sunkiai skynėsi sau kelią akademinėje visuomenėje. Nusivylusi ji vėliau perėjo į matematikos taikymų sritį. Tačiau jos indėlio į Fermat problemos sprendimą negalima buvo nutylėti. S. Germain buvo apdovanota Prancūzijos instituto medaliu, Getingeno universitetas jai suteikė garbės laipsnį. Deja, pagaliau sulauktas pripažinimas tebuvo trumpas blyksnis jos gyvenime: išvarginta moteris netrukus mirė nuo vėžio.

Prancūzijos mokslų akademija įsteigė keletą premijų ir aukso medalį už Fermat problemos sprendimą. Aišku, prancūzai norėjo, jog Prancūzijoje gimusi problema priklausytų vien prancūzams. Prasidėjo varžybos, netgi su intrigomis. Pagrindiniai varžovais buvo G. Lamé ir kitas garsus Paryžiaus matematikas A. L. Caushy, pasiskelbę išsprendę problemą. Tačiau jų tarpusavio ginčą nutraukė J. Liouville, pranešęs, jog vokiečių matematikas E. Kummer abiejų varžovų samprotavimuose rado klaidų. Tiek G. Lamé, tiek ir A. L. Caushy rėmėsi sveikųjų skaičių išskaidymo pirminiais daugikliais (faktorizacijos) vienatimi. Tačiau, naudojant kompleksinius skaičius, ta vienatis pranyksta. Pavyzdžiui, $22 = 2 \cdot 11$ ir $22 = (3 + 19i)(3 - 19i)$.

E. Kummer parodė, kaip atskirais atvejais, pavyzdžiui, visiems pirminiams iki 31 imtinai galima išvengti faktorizacijos vienaties problemos. Tačiau atveju $n = 37$ šis metodas jau netiko. Kummerio būdas nedavė rezultatų ir kitiems pirminiams n, kuriuos jis pavadino nereguliariaisiais.

Svarbu paminėti ir vokiečių pramonininką P. Wolfskehlį, kuris buvo studijavęs matematiką universitete, laisvalaikiu palaikė ryšius su profesionaliais matematikais ir žavėjosi skaičių teorija, neaplenkdamas ir Fermat problemos. Kaip paaiškėjo vėliau, šiai problemai jis skolingas už gyvybę. Istorija buvo tokia. Nelaimingai įsimylėjęs, jautrios sielos P. Wolfskehl nusprendė nusižudyti. Tam jis kruopščiai ruošėsi: nustatė tikslų laiką, kada išeis iš gyvenimo, sutvarkė verslo reikalus, paskutinę dieną parašė laiškus šeimai ir draugams. Viską sutvarkęs, pastebėjo, kad iki paskirtos valandos yra laiko. Tad nuėjęs į biblioteką, ėmė peržiūrinėti matematinius straipsnius. Jo dėmesį patraukė E. Kummerio straipsnis, kuriame buvo nurodyta G. Lamé ir A. L. Caushy klaida sprendžiant Ferma problemą. Staiga jam pasirodė, kad E. Kummer klysta, ir likus kelioms valandoms iki mirties P. Wolfskehl pradėjo karštligiškai skaičiuoti. Galų gale paaiškėjo, kad E. Kummer teisus. Sugaišęs skaičiavimams nemažai laiko, P. Wolfskehl pastebėjo, kad savižudybei skirtas momentas jau praėjęs. Įsigilinęs į Fermat problemą, jis visai nebenorėjo mirti. Pramonininko šeima už tai nutarė paskirti 100 000 Vokietijos markių premiją matematikui, kuris iki galo išspręs paskutinę Fermat problemą. Buvo nurodytos griežtos premijos įteikimo sąlygos ir pavesta tuo rūpintis Getingeno matematikams. Premija galiojo net iki 2007 metų. Taigi A. Wiles nepavėlavo, nors nuo 1908 metų premija nuvertėjo, jis atsiėmė „tik“ 50 000 JAV dolerių. Aišku, Wolfskehlio premija buvo naujas impulsas Fermat problemai spręsti, nepaprastai išaugo fermatistų mėgėjų gretos. Profesorius E. Landau, atsakingas už premijos nuostatų vykdymą, buvo pasidaręs net trafaretą, kuriame nurodydavo pirmosios klaidos puslapį, o tekstas visiems „autoriams“ būdavo tas pats.

