$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 3, 24–27

Matematinės literatūros, skirtos mokiniams, apžvalga

Pranas Survila

Vilniaus pedagoginio universiteto profesoriaus straipsnyje atkreipiamas dėmesys į metodines ir dalykines klaidas mokiniams skirtoje literatūroje, nagrinėjančioje kombinatorikos ir tikimybių teorijos temas.

Džiaugėmės 1995-aisiais metais sulaukę pirmųjų originalių lietuviškų V klasės matematikos vadovėlių, pritaikytų naujai pagrindinės mokyklos programai. Praėjo šešeri metai — turime naujus vadovėlius V–X klasėms. Prie tų vadovėlių priderintos knygos mokytojams, uždavinynai, įvairių užduočių ir pratybų sąsiuviniai. Tai vis ekspertų aprobuota, Švietimo ministerijos rekomenduota mokymosi literatūra. Praeinant gyrimo euforijai, kurią sukelia pasirodžiusios naujos originalios mokymo priemonės, metas rimtai jas perskaityti, pamąstyti, ar viskas jose tobula, gerai apgalvota, tinkamai pateikta, ar nėra metodinių ir dalykinių klaidų, ar ne per daug jose suvulgarinama matematika, ar visos jos reikalingos matematikos mokytojui ir mokiniui. Tai didelis ir svarbus kritikų, recenzentų, matematikos metodininkų, mokytojų darbas. Jo neatlikus, neparašius rimtų kritiškų recenzijų, sunku tikėtis, kad pakartotinės vadovėlių ir kitos mokymo matematinės literatūros laidos išvengs netikslumų ir klaidų.

Nepretenduodamas pateikti rimtos visos matematikos mokymo literatūros apžvalgos, šiame straipsnyje skiriu dėmesio tik vienai tematikai — kombinatorikai, statistikai, tikimybių skaičiavimui.

Galima būtų diskutuoti apie tai, ar reikėjo jau 1999 ir 2000 metais leisti „Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenis moksleiviams", kai dar tik 1998 metais buvo pakartotinai išleista Švietimo ministerijos grifą turinti A. Plikuso mokymo knyga „Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys", 2-asis pataisytas leidimas. (Beje, naudodamasis proga pareiškiu, kad esu recenzavęs 1993 metais tik 1-osios laidos knygelę. Taigi nesu parašęs antrosios laidos recenzijos — matyt, teks dar tą padaryti). Be to, VII–IX klasių vadovėliuose yra šios tematikos skyreliai. A. Steponavičiaus vadovėlyje „Matematika 10–12" (1998) yra net trys skyriai, paskirti šiai tematikai. Analogiškos temos populiariai ir trumpai pateiktos P. Vaško, Pr. Survilos knygoje „Pakartokime matematiką" (1997).

Tačiau knygelės išleistos, taigi galima apie jas kalbėti, vertinti, girti arba kritikuoti. Detaliau apžvelgsime [1] ir [2]. *Abi knygelės ekspertų komisijos neaprobuotos ir neturi Švietimo ministerijos grifo.* Dėl to jų nereikia iš anksto smerkti. Autoriai turi teisę leisti, ką parašę, ką sugeba parašyti, tačiau yra dar ir pareiga — neklaidinti skaitytojų, nes mokymuisi skirta literatūra turi būti be dalykinių klaidų. O jų minimose knygelėse nemažai. Aptarsime būdingiausias, labiausiai krintančias į akis.

Abiejose knygelėse kartotiniai kėliniai apibrėžiami neteisingai. Autoriai nesuprato, kad apskritai nėra „kėlinių su pasikartojimais". Yra n tipų elementų junginiai, sudaryti iš 1-ojo tipo k_1 elementų, 2-ojo tipo k_2 elementų, ..., n-ojo tipo k_n elementų. Iš viso $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ elementų. Taip sudaryti junginiai laikomi skirtingais, jei elementų tvarka skiriasi. Vadinasi, yra *kartotiniai kėliniai iš n tipų elementų*, t. y. *po k_1 1-ojo tipo, k_2 antrojo tipo, ..., k_n n-ojo tipo elementų*. Taigi būtina pabrėžti, jog kartotiniame kėlinyje svarbu: *iš kiek* (tipų) *elementų renkamės ir kiek kartų kiekvienas* (tipo) *elementas kartojasi.*

