$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 3, 28–30

Mokyklinės matematikos uždavinių sprendimo lavinamieji tikslai

Jonas Teišerskis

Straipsnio autorius, Vilniaus pedagoginio universiteto docentas, pateikia svarstymų apie uždavinių vaidmenį mokant matematikos mokykloje, skatina vengti metodinio formalizmo.

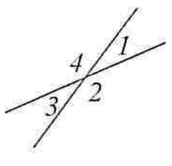
Pagal pažintinius ir lavinamuosius tikslus matematikos uždaviniai yra trijų krypčių: didaktiniai, pažintiniai ir kūrybiniai.

Didaktiniai uždaviniai dar vadinami pagalbiniais. Tai uždaviniai, kurie padeda mokiniams išmokti teorinę medžiagą. Didaktiniai uždaviniai yra dviejų rūšių:

1. Paruošiamieji uždaviniai, kuriais siekiama mokiniams padėti suprasti sąvokos apibrėžimą ir esmę, teoremos formulavimą ar įrodymą, formulės išvedimą.

Pavyzdys. Norint išaiškinti kryžminių kampų lygumą sprendžiamas toks uždavinys:

Žinoma, kad $\angle 2 = 150°$. Apskaičiuokite *1* ir *3* kampų didumą.



Mokiniai jau žino, kad gretutinių kampų suma lygi 180° ir kas yra kryžminiai kampai, bet dar nežino, kad jie lygūs.

Taigi sprendžiame taip: $\angle 1 = 180° - \angle 2 = 180° - 150° = 30°$, $\angle 3 = 180° - 150° = 30°$.

Pastebime, kad $\angle 1 = \angle 3$. Tačiau ar visada taip bus? Iš uždavinio sprendimo matome, kad $\angle 1 = 180° - \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 2$, vadinasi, $\angle 1 = \angle 3$. Taigi kryžminiai kampai lygūs.

Prieš išvedant kvadratinės lygties sprendinių formulę, taip pat tikslinga išspręsti kelis paruošiamuosius uždavinius — kelias kvadratines lygtis (su skaitiniais koeficientais) išskiriant dvinario kvadratą.

Pavyzdys. Išspręskime lygtį $x^2 + 4x + 4 = 9$.

$$(x+2)^2 = 9;$$

$$x + 2 = 3, \quad \text{arba} \quad x + 2 = -3,$$

$$x = 1; \qquad x = -5.$$

2. Didaktiniai uždaviniai skirti įtvirtinti teoremą ar formulę. Sprendžiant šiuos uždavinius nekeliamas tikslas įgyti sprendimo įgūdžių. Dauguma geometrijos uždavinių yra didaktiniai.

Pažintiniai, arba treniruojamieji, uždaviniai būtini toliau mokantis matematikos arba kitų dalykų vidurinėje bei aukštojoje mokyklose ir reikalingi praktinei veiklai. Tai yra uždaviniai, kuriuos mokiniai turi išmokti spręsti ir įgyti sprendimo įgūdžių. Pavyzdžiui, V klasėje reikia išmokyti veiksmų su dešimtainėmis trupmenomis, taip pat su natūraliaisiais skaičiais, VI klasėje — veiksmų su nesudėtingomis paprastomis trupmenomis, VII klasėje būtina išmokyti veiksmų su teigiamais ir neigiamais skaičiais, bei spręsti pirmojo laipsnio lygtis. Tam reikia sistemingų treniruočių.

Siekiant svarbiausio matematikos mokymo tikslo — ugdyti mokinių matematinius gebėjimus ir kūrybinį mąstymą, didaktinių ir pažintinių uždavinių nepakanka. Todėl būtina spręsti kūrybinius uždavinius, kuriems reikia ne tik loginio mąstymo, matematinių žinių, bet ir matematinės intuicijos, išradingumo, sumanumo ir mąstymo lankstumo. Kūrybiniai uždaviniai sprendžiami siekiant išugdyti mokinių matematinius gebėjimus bei mokyti taikyti matematikos žinias realiems uždaviniams spręsti. Uždavinys yra kūrybinis, kai mokinys pats randa sprendimo būdą ir savarankiškai išsprendžia uždavinį. Tačiau jei duodame mokiniui panašų uždavinį į prieš tai spręstąjį, tai tas uždavinys jau nebus kūrybinis.

Anksčiau kūrybiniai uždaviniai nebuvo privalomi, jie tik buvo pateikiami gabiausiems mokiniams. Dabar ne mažiau kaip trečdalis uždavinių turėtų būti kūrybiniai. Dalis uždavinių priklauso dviem ar net visoms trims matematinių uždavinių kryptims.

Matematikos uždavinių *pažintiniai* tikslai yra šie:

- formuoti svarbiausias matematines sąvokas,
- aiškinti sąvokų ryšius,
- išryškinti pagrindinius dėsnius, teiginius, principus bei jų priklausomybes,
- mokyti svarbiausių protavimo formų bei jų taikymo būdų,
- ugdyti pagrindinių dėsnių bei taisyklių taikymo gebėjimus ir įgūdžius,
- sudaryti mokomosios medžiagos modeliavimo įgūdžius,
- pratinti naudotis įrankiais, lentelėmis bei žinynais.

Matematikos uždavinių *lavinamieji* tikslai yra išmokyti:

- naudotis mokslinio pažinimo metodais,
- teisingai naudotis analogija ir intuicija,
- atlikti praktinį ir mintinį eksperimentą,
- sudarinėti hipotezes ir jas tikrinti,
- modeliuoti paprasčiausias situacijas,
- atskirti esminius dalykus nuo neesminių,
- sisteminti įgytas žinias.

Sprendžiant uždavinius, reikia vengti formalizmo. Formalizmas visų pirma pasireiškia tuo, kad mokiniai sprendžia uždavinius nesuprasdami jų esmės, o tik iš analogijos.

