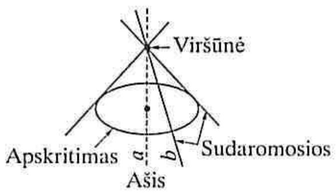
$\alpha+\omega$, 2001, Nr. 3, 15–23

Antrosios eilės ir antrosios klasės kreivės

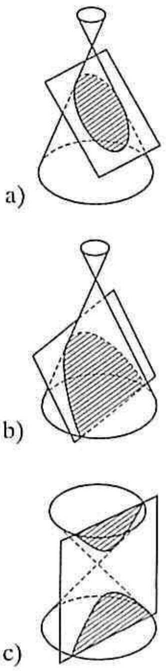
Petras Vaškas

Elipsė, hiperbolė ir parabolė yra klasikinės geometrijos kreivės. Straipsnio autorius — VU docentas rašo apie svarbiausias šių kreivių savybes. Kadangi šių kreivių lygtys yra antros eilės, pačios kreivės vadinamos antrosios eilės kreivėmis. O kas yra antrosios klasės kreivė, sužinosite perskaitę šį straipsnį.

1. Kūgio pjūviai



1 pav.



2 pav.

Iš pradžių apibendrinsime mokykliniame kurse vartojamą kūgio šoninio paviršiaus sąvoką.

Tiesę b apsukę apie ją kertančią tiesę a (1 pav.), gauname apskritąjį kūginį paviršių. Kad būtų trumpiau, jį vadinsime kūginiu paviršiumi, arba kūgiu. Kūgio viršūnė tą paviršių dalija pusiau.

Kūgio pjūviu vadinama kūgio ir plokštumos, neinančios per kūgio viršūnę, sankirta.

Iš kūgio apibrėžimo jau žinome, kad kūgio pjūvis gali būti apskritimas. Kiti galimi kūgio pjūviai yra elipsė (2 pav., a), parabolė (2 pav., b) ir hiperbolė (2 pav., c).

Sąlygas, kada koks pjūvis gaunamas, galima apibūdinti įvairiai.

Pavyzdžiui, jei plokštuma, einanti per kūgio viršūnę ir lygiagreti su pjūvio plokštuma, su kūgiu turi tik vieną bendrą tašką (kūgio viršūnę), tai pjūvis yra elipsė.

Jei tos plokštumos ir kūgio sankirta yra tiesė (kūgio sudaromoji, t. y. jei ta plokštuma kūgį liečia), tai pjūvis yra parabolė.

Jei tos plokštumos ir kūgio sankirta yra dvi tiesės (kūgio sudaromosios), tai pjūvis yra hiperbolė.

Šias sąlygas nesunku susieti su kampu tarp kūgio sudaromosios bei kūgio ašies ir kampu tarp pjūvio plokštumos bei kūgio ašies.

Kūgio pjūvio apribotą plokštumos dalį (taigi ir kūgio pjūvį) galima pamatyti kišeniniu žibintuvėliu įvairiais kampais apšvietus lygų paviršių.

Kūgio pjūvius nagrinėjo jau senovės graikai, norėdami sudaryti stačiakampį, kurio pagrindas lygus $2p$, lygiaplotį su stačiakampiu, kurio plotas lygus y^2. Daug kūgio pjūvių savybių ištyrė Apolonijas Pergietis (apie 262–190 m. pr. Kr.). Tas savybes apie 200 m. pr. Kr. jis aprašė 8 knygų veikale „Kūgio pjūviai". Iš tų laikų likę ir kūgio pjūvių graikiškos kilmės pavadinimai. Nenagrinėdami to uždavinio sprendimo, vėliau kūgio pjūvių pavadinimus paaiškinsime kitaip.

Dar paminėsime, kad senovės graikai kūgį kirsdavo kūgio sudaromajai statmena plokštuma, bet keisdavo kampą tarp kūgio sudaromosios ir kūgio ašies.