Ernst Eduard Kummer (1810–1893)

Nauji žmonės, naujos idėjos

A. Wiles, imdamasis Fermat problemos, turėjo pasirinkti: arba studijuoti L. Eulerio, S. Germain, E. Kummerio ir kitų autorių darbus, arba remtis šių dienų matematikos laimėjimais. Susidariusi situacija buvo tokia, kad reikėjo rinktis antrąjį kelią. Mes jau minėjome elipsines kreives. Lieka aptarti antrą svarbų matematinį objektą, padėjusį A. Wilesui pasiekti tikslą — modulines formas. Jas nėra lengva apibrėžti, tam reikia specialių žinių. Pasakysime tik tiek, kad modulinės formos pradėtos nagrinėti XIX amžiuje ir matematikoje yra labai svarbios. Vienas matematikas yra pasakęs, kad matematika turi 5 veiksmus: sudėtį, atimtį, daugybą, dalybą ir modulines formas. Šiek tiek tiksliau kalbant, modulinės formos yra tam tikros kompleksinio kintamojo funkcijos, turinčios labai daug simetrijos savybių: jas galima be galo daug kartų stumti, sukti, atspindėti veidrodyje ar dar kitaip stengtis deformuoti, bet nuo to jos nesikeičia. Tiek su modulinėmis formomis, tiek su elipsinėmis kreivėmis galima susieti naujas funkcijas, vadinamąsias dzeta-funkcijas (arba L funkcijas). Jos yra žinomos Rymano dzeta-funkcijos $\zeta(s) = \sum \frac{1}{m^s}$, apibendrinimai. Elipsinių kreivių dzeta-funkcijų ir modulinių formų dzeta-funkcijų ryšys ir buvo raktas A. Wilesui išspręsti Fermat problemą. Kalbant matematiškai, jis įrodė, tiesa nepilnai, Taniyama–Shimura hipotezę. Pastaroji taip pat verta keleto žodžių.

Vieną 1954 metų dieną jaunas japonų matematikas G. Shimura užbėgo į biblioteką pasiimti žurnalo apie modulines kreives. Labai nustebo, kad reikiamo jam numerio nėra, o jį paėmęs taip pat jaunas matematikas Y. Taniyama. G. Shimura parašė laiškelį, prašydamas kuo greičiau žurnalą grąžinti, nes jam reikia atlikti tam tikrus skaičiavimus. Po kelių dienų Y. Taniyama atsakė, jog ir jis atlieka panašius skaičiavimus todėl jie galėtų dirbti kartu. Taip juodu tapo neatskiriamais draugais. Jie skaičiuodami pastebėjo, kad elipsinių kreivių dzeta-funkcijos yra labai panašios į modulinių formų dzeta-funkcijas. Pasirodė, kad atskirais atvejais šios dzeta-funkcijos tiesiog sutampa. Tai buvo labai netikėta ir žadėjo tikrą perversmą skaičių teorijoje. Gimė nauja hipotezė, kurią 1955 metais Y. Taniyama paskelbė tarptautiniame simpoziume Tokijuje. Abu draugai toliau dirbo ta kryptimi, stengdamiesi savo hipotezę pagrįsti. Ypač išryškėjo Y. Taniyamos genialumas, jis buvo tikras naujų idėjų generatorius. Tačiau visai netikėtai, būdamas vos 31 metų, Y. Taniyama 1958 metais nusižudė, palikęs raštelį, kad prarado pasitikėjimą savo ateitimi.

Yutaka Taniyama (1927–1958)

Likęs vienas, G. Shimura stengėsi plėtoti mirusio draugo idėjas.

Tačiau grįžkime prie paskutinės Fermat problemos. Koks yra jos ir elipsinių kreivių modulinių formų bei Taniyama–Shimura hipotezės ryšys?