Ką teigia sakinys ([2], p. 19):

Jei yra n elementų, iš kurių kiekvienas atitinkamai gali kartotis $n_1, n_2, \ldots, n_r$ kartų, tai skirtingų kėlinių, kuriuos galima sudaryti iš duotųjų elementų, skaičius lygus

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!},$$

kur $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

Paanalizuokime frazę „kiekvienas atitinkamai gali kartotis $n_1, n_2, \ldots, n_r$ kartų". Jei atitinkamai, tai 1-asis — n_1 kartų, 2-asis — n_2 kartų, ..., r-asis — n_r kartų. O ką reiškia n_r? Pagal apibrėžimą išeitų, kad r-asis gali kartotis n_r kartų. Taigi turėtų būti $r = n$, nes kai $r < n$, lieka neaišku, kiek kartų gali kartotis elementai $(r+1)$-asis, ..., n-asis. Bet jei $r = n$, žymenys $n_1, n_2, \ldots, n_r$ netinka. Apie skaičius n_i nepasakyta nieko, ar gali būti $n_i = 0$, ar būtinai $n_i > 0$. Be to, sąlyga $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ yra ribojanti, nes iš jos išplaukia: jei yra n elementų, tai negalima sudaryti kartotinių kėlinių, kurie turėtų daugiau kaip n elementų.

[1] knygelėje (p. 27) pateikta kartotinių kėlinių skaičiaus formulė teisinga tik vienu atveju, kai $k_1+k_2+\cdots+k_r = n$, nors (p. 28) teigiama, kad taip yra visada.

Kitais atvejais ji neteisinga. Formulė turi būti tokia:

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}.$$

Abiejose knygelėse nėra pateikto gretinio su pasikartojimais apibrėžimo. [2] knygelėje (p. 21) jis vadinamas kėliniu su neribotu pasikartojimų skaičiumi. Abiejose knygelėse ([1], p. 37; [2], p. 22) pateikiamas mokinių vartojamas apibrėžimas:

Deriniai iš n elementų po k elementų su pasikartojimais apskaičiuojami pagal formulę:

$$C_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Čia kritikuotina ne formulė, o tai, kad autoriai *skaičiuoja derinius, o ne jų skaičių*. (Nesuprantantys kombinatorikos mokiniai, o ir studentai sako: C_n^k deriniai, $\overline{C_n^k}$ kartotiniai deriniai ir pan., taigi objektus sutapatina su jų skaičiumi).

Abiejose knygelėse nebandoma atskleisti loginių jungčių „ir", „arba" kombinatorikoje vietos ir reikšmės. Be to, [1] knygelėje (p. 6) netiksliai suformuluota kombinatorinė sudėties taisyklė. Iš jos neišplaukia, kad iš objekto A_i pasirinkimo būdų n_i nė vienas būdas nesutampa su objekto A_j nė vienu pasirinkimo būdu n_j, kai $i \neq j$. Tai grubi klaida. Turi būti aiškiai pasakyta, kad objektas (geriau elementas arba daiktas) gali būti renkamas iš aibių, kurios poromis neturi bendrų elementų — pasirinkimo būdai neturi sutapti. Ten pat (p. 7) sakoma:

Jei objektui A parinkti yra n būdų, o objektui B parinkti yra m būdų ir *jie turi k bendrų elementų*, tai pasirinkti A arba B yra $n + m - k$ būdų.

Ką reiškia „jie turi k bendrų elementų"?

Abiejose knygelėse nėra pakankamai išaiškinta ir aptarta, kas yra *elementarusis įvykis*.

Sakoma ([2], p. 32):

Jei nekreipsime dėmesio į bandymo rezultatų konkretų turinį, o domėsimės, pasirodė ar nepasirodė vienas ar kitas rezultatas, tai gauname elementariojo įvykio sąvoką.