Saulės sistemos kūnai (tarp jų ir Žemė) apie Saulę skrieja elipsinėmis orbitomis. Elipsinėmis orbitomis apie Žemę skrieja jos dirbtiniai palydovai ir natūralusis palydovas — Mėnulis.

Į kitas planetas leidžiami kosminiai laivai, nustojus veikti varikliams, juda parabolinėmis arba hiperbolinėmis orbitomis. Tai priklauso nuo jiems suteikto greičio. Planetų skriejimo elipse dėsnį XVII a. pradžioje suformulavo Johanas Kepleris (1571–1630). Tą dėsnį XVII a. pabaigoje apibendrino Izaokas Niutonas (1643–1727). Jis pagrindė kitas galimas dangaus kūnų judėjimo trajektorijas.

Kitos kūgio pjūvių savybės atskleistos XVII a., sukūrus naujus tyrimo metodus: centrinį projektavimą, koordinačių metodą. Stereometrinis kūgio pjūvio apibrėžimas pakeistas planimetriniu: kūgio pjūviai apibrėžiami kaip tam tikros plokštumos taškų aibės. Pavyzdžiui, kūgio pjūviu (išskyrus apskritimą) vadinama visų plokštumos taškų, kurių kiekvieno atstumo r nuo pastovaus taško (vadinamo *židiniu*) ir atstumo d nuo pastovios tiesės (vadinamos *direktrise*) santykis $\frac{r}{d}$ yra pastovus: $\frac{r}{d} = e$. Skaičius e vadinamas kūgio pjūvio ekscentricitetu. Kai $0 < e < 1$, turime elipsę; kai $e = 1$ — parabolę; kai $e > 1$ — hiperbolę.

Kitas kūgio pjūvių bendras savybes atskleisime nagrinėdami jų lygtis.

2. Parabolės, hiperbolės, apskritimo ir elipsės lygtys

Mokykliniame kurse parabole vadinamas kvadratinės funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) grafikas. Jis tik padėtimi stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos atžvilgiu skiriasi nuo funkcijos $y = ax^2$ grafiko. Todėl parabolės lygtimi laikome lygtį $y = ax^2$, $a > 0$.

Hiperbole vadinamas funkcijos $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) grafikas. Jos lygtis yra $xy = k$, $k \neq 0$. Ši hiperbolė yra sudaryta iš dviejų dalių, kurios neribotai artėja prie dviejų tiesių (ašių Ox ir Oy). Tos tiesės vadinamos *hiperbolės asimptotėmis*. Yra hiperbolių, kurių asimptotės nėra viena kitai statmenos.

Nekartodami apskritimo apibrėžimo, priminsime, kad apskritimo, kurio centras yra koordinačių pradžia, o spindulys lygus a, lygtis yra $x^2 + y^2 = a^2$.

3 pav.

Elipse vadinama apskritimo lygiagrečioji projekcija. Sudarysime elipsės lygtį. Kad būtų paprasčiau, nagrinėjame apskritimo statmenąją projekciją (3 pav.). Taškas $M(x; y)$ yra apskritimo taškas, $M'(x'; y')$ — jo statmenoji projekcija (elipsės taškas). Kadangi

$$x' = x, \qquad y' = y\cos\alpha, \qquad \text{arba} \quad x = x', \qquad y = \frac{y'}{\cos\alpha},$$

ir $x^2 + y^2 = a^2$, tai

$$x'^2 + \frac{y'^2}{\cos^2\alpha} = a^2, \quad \text{arba} \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2\cos^2\alpha} = 1.$$

Pažymėję $a\cos\alpha = b$ ir dėl trumpumo praleidę brūkšnelius, gauname, kad elipsės lygtis yra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Kai $\cos\alpha = 1$, t. y. projektuojamoji plokštuma yra lygiagreti su projekcijų plokštuma, iš elipsės lygties gauname apskritimo lygtį. Taigi apskritimas yra elipsės atskiras atvejis.

