$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 3, 6–11

Dvi matematikos brandos egzaminų užduotys

Algirdas Zabulionis
algisz@nec.lt

Valstybinis matematikos brandos egzaminas tapo jau įprastas: šią vasarą jis vyko trečiąjį kartą. Tad didesnių netikėtumų abiturientams ir jų mokytojams jau nebuvo. Pagrindinės sesijos egzamino užduotis žinoma pakankamai plačiai, jos rezultatų statistinė analizė yra Nacionalinio egzaminų centro interneto svetainėje *www.egzaminai.lt*. Tačiau dar egzistuoja antra ir tikrai mažiau žinoma pakartotinės egzaminų sesijos egzamino užduotis. Ši pakartotinė brandos egzaminų sesija rengiama tiems, kurie dėl rimtų priežasčių negalėjo laikyti egzamino pagrindinės sesijos metu. Brandos egzaminas yra kartu ir stojamasis į Lietuvos aukštąsias mokyklas, tad be šios sesijos nelaiku susirgęs abiturientas prarastų visus metus. Pakartotinės sesijos valstybinius brandos egzaminus, kurie vyksta tik apskričių centruose, laiko tik keliasdešimt moksleivių. Egzamino rengėjai stengiasi, kad abiejų egzaminų užduotys būtų ekvivalenčios. Kaip tai pasisekė šiais metais, galite spręsti patys, panagrinėję 2001 metų pakartotinės sesijos valstybinio matematikos brandos egzamino užduotį.

1. $a = 2$, $b = 3$. Apskaičiuokite $(2^{-a} + 2^{-b})^{-1}$.

A $\frac{3}{8}$ **B** $\frac{8}{3}$ **C** $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{2}{3}$ **E** 12

2. Jei $\frac{1}{F} = \frac{1}{H} - \frac{1}{G}$, tai $G =$

A $\frac{F-H}{FH}$ **B** $\frac{FH}{H-F}$ **C** $F - H$ **D** $\frac{1}{F} - \frac{1}{H}$ **E** $\frac{FH}{F-H}$

3. Išspręskite lygtį $\sqrt{7x} - \sqrt{3x} = 4$.

A 1 **B** $10 + 2\sqrt{21}$ **C** $10 - 2\sqrt{21}$ **D** $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ **E** $\sqrt{7} - \sqrt{3}$

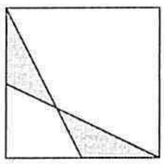
4. Lygtis $x + |x| = 0$

A sprendinių neturi **B** turi tik vieną sprendinį **C** turi tik du sprendinius
D turi tik tris sprendinius **E** turi be galo daug sprendinių

5. Skaičius $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ yra intervale

A $(-2; -1)$ **B** $(-1; 0)$ **C** $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ **D** $(1; 2)$ **E** $(2; 3)$

6. Kvadrato kraštinė lygi 2. Dvi jo viršūnės sujungtos su kraštinių vidurio taškais.



Dviejų pažymėtų trikampių plotų suma yra

A 1 **B** $\frac{2}{3}$ **C** $\frac{3}{4}$ **D** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E** $\frac{4}{3}$

7. Jei $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$, tai funkcijos f išvestinė $f'(\frac{\pi}{2}) =$

A $\sqrt{2}$ **B** 0 **C** 2 **D** $-\sqrt{2}$ **E** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **F** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. $\int\limits_0^2 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x =$

A $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **B** 6 **C** $\frac{8}{3}$ **D** $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ **E** $\frac{4}{3}$

9. Metami du standartiniai šešiasieniai lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad iškritusių akučių suma bus lygi 4?

A $\frac{2}{25}$ **B** $\frac{1}{18}$ **C** $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{1}{12}$ **E** $\frac{1}{6}$

(už teisingą 1–9 uždavinių atsakymą — po 1 tašką)

10. Prie skaičiaus 15 iš kairės ir iš dešinės parašius po vieną skaitmenį, galima gauti keturženklį skaičių, kuris dalosi iš 15. Raskite visus tokius keturženklius skaičius.

(3 taškai)

11. Darbo įrankių vertė mažėja taip: pirmaisiais po įsigijimo metais 25%, kiekvienais kitais metais — po 30% likusios vertės. Po kiek metų įrankių vertė bus mažesnė nei 30% pradinės vertės?

(3 taškai)

12. Keturi teigiami skaičiai b_1, b_2, b_3 ir b_4 sudaro geometrinę progresiją. Raskite šiuos skaičius, jei $b_1 \cdot b_3 = \frac{4}{9}$ ir $b_2 \cdot b_4 = \frac{4}{81}$.