1984 metais Obervolfacho matematikos institute vyko simpoziumas. (Beje, šiais metais garbė dalyvauti tokiame simpoziume teko ir šio straipsnelio autoriui.) Buvo nagrinėjama ir Taniyama–Shimura hipotezė. Vienas iš pranešėjų vokiečių matematikas Gerhard Frey tiesiog pritrenkė klausytojus: jis paskelbė, kad iš Taniyama–Shimura hipotezės išplaukia paskutinė Fermat teorema. Visi buvo nustebę tokiu netikėtu rezultatu, tačiau jį reikėjo dar patikrinti. Greitai buvo pastebėta, kad G. Frey samprotavimuose yra spraga — įrodymas nepilnas. Tikėtasi greitai tą trūkumą pašalinti, tačiau dienos bėgo, o rezultato vis nebuvo. Vienas iš Obervolfacho simpoziumo dalyvių buvo Kalifornijos universiteto Berklyje profesorius Ken Ribet. Jis taip pat dėjo daug pastangų ištaisyti G. Frey įrodymą. 1986 metais į Berklio Tarptautinį matematikų kongresą atvyko geras K. Ribet draugas profesorius Barry Mazur. Jie šnekučiavosi prie kavos puodelio. K. Ribet pasakojo, kad galįs užpildyti G. Frey įrodymo spragą tik atskiru atveju, ir trumpai išdėstė draugui savo metodą. Staiga B. Mazur jį pertraukė ir tarė: „Bet gi tu jau įrodei, reikia tik pridėti tam tikros struktūros gama nulį ir viskas bus gerai bendruoju atveju". K. Ribet kelis kartus pažvelgė į draugą, į kavos puodelį ir iš džiaugsmo sušuko: „Tu iš tikrųjų teisus. Kaip aš anksčiau to nepastebėjau?" Jis greitai nubėgo į savo kambarį ir pradėjo viską surašinėti. Iš tikrųjų viskas buvo gerai. Netrukus keli tūkstančiai kongreso dalyvių sužinojo, kad paskutinė Fermat problema yra Taniyama–Shimura hipotezės išvada.

Atkaklusis Wilesas

Gavęs daktaro laipsnį Kembridže, A. Wiles išvyko užjūrin į Prinstono universitetą. Savo atkaklumo ir profesoriaus J. Coateso rūpestingo vadovavimo dėka jis tapo vienu iš vedančiųjų elipsinių kreivių teorijos specialistų, turėjo šioje srityje svarių rezultatų. Į Prinstoną juk bet ko nekviečia! Apie K. Ribet darbą A. Wiles sužinojo gerdamas arbatą draugo namuose. Tai jį tiesiog įelektrino. Andrew pajuto, kad dabar gali įgyvendinti savo vaikystės svajonę — įrodyti Taniyama–Shimura hipotezę. Jis tučtuojau parbėgo namo ir ėmėsi darbo.