Įrodoma, kad čia aptartos parabolė ir elipsė yra tokios pat, kaip ir 1 skyrelyje aptarti kūgio pjūviai.

Stačiakampėse Dekarto koordinatėse parabolės, hiperbolės ir elipsės lygtys

$$y = ax^2, \qquad xy = k\ (k \neq 0), \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

yra antrojo laipsnio. Pagal tai jos ir vadinamos antrosios eilės kreivėmis (algebrinis požymis). Vėliau pateiksime kreivės eilės geometrinę prasmę.

Dažnai sakome, kad bet kuri antrojo laipsnio lygtis, siejanti plokštumos taškų stačiakampes Dekarto koordinates, nusako antrosios eilės kreivę. Taip išplėsdami antrosios eilės kreivės sąvoką, nieko įdomesnio negautume. Pavyzdžiui, lygtis $x^2 - y^2 = 0$ nusako dvi tieses: $x - y = 0$ ir $x + y = 0$.

3. Tiesės ir antrosios eilės kreivės

Norėdami rasti elipsės ir tiesės bendrus taškus, turime išspręsti iš jų lygčių sudarytą sistemą

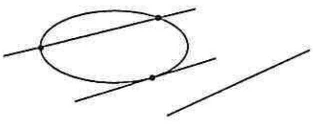
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = mx + n. \end{cases}$$

Iš antros lygties y įrašę į pirmą lygtį ir pertvarkę, gauname kvadratinę lygtį jų bendrų taškų abscisėms rasti:

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0.$$

Pagal kvadratinės lygties sprendinių skaičių, galimi šitokie atvejai:

- tiesė ir elipsė turi du skirtingus bendrus taškus (bendrasis atvejis);
- tiesė ir elipsė turi du sutampančius bendrus taškus (tokia tiesė vadinama elipsės liestine tame taške);
- tiesė ir elipsė neturi nė vieno bendro taško.



4 pav.

Schemiškai tai pavaizduota 4 paveiksle. Tokius pat atvejus gautume nagrinėdami tiesę ir hiperbolę, tiesę ir parabolę.

Vadinasi, galime teigti, kad antrosios eilės kreivės eilė parodo, kiek (daugiausia) bendrų taškų gali turėti ta kreivė ir tiesė.

4. Antrosios eilės kreivės liestinės

Rasime, kada ir kiek elipsės liestinių eina per tašką $(x_0; y_0)$. Tada turi būti $y_0 = mx_0 + n$, t. y. $n = y_0 - mx_0$, ir 3 skyrelyje gautos kvadratinės lygties diskriminantas lygus nuliui, t. y. $a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$. Į šią lygtį įrašę n išraišką ir pertvarkę, gauname lygtį ieškomos liestinės krypties koeficientui m rasti:

$$\left(a^2 - x_0^2\right)m^2 + 2x_0y_0m + \left(b^2 - y_0^2\right) = 0.$$

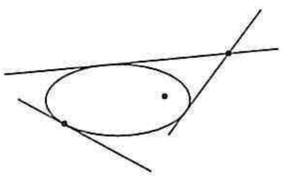
1) Tarkime, kad $a^2 - x_0^2 \neq 0$. Tada turime kvadratinę lygtį. Jos diskriminantas

$$D = 4\left(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2\right) = 4a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right).$$

Galimi trys atvejai. Jie pavaizduoti 5 paveiksle.

a) $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$. Tada gauname dvi m reikšmes, todėl per nagrinėjamą tašką eina dvi elipsės liestinės. Toks taškas vadinamas *elipsės išoriniu tašku*.

b) $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, t. y. nagrinėjamas taškas yra elipsės taškas. Per jį eina dvi sutampančios elipsės liestinės.



5 pav.

c) $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$. Per nagrinėjamą tašką neina nė viena elipsės liestinė. Toks taškas vadinamas *elipsės vidiniu tašku*.

