

Didonės uždavinys

Aleksandras Baltrūnas

baltrunas@takas.lt

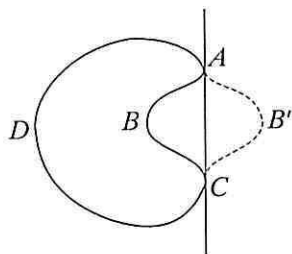
Autorius primena legendą apie Didoną — Kartaginos įkūrėją, kartu ir matematinį uždavinį: kokia duoto perimetro figūra turi didžiausią plotą?

Didonė nebuvo matematikė — ji nerašė matematikos veikalų ir neįrodinėjo teoremų. Tai buvo karalienė, Tiro karaliaus Belo duktė, nuo brolio Pigmaliono kartu su kitais finikiečiais pabėgusi į Afriką ir čia įkūrusi Kartaginos miestą, ilgainiui tapusį Romos konkurentu. Tačiau niekas neužginčys, kad jos turėta matematinių gabumų. Jei jų nebūtų buvę, kažin ar būtume žinoję apie tokį miestą ir jos įkūrėją. Mat, kai kilmingoji Didonė atkeliavo į pusiasalį, kur vėliau iškilo Kartagina (finikietišškai — Naujas miestas), ir vietinių gyventojų paprašė duoti jiems žemės įsikurti, pastarieji neapsidžiaugė. Ir nenorėdami neprašytų atsikėlėlių, sutiko skirti tiek žemės, kiek jie aprėps viena jaučio oda. Tačiau Didonė nesutriko ir, supjausčiusi jaučio odą plonomis juostelėmis bei iš jų surišusi ilgą virvę, ja atsivėrė visą kalvą, kuri stūksojo ties Kartaginos kyšuliu. Žymus senovės Romos poetas Vergilijus šį įvykį poemoje „Eneida“ įamžino keliomis eilutėmis:

O atkeliavę į vietą, kur šiandien regi tu galingus
Mūrus ant kalno ir aukštą naujos Kartaginos pilį,
Jie nusipirko žemės, kiek seno, didelio jaučio
Oda galėjo apjuost...¹

Nereikia pamiršti, kad su ta pačia virve galima aprėpti nevienodo ploto sklypus. Remiantis viena matematine disciplina — variaciniu skaičiavimu — nesunku nustatyti, kad iš visų figūrų, turinčių tą patį perimetrą P , didžiausią plotą, lygų $P^2/4\pi$, turi skritulys. Deja, tais laikais variacinis skaičiavimas nebuvo žinomas. Tad Didonei teko išspręsti nemenką matematinį uždavinį. O ką mes darytume jos vietoje?

Visų pirma, įsitikinsime, kad ieškoma duotojo ilgio linija, ribojanti didžiausio ploto figūrą, turi būti išgaubta². Išties, jei ši kreivė nebūtų išgaubta, tuomet egzistuotų du jos taškai A ir B tokie, kad du kreivės lankai ABC ir ADC , jungiantys šiuos taškus, būtų vienoje tiesės AC pusėje (1 pav.). Pakeitę vieną šių lankų, tarkime,

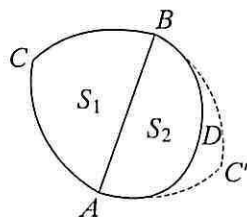


1 pav.

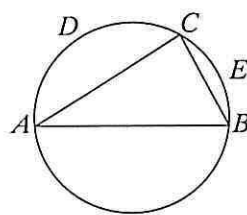
¹ Vergilijus, Eneida. Iš lotynų kalbos vertė A. Dambrauskas. Vilnius, 1989, p. 14.

² Kreivė vadinama išgaubtąja, jei kiekviename jos taške išvesta liestinė niekada šios kreivės nekerta.

ABC , jo veidrodiniu atspindžiu tiesės AC atžvilgiu, gauname naują to paties ilgio kreivę $AB'CDA$, ribojančią kur kas didesnio ploto figūrą.



2 pav.



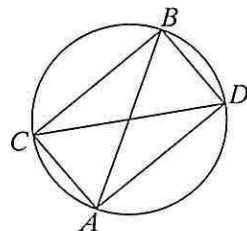
3 pav.

Diametru vadinsime bet kokią atkarpą, pusiau dalijančią ieškomosios kreivės ilgį. Įrodysime, kad diametras pusiau dalija ne tik šios kreivės ilgį, bet ir jas ribojamos figūros plotą. Tarkime, kad yra priešingai, t. y. diametras AB ieškomą figūrą dalija į dvi nelygias dalis S_1 ir S_2 (2 pav.). Tegul $S_1 > S_2$. Paimkime lanko ACB veidrodinį atspindį $AC'B$ diametro AB atžvilgiu. Akivaizdu, kad kreivė $ACBC'A$, palyginti su kreive $ACBDA$, riboja kur kas didesnio ploto figūrą.

Paimkime bet kurį ieškomosios kreivės tašką C ir sujunkime atkarpomis jį su bet kokio diametro AB galais (3 pav.). Tuomet trikampis ACB yra statusis. Tarkime, kad yra priešingai, t. y. kampas $\angle ACB$ nėra statusis. Įrodysime, kad šiuo atveju kreivė $ACBA$ riboja ne pačio didžiausio ploto figūrą. Iškart pastebime, kad plotas, apribotas lanku ACB ir diameteru AB , susideda iš trijų dalių: trikampio ABC ir segmentų ACD bei CBE . Apskaičiuosime trikampio ABC plotą

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|AC||BC| \sin \angle ACB \leq \frac{1}{2}|AC||BC| = S_0.$$

Trikampį ABC pakeiskime stačiuoju trikampiu, kurio statiniai būtų AC ir BC . Naujojo trikampio plotas lygus S_0 , vadinasi, ir ieškomoji figūra yra didesnė esant tam pačiam ribojančiosios kreivės ilgiui.



4 pav.

Tarkime, kad AB ir CD yra kokie nors du ieškomosios figūros diametroi (4 pav.). Iškart matyti, kad keturkampis $ACBD$ yra stačiakampis, t. y. kampai $\angle ACB$, $\angle CBD$, $\angle BDA$ ir $\angle DAC$ yra statieji. Taigi visi šios figūros diametroi ne tik susikerta viename taške, bet ir dalija vienas kitą pusiau. Vienintelė turinti šią savybę kreivė yra apskritimas. Vadinasi, ieškomoji figūra yra skritulys.