Labai dažnai spręsdami nelygybes intervalų metodu, mokiniai nesupranta sprendimo esmės. Todėl, pavyzdžiui, kvadratines nelygybes ($ax^2+bx+c \geqslant 0$ ar $ax^2+bx+c < 0$) tikslinga spręsti remiantis kvadratinio trinario grafiko eskizu (parabole). Tai nėra grafinis sprendimas, nes algebriškai randame kvadratinio trinario diskriminantą ir šaknis, o parabolė tik atskleidžia kvadratinio trinario savybes: su kuriomis x reikšmėmis jis teigiamas ir su kuriomis — neigiamas.

Sprendžiant rodiklines ar logaritmines nelygybes, mokiniai turi žinoti, kodėl, kai logaritmo pagrindas $a > 1$, nereikia keisti nelygybės ženklo, o kai $0 < a < 1$ — reikia.

Pavyzdys. Sprendžiant nelygybę $\ln(2-x) < \ln 3$, kartais klaidingai teigiama, kad funkcija $f(x) = \ln(2-x)$ yra didėjanti (nes $e > 1$). (Didėjanti yra funkcija $f(z) = \ln z$.) Minėta nelygybė sprendžiama taip:

$$\begin{cases} 2-x < 3, \\ 2-x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x < 2; \end{cases} \quad -1 < x < 2.$$

Atsakymas. $x \in (-1; 2)$.

Kai kurie mokiniai labai formaliai sprendžia procentų uždavinius.

Pavyzdys. Klasėje mokosi 25 mokiniai, iš jų 15 mergaičių. Kiek procentų visų mokinių sudaro mergaitės?

Sprendimas (mokiniškas).

$$\begin{matrix} 25 — 100\%, \\ 15 — x\%; \end{matrix} \qquad x = \frac{100 \cdot 15}{25} = 60.$$

Paprašytas paaiškinti sprendimą, mokinys atsako, kad taip mokė mokytoja. O kodėl taip reikia, jis nežino. Laikantis principo, kad „kodėl?“ svarbiau už „taip reikia“, šį uždavinį galima spręsti šitaip:

$$\begin{matrix} 25 — 100\%, & 1\% — 25/100, \\ 15 — x\%; & 1\% — 15/x. \end{matrix}$$

Vieną procentą tame pačiame uždavinyje turi atitikti lygūs skaičiai: $25/100 = 15/x$.

Uždavinio sprendimą galima užrašyti ir trumpiau:

$$\begin{matrix} 25 — 100\%, \\ 15 — x\%; \end{matrix} \qquad \frac{25}{100} = \frac{15}{x}; \quad x = 60.$$

Atsakymas. 60%.

N. Cibulskaitės, M. Stričkienės V klasės matematikos vadovėlyje labai formaliai aiškinami judėjimo uždaviniai. Kaip „iš debesų nukrinta“ greičio sąvoka. Pavyzdžiui, 93 puslapyje yra uždavinys: „Tomas dvi valandas važiavo dviračiu 13 km/h greičiu. Kiek kilometrų jis nuvažiavo?“

Penktokui greičio sąvoka nėra savaime suprantama. Judėjimo (kelio) uždavinius reikėtų spręsti tik po dešimtainių trupmenų daugybos ir dalybos. Nereikėtų skubėti įvesti greičio sąvokos ir kelio formulės. Uždavinį apie Tomo važiavimą reikėtų formuluoti šitaip: „Tomas per vieną valandą dviračiu nuvažiuoja 13 km. Kiek kilometrų jis nuvažiuos per 2 valandas?“ Tik išsprendus kelis tokio tipo uždavinius, galima paaiškinti greičio sąvoką, o po to ir formulę $s = vt$.

Minėtas judėjimo uždavinys yra tipiškas metodinio formalizmo pavyzdys. Užrašas km/h, kol mokiniai nežino paprastųjų trupmenų, nevartotinas. Reikia sakyti ir rašyti taip: „13 km per valandą greičiu“. Nereikėtų skubėti valandas žymėti „h“ — geriau rašyti „val“. Formulės $s = vt$ taip pat negalima „primesti“.

Pirmų dviejų krypčių (didaktinių, pažintinių) uždavinių sprendimai turi remtis teorija, o trečios krypties (kūrybiniai) kai kurie uždaviniai nuo teorijos mažiau priklauso. Tačiau reikia parinkti tokius kūrybinius uždavinius, kuriuos sprendžiant reikėtų tvirtų teorinių žinių.

Pavyzdys. Sprendžiant lygtį $\frac{|x-3|-2}{\sqrt{x-3}-\sqrt{2}} = 0$, reikia žinoti modulio, šaknies savybes ir sąlygą kada trupmena lygi nuliui, t. y.:

$$\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ x-3 = 2, \\ \sqrt{x-3} \neq \sqrt{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x = 5, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Atsakymas. Sprendinių nėra.

Nors matematikos, net ir valstybinio brandos egzamino užduotys — vien tik uždaviniai, tačiau ne tik dėstant, bet ir kartojant matematikos kursą, negalima ignoruoti teorijos. Kartojant nebūtina įrodinėti visų teoremų ir formulių. Reikia braižyti funkcijų grafikus ir įrodinėti bent svarbiausias, ypač algebros, kombinatorikos ir kai kurias kitas teoremas ar formules.

Tvirtos teorijos žinios padeda geriau suprasti uždavinių sprendimo metodus. Yra ir išimčių, pavyzdžiui, geometrijoje kūnų tūrių formulių išvedimai neturi ženklios įtakos atitinkamų geometrinių uždavinių sprendimams. Dėstant matematiką, reikia siekti teoremų ir formulių minimumo.