2) Jei $a^2 - x_0^2 = 0$, t. y. $x_0 = \pm a$, tai lygtis $x = a$ arba $x = -a$ ir yra vienos liestinės lygtis. Kitos liestinės krypties koeficientui rasti liktų lygtis

$$2x_0y_0m + \left(b^2 - y_0^2\right) = 0.$$

Jei $y_0 \neq 0$, tai iš šios lygties randame antros liestinės krypties koeficientą.

Jei $y_0 = 0$, tai formaliai gauname $m = \infty$, taigi ir antra liestinė yra $x = a$ arba $x = -a$.

Panašiai galime išnagrinėti hiperbolės ir parabolės liestines.

Jeigu per plokštumos tašką bendruoju atveju eina dvi kreivės liestinės, tai ta kreivė vadinama *antrosios klasės kreive*, jeigu viena liestinė — kreivė vadinama *pirmosios klasės kreive* ir t. t.

Taigi gautą rezultatą galima suformuluoti šitaip: elipsė yra antrosios klasės kreive.

Apskritai kreivės eilė ir klasė nesutampa. Pavyzdžiui, tiesė su tiese dažniausiai turi vieną bendrą tašką ir todėl tiesė yra pirmosios eilės kreivė. Per taškus, nepriklausančius tiesei, neina nė viena nagrinėjamos kreivės liestinė ir todėl tiesė yra nulinės klasės kreivė.

Tik antrosios eilės kreivių eilė ir klasė sutampa.

Vėliau pateiksime ir kitokį (algebrinį) kreivės eilės paaiškinimą.

Dar sudarysime elipsės liestinės jos taške $(x_0;\, y_0)$ lygtį. Kadangi

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

(atvejo $a^2 - x_0^2 = 0$, $y_0 = 0$ jau neišskirsime), tai

$$a^2 - x_0^2 = \frac{a^2 y_0^2}{b^2}, \qquad m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

o ieškomoji lygtis yra

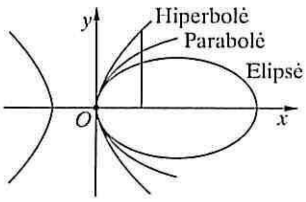
$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0), \quad \text{arba} \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Ji gaunama į lygtį $y = mx + n$ įrašius m ir n išraiškas.

5. Antrosios eilės kreivių palyginimas

Galima įrodyti, kad abscisių ašimi laikant antrosios eilės kreivės simetrijos ašį, ordinačių ašimi — kreivės liestinę jos viršūnėje (simetrijos ašies ir kreivės susikirtimo taške), gaunamos tokios kreivių lygtys:
$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$ ($p > 0$, $a > 0$) — elipsės,
$y^2 = 2px$ — parabolės,
$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$ — hiperbolės.

Iš čia gauname, kad:
$y^2 < 2px$ elipsės atveju,
$y^2 = 2px$ parabolės atveju,
$y^2 > 2px$ hiperbolės atveju.



6 pav.

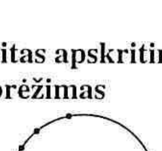
Taigi imant tuos pačius p ir x, elipsės taško ordinatė yra mažesnė už parabolės taško ordinatę (gr. *elleipsis* — trūkumas, praleidimas), o hiperbolės taško ordinatė yra didesnė už parabolės taško ordinatę (gr. *hyperbole* — permetimas, padidinimas) (6 pav.).

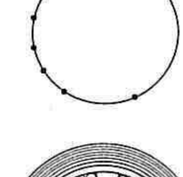
Parabolė laikoma lyg tam tikra norma (žr. 1 skyrelyje paminėtą stačiakampio radimo uždavinį).

6. Kitas apskritimo apibrėžimas

Apskritimas apibrėžiamas kaip plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo centro, aibė. Ji pavaizduota 7 a) paveiksle.