(3 taškai)

13. Išspręskite lygtį $2^{x+1} + 2^{2-x} = 9$.

(3 taškai)

14. Išspręskite nelygybę $x - 1 + \frac{1}{x+3} \leqslant 0$.

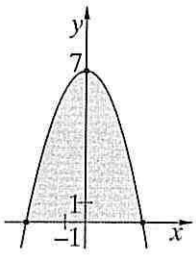
(3 taškai)

15. Išspręskite lygtį $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$.

(3 taškai)

16. Brėžinyje pavaizduota figūra, apribota kreivėmis $y = 7 - x^2$ ir $y = 0$. Apskaičiuokite šios figūros plotą.

(3 taškai)



17. Atsitiktinai paimti du neneigiami vienženkliai sveikieji skaičiai. Kokia tikimybė, kad šių skaičių suma yra dviženklis skaičius?

(3 taškai)

18. Prie lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AD ir BC į išorę nubraižyti lygiakraščiai trikampiai AED ir BKC. Įrodykite, kad atkarpa KE dalija lygiagretainio įstrižaines pusiau.

(4 taškai)

19. Trikampio ABC viršūnės yra taškai $A(2;1;2)$, $B(3;3;4)$ ir $C(4;4;1)$. Kuris šio trikampio kampas yra didžiausias? Atsakymą pagrįskite.

(3 taškai)

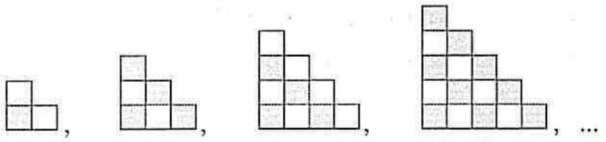
20. 1. Į spindulio R sferą įbrėžtas kubas. Apskaičiuokite šio kubo kraštinės ilgį.

(1 taškas)

2. Spindulio R sfera kertama plokštuma, einančia per jos centrą. Į gautąją sferos nuopjovą (pussferę) įbrėžtas kubas taip, kad jo pagrindas yra sferą kertančioje plokštumoje, o kitos keturios viršūnės — sferos paviršiuje. Apskaičiuokite šio kubo ir į sferą įbrėžto kubo (žr. 20.1) tūrių santykį.

(3 taškai)

21. Paveikslėlyje pavaizduota figūrų sekos, sudarytos iš juodų ir baltų kvadratėlių, pradžia.



1. Kiek juodų kvadratėlių figūrose, kurių pagrinduose yra 7 ir 8 kvadratėliai?

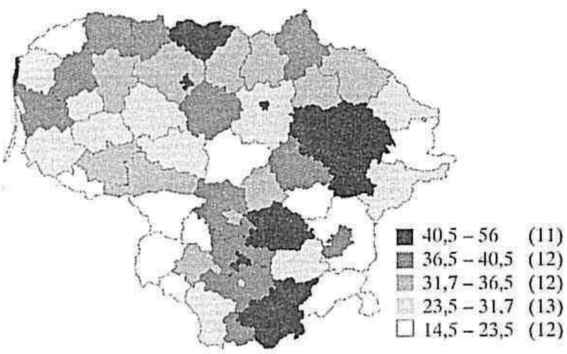
(2 taškai)

2. Figūros pagrinde yra n kvadratėlių. Raskite juodų ir baltų kvadratėlių skaičių santykį.

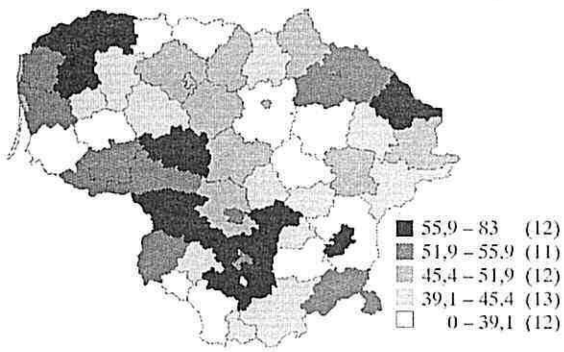
(5 taškai)

22. Jonas nori aptverti stačiakampio formos $242\,\mathrm{m}^2$ ploto sklypą. Iš vienos pusės sklypas turi būti aptvertas gyvatvore, iš kitų trijų — tvora. Vieno metro gyvatvorės kaina yra 75 Lt, vieno metro tvoros — 25 Lt. Ar užteks 2100 Lt šiam sklypui aptverti? Atsakymą pagrįskite.