A. Wiles nutarė dirbti visiškai slaptai, atsiskyręs nuo viso pasaulio. Jis nedalyvavo konferencijose, seminaruose, neskelbė savo naujų rezultatų, nebendravo ir nediskutavo su kolegomis. Daugeliui tai buvo keista, kai kas net kalbėjo, kad Andrew traukinys jau nuvažiavo, nes jis išsisėmė ir nutraukė mokslinius tyrimus. Iš tikrųjų A. Wiles žingsnis po žingsnio kūrė naujus metodus, galinčius padėti įrodyti Taniyama–Shimura hipotezę. Apie Andrew slaptą darbą žinojo vienintelis žmogus — jo žmona. Tačiau metai bėgo, gera pradžia buvo padaryta, bet pagrindinė grandis, turinti susieti visas elipsines kreives su modulinėmis formomis, vis dar nebuvo sukonstruota. 1990 metais A. Wiles pasijuto esąs išsisėmęs, bestovįs vietoje, nebeturįs idėjų. 1991 metais jis pagaliau nusprendė nuvykti į Bostono konferenciją, skirtą elipsinių kreivių problemoms. Gal per prabėgusius 5 metus atsirado nauji metodai, kurių jis nežino, gal jie padės rasti tą paslaptingą grandį? Kolegos sveikino jį tiek ilgai nematytą. Kalbėdamasis su savo buvusiu moksliniu vadovu profesoriumi J. Coatesu, A. Wiles sužinojo, kad įdomius rezultatus neseniai gavo profesoriaus doktorantas M. Flach, modifikavęs Kolyvagino metodą. Andrew iškart pajuto, kad tai yra kaip tik tai, ko jam trūko. Jo uždavinys dabar buvo išplėsti Kolyvagino–Flacho metodą ir pritaikyti savo nagrinėjamam atvejui. Grįžęs į Prinstoną, A. Wiles nedelsdamas ėmėsi darbo, tačiau susidūrė su dideliais techniniais sunkumais, jam nepakako algebros žinių. Tada jis pagaliau nusprendė atskleisti savo paslaptį ir prašyti draugų pagalbos, kad jie patikrintų jo sudėtingus skaičiavimus. Tai jis patikėjo profesoriui Nickui Katzui, žinomam algebrinės geometrijos specialistui ir geram savo draugui. Nelengva buvo keliais žodžiais paaiškinti nepaprastai sudėtingas naujas algebrines konstrukcijas, todėl A. Wiles, remdamasis savo rezultatais, pradėjo studentams skaityti kursą „Elipsinių kreivių skaičiavimas". Vienas iš to kurso klausytojų buvo profesorius N. Katz. Baigęs šį paskaitų kursą, A. Wiles buvo jau visai arti Taniyama–Shimura hipotezės įrodymo, bet vieno elipsinių kreivių tipo niekaip negalėjo įveikti. Kartą skaitydamas B. Mazuro straipsnį, jis staiga atkreipė dėmesį į jame minimą vieną seną metodą ir suprato, jog dabar galės užpildyti likusią įrodymo spragą. Tą dieną namo grįžo vėlai, pavargęs, bet laimingas, ir savo žmonai prisipažino, jog pagaliau išsprendė paskutinę Fermat problemą.

Taigi Taniyama–Shimura hipotezės, kartu ir paskutinės Fermat teoremos, įrodymui A. Wiles sugaišo net 7 metus, kurie buvo sunkaus darbo, izoliacijos, atradimų ir nevilčių metai. Tačiau tai dar buvo ne viskas. Rezultatą reikėjo pristatyti pasauliui, jį patikrinti. A. Wiles nusprendė darbą paskelbti savo gimtinėje Kembridže. 1993 metais I. Newtono matematikos institute turėjo vykti skaičių teorijos simpoziumas „L-funkcijos ir aritmetika". Vienu iš jo organizatorių buvo profesorius J. Coates. A. Wiles perskaitė 3 paskaitų ciklą apie Taniyama–Shimura hipotezę ir paskutinę Fermat teoremą. Prieš paskutinę paskaitą visi jautė, jog artėja atomazga. Susirinko apie 200 klausytojų, atvyko spaudos atstovai. Pagaliau A. Wiles lentoje užrašė keletą formulių, suformulavo paskutinę Fermat teoremą ir atsisukęs į auditoriją šypsodamasis tarė: „Manau, čia ir sustosiu". Salėje kilo triukšmas, ovacijos, žybsėjo fotoaparatų blykstės. Visi sveikino A. Wilesą su pergale.