Tačiau apskritimą galima sudaryti ir kitaip. Vyzdinė diafragma, fotografinio objektyvo diafragma su keičiama skersmens D anga sudaryta iš kelių (keliolikos) į pjautuvą panašių lapelių, vienas kitą dengiančių taip, kad viduryje liktų anga (7 pav., b).


a)



b)

7 pav.

Taigi čia įsivaizduojame, kad apskritimas yra tam tikros kreivių (galima ir tiesių) šeimos gaubtinė, t. y. kreivė, kuri kiekviename taške liečia nagrinėjamos šeimos kreivę. (Kadangi apsiribojame antrosios eilės kreivėmis, tai bendro kreivės liestinės apibrėžimo ir nepateikiame.) Taip nagrinėjant, taškas „atsiranda" kaip dviejų tiesių sankirta. Todėl atskirai aptarsime taip gaunamų taškų koordinates.

7. Plokštumos taškų homogeninės koordinatės

Nagrinėkime dvi nelygiagrečias tieses. Sakykime, jų lygtys yra

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{ir} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

kintamųjų x ir y koeficientai neproporcingi, t. y. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Tų tiesių susikirtimo taško koordinatės yra iš jų lygčių sudarytos lygčių sistemos sprendinys:

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

arba

$$x = \frac{x'}{t'}, \quad y = \frac{y'}{t'}.$$

Taigi galima sakyti, kad tašką nusako skaičių x', y', t' santykiai

$$x' : y' : t' = (b_1c_2 - b_2c_1) : (c_1a_2 - c_2a_1) : (a_1b_2 - a_2b_1).$$

Skaičius x', y', t' vadiname *taško homogeninėmis koordinatėmis*. Aišku, kad čia $t' \neq 0$.

Nagrinėkime dvi lygiagrečiąsias tieses. Jų lygtis galima užrašyti šitaip:

$$ax + by + c_1 = 0, \qquad ax + by + c_2 = 0, \qquad c_1 \neq c_2.$$

Formaliai (pagal tas pačias taisykles) skaičiuodami santykius, gauname $x' : y' : t' = b : (-a) : 0$. Kartais patogu susikertančiųjų ir lygiagrečiųjų tiesių neskirti. Tada sakome, kad lygiagrečiosios tiesės susikerta be galo nutolusiame taške. Skaičius x', y', t' ($x' : y' : t' = b : (-a) : 0$) laikome nagrinėjamų lygiagrečiųjų tiesių bendro be galo nutolusio taško homogeninėmis koordinatėmis.

Taigi dabar tašką nusako trijų skaičių x', y', t', iš kurių bent vienas nelygus nuliui, santykiai $x' : y' : t'$. Kai $t' = 0$, turime be galo nutolusį tašką. Tada santykis $x' : y' = b : (-a)$ nusako tiesių kryptį, kuria taškas tolsta į begalybę.

8. Tiesių koordinatės

Tiesę nusako lygtis $ax + by + c = 0$, joje bent vienas iš koeficientų a ir b nelygus nuliui.

Koordinates x, y pakeitę homogeninėmis koordinatėmis ir pertvarkę, gauname tiesės homogeninę lygtį $ax' + by' + ct' = 0$. Tariame, kad visi be galo nutolę taškai sudaro be galo nutolusią tiesę ir jos lygtis yra $t' = 0$. Taigi lygtis $ax' + by' + ct' = 0$ tiesę nusako tada, kai bent vienas iš skaičių a, b, c nelygus nuliui.

Kadangi abi lygties puses galima dauginti iš nelygaus nuliui skaičiaus, tai tiesę vienareikšmiškai nusako santykiai $a : b : c$. Skaičiai a, b, c vadinami *tiesės homogeninėmis koordinatėmis*.