(4 taškai)



Laikiusių matematikos VBE abiturientų dalis (%) savivaldybėse



Labai gerai išlaikiusių (gavusių daugiau kaip 50 balų) matematikos VBE abiturientų dalis (%) savivaldybėse

Kitą matematikos brandos egzamino užduotį noriu pristatyti plačiau. Centralizuotų brandos egzaminų idėjos, sklandančios po visą Europą, neaplenkė ir Rusijos. Šioje šalyje taip pat bandoma vykdyti brandos egzaminus, kurie būtų vertinami centralizuotai, o rezultatais pasitikėtų visos aukštosios mokyklos (t. y. neorganizuotų savų stojamųjų egzaminų). Tačiau Rusijos mastai nepalyginami su mūsų šalies: milijonai abiturientų, tūkstančiai vidurinių mokyklų ir universitetų. Kaip spręsti, pavyzdžiui, laiko juostų problemą: kaip gali vieną egzamino užduotį tuo pačiu metu spręsti abiturientai ir Vladivostoke, ir Kaliningrade? Kaip paskirstyti užduotis, vertinti darbus, garantuoti slaptumą ir pan.? Tačiau tai jau organizacinės problemos. O šią 2001 metų vasarą vyko tik vieningo valstybinio egzamino (ege — *edinyj gosudarstvenij ekzamen*) bandymai 5 regionuose: Čiuvašijos, Saha (buvusi Jakutija) ir Marij El respublikose bei Samaros ir Rostovo srityse. Bandomuosius egzaminus laikė apie 30 tūkstančių abiturientų. Matematikos egzamino neišlaikė 7–15 proc., o labai gerai išlaikė 6–10 proc. moksleivių.

Parengta net 15 matematikos egzamino užduočių variantų. Kiekviena užduotis buvo iš trijų dalių: uždavinių su pasirenkamaisiais atsakymais, trumpo atsakymo (žodis, skaičius) ir tradicinių sprendimo ar įrodymo reikalaujančių matematikos uždavinių. Užduotys buvo rengiamos taip, kad maksimalų skaičių taškų surinktų ne daugiau kaip 0,1 proc. moksleivių, o mokykliniam penketukui reiktų surinkti 70–80 proc. taškų. Vertinimas buvo dvigubas: be tradicinio penkiabalio pažymio (jis buvo įrašytas brandos atestate), moksleivis gavo įvertinimą pagal šimtabalę skalę, į kurį buvo atsižvelgta stojant į aukštąsias mokyklas. Skirtingai nei Lietuvos valstybinių brandos egzaminų balas, Rusijos valstybinio egzamino šimtabalis vertinimas susietas su teste surinktų taškų procentine dalimi, o ne su visų egzaminą laikiusiųjų moksleivių rezultatais. Moksleiviai laikė egzaminą lokaliuose centruose. Pirmosios ir antrosios egzamino dalių atsakymus reikėjo įrašyti į specialius atsakymų blankus, kurie optiniais skaitytuvais buvo nuskaitomi į kompiuterinę duomenų bazę. Trečiosios dalies uždavinių sprendimus vertino mokytojai ir pildė specialius vertinimo blankus. Visa informacija apie moksleivių darbus buvo perduodama į egzaminų centrą Maskvoje, ir ten darbai buvo vertinami. Tad egzaminas tikrai buvo centralizuotas.

Pažiūrėkime, kokia buvo viena iš matematikos egzamino užduočių. Dalis jos uždavinių kur kas sunkesni nei Lietuvos brandos egzaminų. Kiek mūsų abiturientų galėtų tikėtis aukščiausių įvertinimų?

Užduotis išversta iš „Učitelskaja gazeta“, 2001 08 21, Nr. 34–35.

Prie kiekvieno A grupės uždavinio pateikti keli atsakymai, iš kurių tik vienas teisingas. Moksleivis turėjo jį nurodyti.

A1. Apskaičiuokite reiškinio $81^{\frac{1}{4}} - 3\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$ reikšmę.

A -6 **B** $\sqrt{3}$ **C** 6 **D** 11,25.

A2. Suprastinkite reiškinį $\frac{a^{\frac{2}{3}}-16}{a^{\frac{1}{3}}-4} - a^{\frac{1}{3}}$.

A -4 **B** 4 **C** $-2a^{\frac{1}{3}}$ **D** 0

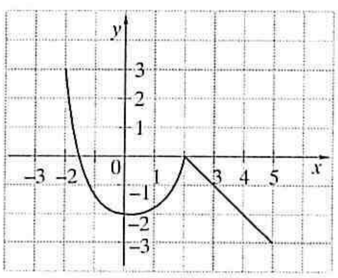
A3. Suprastinkite reiškinį $2^{\log_2 7} + \log_5 75 - \log_5 3$.