Tačiau jau kelintą kartą: deja... Iki tikrosios pergalės dar buvo toloka. Reikėjo įrodymą paskelbti žurnale. A. Wiles įteikė savo apie 200 puslapių rankraštį aukštai vertinamo žurnalo *Inventiones Mathematicae* redakcijai. Rezultatas buvo neeilinis, todėl redaktorius B. Mazur nusprendė skirti ne 2 ar 3, kaip įprasta, o net šešis recenzentus. Kad būtų paprasčiau, rankraštis buvo padalytas į 6 dalis, ir kiekvienas recenzentas turėjo prisiimti atsakomybę už savo dalį. Kaip žinome, recenzavimas yra slaptas procesas, autoriui recenzentai būna nežinomi, tačiau dabar tai jau ne paslaptis. Vienas iš jų buvo N. Katz. Tuo metu jis viešėjo Prancūzijoje ir rimtai ėmėsi rankraščio 3 skyriaus recenzavimo. Tikrino kiekvieną eilutę, kiekvieną formulę, kiekvieną loginį žingsnį. Jei kas būdavo neaišku, elektroniniu paštu susisiekdavo su A. Wilesu ir išsiaiškindavo. Tačiau viena įrodymo vieta N. Katz rimtai suabejojo, ir jokie A. Wileso atsiųsti paaiškinimai jo netenkino. Pasirodė, kad toje vietoje Kolyvagino–Flacho metodas netinka. Taigi paskutinės Fermat teoremos įrodyme rasta rimta spraga. A. Wilesui tai buvo sunkios valandos, bet jis nepalūžo, tikėjo savo jėgomis ir vėl ėmėsi sunkaus darbo. Spaudoje net buvo prasidėję diskusijos, kad tiek Taniyama–Shimura hipotezės, tiek paskutinės Fermat problemos negalima nei įrodyti, nei paneigti. Matematikoje tokių problemų yra buvę. A. Wileso atliktas didžiulis darbas, nors ir be 3 skyriaus, kuris turėjo spragų, buvo vertas didžiausio įvertinimo. Tačiau patį A. Wilesą tai mažai guodė: jis norėjo pateikti išsamų Fermat teoremos įrodymą. Artimas Andrew draugas ir garsus matematikas P. Sarnakas pasiūlė į pagalbą pasitelkti kitus kolegas. A. Wiles šį siūlymą priėmė ir pasikvietė į Prinstoną iš Kembridžo savo buvusį mokinį R. Taylorą, gerai išmanantį Kolyvagino–Flacho metodą. R. Taylor taip pat buvo vienas iš recenzentų. Mokytojas ir gabus mokinys kartu ėmėsi darbo. Tuo metu pasaulyje pasklido gandas, kad Harvardo universiteto profesorius N. Elkies sukostravo kontrapavyzdį Fermat teoremai, tuo įrodydamas, jog ji neteisinga. Tai buvo tikra tragedija A. Wilesui ir visai skaičių teorijai, nes daugelis tikėjo Taniyama–Shimura hipotezės teisingumu. Tik vėliau buvo pastebėta, kad N. Elkies kontrapavyzdys tėra tik balandžio 1-sios pokštas. Prabėgo A. Wileso su R. Tayloru bendro darbo vasara, bet rimto progreso nebuvo. Jie jau buvo nusprendę paskelbti spaudoje tai, ką buvo pavykę padaryti ir kas buvo teisinga, kad kiti galėtų tęsti tyrimus. Bet A. Wiles negalėjo nurimti, kodėl bendruoju atveju netinka Kolyvagino–Flacho metodas, kur yra kliūtis. Prieš tai, jis bandė, tiesa, nesėkmingai, pritaikyti vadinamąją Iwasawa teoriją. Prisiminęs tai, A. Wiles net krūptelėjo: juk viskas taip paprasta, reikia tik tuos du metodus sujungti, ir įrodymo spraga bus užpildyta. Tai iš tikrųjų buvo teisinga idėja. Netikėdamas sėkme, A. Wiles ilgai vaikščiojo aplinkui ir tikrino, ar suolas, ant kurio besėdint jam į galvą atėjo geniali idėja, tebėra toje pačioje vietoje. Tai buvo realybė. Paskutinė Fermat teorema buvo galutinai įrodyta.

Į bene aukščiausiai vertinamą žurnalą *Annals of Mathematics* buvo atiduoti 2 straipsniai. Vienas paties A. Wileso „Modulinės elipsinės kreivės ir paskutinė Fermat teorema" ir kartu su R. Tayloru „Kai kurių Hecke algebrų žiedų teorinės savybės". Abu straipsniai kartu sudarė apie 130 puslapių ir buvo atspausdinti 1995 metų gegužės mėnesį. Taigi buvo padėtas paskutinis Fermat problemos sprendime taškas.

Pagal taisykles A. Wiles galėjo pretenduoti dabar ir į Wolfskehlio premiją. Kaip jau minėjome, 1997 metais jis tą premiją iš tikrųjų atsiėmė. Tai buvo ne vienintelė premija, kuria buvo įvertintas A. Wileso darbas. 1996 metais jis kartu su R. Langlandsu pasidalijo 100 000 JAV dolerių Wolfo premiją.

Taip įvertinta prieš 350 metų Pierre de Fermat paraštėje parašyta keturių eilučių pastaba.