9. Lygtys, siejančios taškų ir tiesių koordinates

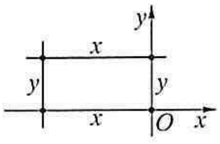
Nagrinėkime homogeninę lygtį $ax + by + ct = 0$, siejančią taško homogenines koordinates x, y, t (kad būtų trumpiau, brūkšnelių nerašome) ir tiesės homogenines koordinates a, b, c. Ją galima aiškinti dvejopai.

1) Jei tariame, kad $a : b : c$ yra fiksuoti, tai nagrinėjamoji lygtis sieja kintamas taško koordinates x, y, t ir nusako tiesę. Jos koordinačių a, b, c nesieja jokia lygtis. Sakoma, kad jas sieja nulinio laipsnio lygtis. Turime pirmosios eilės ir nulinės klasės kreivę (tiesę).

2) Jei tariame, kad $x : y : t$ yra fiksuoti, tai nagrinėjamoji lygtis sieja kintamas tiesės koordinates a, b, c ir nusako visas tieses, einančias per tą tašką. Jos „gaubia" tą patį tašką $(x : y : t)$. Šio taško koordinačių x, y, t nesieja jokia lygtis. Sakoma, kad jas sieja nulinio laipsnio lygtis. Turime nulinės eilės ir pirmosios klasės kreivę (tašką).

10. Tiesės koordinačių geometrinė prasmė

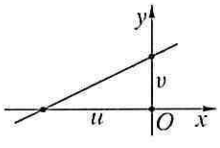
Kai plokštumoje turime stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą (dvi statmenas ašis ir ilgio matavimo vienetus kiekvienoje iš jų, 8 pav.), taško stačiakampės koordinatės (nehomogeninės) x, y yra to taško atstumai nuo koordinačių ašių, paimti su atitinkamais ženklais.



8 pav.

Apibrėžėme tiesės taškų homogenines koordinates, t. y. santykius $x : y : t$, ir užrašėme tiesės homogeninę lygtį $ax + by + ct = 0$. Remdamiesi tuo, kad į ją vienodai įeina santykiai $x : y : t$ ir $a : b : c$, ir tuo, kad santykiai $a : b : c$ vienareikšmiškai nusako tiesę, skaičius a, b, c pavadinome tiesės homogeninėmis koordinatėmis.

Kokia tiesės koordinačių geometrinė prasmė?



9 pav.

Išnagrinėkime atvejį, kai tiesė apibrėžta lygtimi $ax + by + c = 0$ ir nė vienas iš skaičių a, b, c nelygus nuliui, t. y. tiesė nėra lygiagreti nė su viena koordinačių ašimi ir neina per koordinačių pradžią (9 pav.). Aišku, kad tokios tiesės padėtį vienareikšmiškai nusako atkarpų, kurias ta tiesė iškerta koordinačių ašyse, ilgiai, paimti su atitinkamais ženklais. Pažymėkime juos raidėmis u ir v. Kad būtų trumpiau, juos vadinsime tiesiog atkarpomis, kurias tiesė iškerta koordinačių ašyse. Norėdami juos rasti, tarkime, kad tiesės lygtyje pirma $y = 0$ (tada $x = u$), po to $x = 0$ (tada $y = v$). Randame:

$$u = -\frac{c}{a}, \qquad v = -\frac{c}{b}.$$

Vadinasi,

$$a = -\frac{c}{u}, \qquad b = -\frac{c}{v}, \qquad a : b : c = \left(-\frac{1}{u}\right) : \left(-\frac{1}{v}\right) : 1.$$

Kaip ir taško koordinačių atveju, skaičius $-\frac{1}{u}$, $-\frac{1}{v}$ pavadinę tiesės nehomogeninėmis koordinatėmis ir prisiminę skaičių u ir v geometrinę prasmę, tiesės nehomogenines koordinates galime paaiškinti geometriškai: tiesės nehomogeninės koordinatės yra atvirkštinės atkarpų, kurias tiesė iškerta koordinačių ašyse, ilgiams ir skiriasi nuo jų ženklais.