Koks mokinys supras, kas čia pasakyta? Sakoma ([1], p. 23), kad „Elementarieji įvykiai yra tokie įvykiai, iš kurių susideda *kai kurie kiti* įvykiai". Bet, jei A, B, C yra įvykiai, tai kai kurie kiti, pavyzdžiui, $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$, iš jų susideda. Vadinasi, bet kurie įvykiai turėtų būti elementarieji. [2] knygelėje

(p. 49 ir 51) išvedant pilnos tikimybės formulę vartojama prieš tai niekur neaptarta sąvoka „pilna tarpusavyje nesutaikomų įvykių grupė", o aiškinant Bernulio formulę sakoma:

Kuriame nors bandyme (iš n nepriklausomų bandymų) dominantis įvykis A įvyks su tikimybe p.

Juk turi būti ne *kuriame nors, o kiekviename bandyme*.

Galima tik stebėtis apibrėžimais ([2], p. 70):

Binominio skirstinio matematinė viltis lygi vieno bandymo įvykio tikimybės ir bandymų skaičiaus sandaugai: $E(x) = np$.

Binominio skirstinio dispersija lygi .... $D(x) = npq$.

Tai juk ne apibrėžimai, o faktai, gaunami apskaičiavus binominio skirstinio matematinę viltį ir dispersiją.

Abiejose knygelėse aiškinant, kas yra imties histograma ir kaip ją nubraižyti, praleidžiamas esminis faktas, jog histogramos laužte ir horizontaliąja koordinačių ašimi apribotas plotas turi būti lygus vienetui. Taigi masteliai horizontaliojoje ir vertikaliojoje koordinačių ašyse turi būti atitinkamai suderinti. Jei klasės (grupės) ilgis yra vienetas, tai histogramoje klasę atitinkančio stulpelio aukštis turi būti lygus klasės santykiniam dažniui. Jei taip nėra, tada stulpelių aukštis bus proporcingas santykiniams dažniams. Histograma tam ir skirta, kad geometrine sąvoka — plotu galima būtų interpretuoti tikimybių $P(a \leqslant X \leqslant b)$ įverčius ir juos apytiksliai apskaičiuoti ([3], p. 332). Pateikiamos [1] knygelėje (p. 157–165) imčių diagramos ir histogramos savo išvaizda yra vienodi brėžiniai. Kam tada skirtingi pavadinimai? Nėra (diagramos) histogramos taikymo pavyzdžių ir uždavinių.

Knygelėse tik formaliai pateikiama atsitiktinio dydžio matematinė viltis ir dispersija. Norėtųsi, kad papildomoje literatūroje mokiniams būtų pateikta samprotavimų apie atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymą, apie tikimybių

$$P\{EX - k\sqrt{DX} < X < EX + k\sqrt{DX}\}$$

įverčius.

Kritinių pastabų tenka pareikšti ir dėl [2] knygelės uždavinių bei pateiktų jų sprendimų. Pavyzdžiui, 5 uždavinio (p. 12) sąlygoje nepasakyta, kad skaičius reikia sudaryti naudojant *visus* skaičiaus 3694 skaitmenis, o sprendimas pateiktas tik keturženkliams skaičiams.

Pateikto 2 uždavinio (p. 21) sąlyga tokia:

Klasėje yra 20 mokinių. Jie gavo po 1 uždavinį. Išsprendę jį įtraukiami į komandą. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti komandą?

Nurodytas sprendimas yra ne to uždavinio, nes jame apskaičiuota, kiek yra sekų, turinčių 20 narių, kurių kiekvienas paimtas iš aibės su dviem elementais. Teisingas uždavinio sprendimas būtų toks:

Mokykla sudarė komandą iš vieno mokinio — tik vienas mokinys išsprendė uždavinį — C_{20}^1 galimybių,

arba mokykla sudarė komandą iš 2 mokinių — tik du mokiniai išsprendė uždavinį — C_{20}^2 galimybių,

. . . .

arba mokykla sudarė komandą iš k mokinių, $1 < k < 20$ — tik k mokinių išsprendė uždavinį — C_{20}^k galimybių,

. . . .

arba mokykla sudarė komandą iš 20 mokinių — visi 20 mokinių išsprendė uždavinį — C_{20}^{20} galimybių.