Liko aptarti pradžioje išskirtus atvejus.

Kai $c = 0$, turime tiesę, einančią per koordinačių pradžią.

Kai $a = 0$, $b \neq 0$, turime tiesę, lygiagrečią su ašimi Ox ($u = \infty$). Skyrium imant, jei $c = 0$, — ašį Ox.

Kai $b = 0$, $a \neq 0$, turime tiesę, lygiagrečią su ašimi Oy ($v = \infty$). Skyrium imant, jei $c = 0$, — ašį Oy.

Pagaliau $a = 0$, $b = 0$ nusako be galo nutolusią tiesę.

11. Antrosios klasės kreivės

Nesunku įsitikinti, kad elipsės taškų homogenines koordinates x, y, t sieja lygtis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t^2,$$

o elipsės liestinių jos taškuose $(x_0 : y_0 : t_0)$ taškų homogenines koordinates x, y, t sieja lygtis

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = t_0 t; \qquad \text{be to,} \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = t_0^2.$$

Elipsė yra jos liestinių gaubtinė. Liestinės koordinatės yra

$$m : n : p = \frac{x_0}{a^2} : \frac{y_0}{b^2} : (-t_0),$$

arba

$$m = \frac{x_0}{a^2}k, \qquad n = \frac{y_0}{b^2}k, \qquad p = -t_0 k, \quad k \neq 0.$$

Iš čia radę x_0, y_0, t_0, įrašę į lygtį, kurią jie tenkina, ir pertvarkę, gauname

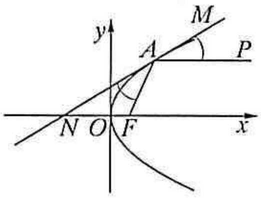
$$a^2m^2 + b^2n^2 = p^2.$$

Tai antrojo laipsnio lygtis, siejanti elipsės liestinių homogenines koordinates, t. y. elipsės, kaip tiesių šeimos gaubtinės, lygtis (primename, kad anksčiau turėjome elipsės, kaip taškų aibės, lygtį). Pagal šios lygties laipsnį, elipsė vadinama *antrosios klasės kreive* (žr. 4 skyrelį).

Panašiai galima išnagrinėti hiperbolės ir parabolės liestines.

12. Pabaiga

Pabaiga nereiškia, kad aptartos visos pagrindinės kūgio pjūvių savybės. Tai tik rašinio pabaiga. Kūgio pjūviai turi daug įdomių ir praktiškai pritaikomų savybių. Paminėsime dar vieną iš jų. Ji vadinama *parabolės optine* savybe.



10 pav.

Parabolės liestinė bet kuriame taške sudaro lygius kampus su spinduliu, nutiestu iš to taško į židinį (žr. 1 skyrelį), ir su parabolės simetrijos ašimi (10 pav.).

Šią savybę galima aiškinti ir taip. Jei parabolės židinyje yra šviesos šaltinis, tai nuo parabolės atsispindėję spinduliai eina lygiagrečiai su parabolės simetrijos ašimi ir sudaro lygiagrečiųjų spindulių pluoštą.

Šia savybe pasinaudojama gaminant prožektorių žibintus ir kt.

Elipsę sudaro plokštumos taškai, kurių atstumų iki dviejų fiksuotų taškų F, G suma yra pastovi. Taigi bet kokiam elipsės taškui M teisinga lygybė

$$MF + MG = c;$$

čia c yra skaičius.

O jeigu šioje lygybėje pakeistume sudėties ženklą į daugybos? Kreivė, kurios taškai M tenkina lygybę

$$MF \cdot MG = c,$$

vadinama Kasini ovalu. Tiesa, ovalas gaunamas tik tada, kai $FG \leqslant \sqrt{2c}$. Kitais atvejais gali būti gauta ir kreivė su „talija“, ir aštuoniukė, ir du ovalai.