Pasinaudoję sudėties taisykle, gauname galimybių sudaryti komandą skaičių $C_{20}^1 + C_{20}^2 + \cdots + C_{20}^{20} = 2^{20} - 1$.

Lygybę $C_{20}^0 + C_{20}^1 + \cdots + C_{20}^{20} = 2^{20}$ gauname pasinaudoję tapatybe

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n,$$

teisinga su kiekvienu natūraliuoju n, tačiau ji knygelėje pateikiama tik 25 puslapyje.

Taigi pateiktas uždavinys neiliustruoja kartotinių gretinių sąvokos „kėliniai su neribotu pasikartojimų skaičiumi".

Kai kurių ypač sudėtingų uždavinių, pateikti sprendiniai nepadeda rasti sprendimo būdo, o ir patys tokie uždaviniai niekaip nepažymėti tekste (pvz., 15 ir 16 uždaviniai p. 26, 27). Pastebėta nemažai (daugiau kaip 20) pateiktų neteisingų uždavinių sprendimų. Be to, yra nemažai redaguotinų (daugiau kaip 15) uždavinių sąlygų. Pavyzdžiui (p. 28), Susirinko 10 skirtingo ūgio išminčių. Keliais būdais jie gali susėsti prie apskrito stalo taip, kad *nors vienas išminčius pakeistų nors vieną kaimyną?*

Dėl [1] knygelės galima būtų pareikšti ir pagyrų: gausu išspręstų pavyzdžių, daug uždavinių savarankiškam darbui. Tačiau, be minėtų netikslumų, joje yra ir kitokių „perliukų“: „įvykių lyginumas“ (p. 28), įvykis „svarbesnis“ už įvykį (p. 79), „funkcija neegzistuoja“, „funkcija lygi nuliui“ (p. 99), „mediana yra skaičius, dalijantis imties *tūrį* į dvi lygias dalis“ (p. 135) ir pan.

Neįmanoma trumpame straipsnyje suminėti visų aptariamose knygelėse pasitaikančių netikslumų ir klaidų. Galima tik pasakyti, kad visos jos yra arba autorių aplaidumo, arba nekompetencijos rezultatas. Knygelės su tiek klaidų ir netikslumų neturėtų būti leidžiamos ir rekomenduojamos mokiniams, juoba kad jau yra pakankamai kvalifikuotos spausdintos literatūros. Kartu su knygelių autoriais didelė atsakomybė tenka ir recenzentams docentams D. Jurgaičiui, T. Tamošiūnui ir mokytojams V. Tamašauskui bei V. Balsevičiui, rekomendavusiems knygeles spausdinti.

1. V. Mockus, A. Jocaitė, *Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys moksleiviams*, Šiaulių universiteto leidykla, 1999.
2. P. Grebeničenkaitė, V. Tamašauskas, E. Tumėnaitė, *Trumpas kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos kursas moksleiviams*, Šiaurės Lietuva, Šiauliai, 2000.
3. P. Vaškas, P. Survila, *Pakartokime matematiką*, Šviesa, Kaunas, 1997.

APVALIOS SUKAKTYS 2002 METAIS

Prieš 400 metų gimė prancūzų matematikas Ž. Robervalis (*Gilles Roberval*, 1602–1675), vienas iš diferencialinio skaičiavimo pradininkų.

Prieš 250 metų gimė prancūzų matematikas A. M. Ležandras (*Legendre Adrien Marie*, 1752–1833). A. M. Ležandras gavo svarbių matematinės analizės, variacinio skaičiavimo, skaičių teorijos, geometrijos rezultatų.

Prieš 200 metų gimė norvegų matematikas N. H. Abelis (*Abel Niels Henric*, 1802–1829). Nors N. H. Abelis gyveno vos 27 metus, tačiau suspėjo gauti rezultatų, padariusių didelę įtaką matematikos raidai. Jis įrodė, kad aukštesnio negu ketvirtojo laipsnio lygtys bendruoju atveju neišsprendžiamos radikalais.

Prieš 200 metų gimė vengrų matematikas J. Bojajis (*Bolyai Janas*, 1802–1860), vienas iš neuklidinės geometrijos kūrėjų.