A 9 **B** 32 **C** 51 **D** 4

A4. Išspręskite nelygybę $(\frac{1}{4})^{x-3} < \frac{1}{16}$.

A $(-\infty; 5)$ **B** $(-\infty; 7)$ **C** $(5; +\infty)$ **D** $(7; +\infty)$

A5. Funkcija $y = f(x)$ apibrėžta grafiku. Nurodykite jos didėjimo intervalus.



A $(-2; 0)$ **B** $[-2; 2]$ **C** $(-2; -1)$ **D** $[0; 2]$

A6. Suprastinkite reiškinį $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

A $3\cos\alpha$ **B** $\cos\alpha$ **C** 0 **D** $2\cos\alpha - \sin\alpha$

A7. Raskite funkcijos $g(x) = 3x^4 - \sin x + 5$ išvestinę.

A $g'(x) = 12x^3 - \cos x$ **B** $g'(x) = 4x^3 + \cos x$ **C** $g'(x) = 12x^3 + \cos x + 5$
D $g'(x) = 12x^3 - \cos x + 5$

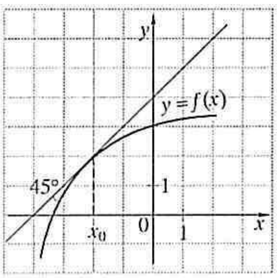
A8. Nurodykite intervalą, kuriame yra lygties $\log_2(x + 1) = 4$ sprendinys.

A $(8; 10)$ **B** $(14; 16)$ **C** $(6; 8)$ **D** $(4; 6)$

A9. Raskite funkcijos $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ apibrėžimo sritį.

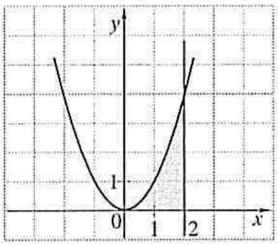
A $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$ **B** $[-2; 1)$ **C** $(-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$ **D** $(-2; 1)$

A10. Raskite funkcijos $y = f(x)$ išvestinę taške x_0.



A -2 **B** 2 **C** -1 **D** 1

A11. Raskite plotą figūros, kurią riboja funkcijų $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$ grafikai.



A 8 **B** $2\frac{2}{3}$ **C** 4 **D** $2\frac{1}{3}$

A12. Išspręskite lygtį $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$.

A $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ **B** $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ **C** $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
D $(-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

B grupės uždavinių atsakymus — sveikuosius skaičius moksleivis turėjo užrašyti į atitinkamą grafą.

B1. Išspręskite lygtį $\sqrt{2x + 7} - 2 = x$.

B2. Raskite reiškinio $\frac{\sin^2 27° - \sin^2 63°}{\sin 18° \cdot \cos 18°}$ reikšmę.

B3. Raskite funkcijos $f(x) = x^2 \cdot e^x$ maksimumo tašką.

B4. Raskite lygties $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$ mažesnįjį sprendinį.

B5. Kateris pasroviui upe iš taško A į B plaukė 3 valandas, o iš B į A plaukė 5 valandas. Kiek laiko iš A į B plaukia plaustas?

B6. Raskite nelygybės $(|x+2|-3)\cdot(\sin x-\pi)\geqslant 0$ sveikųjų sprendinių skaičių.

B7. Raskite didžiausią sveikąją parametro c reikšmę, su kuria lygčių sistemos $\begin{cases} x+7y=c, \\ 2x-y=5 \end{cases}$ sprendinys tenkina nelygybę $x>y-2$.

B8. Taisyklingos trikampės piramidės aukštinė lygi 2, dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs 30°. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

B9. Kūgio pagrindo spindulys lygus 4, aukštinė lygi $4\sqrt{3}$. Į kūgį įbrėžta trikampė prizmė, kurios visos briaunos lygios. Raskite prizmės tūrį.

C grupės uždavinių sprendimus ir teisingus atsakymus moksleiviai turėjo užrašyti specialiuose blankuose.

C1. Kiekvienai leistinai parametro a reikšmei išspręskite nelygybę $\log_{\operatorname{tg} a}(3x+13)>2\log_{\operatorname{tg} a}(x+3)$.

C2. Išspręskite lygtį $\cos^2(x\cdot\sin x)=1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}$.

C3. Raskite sveikuosius lygties $(6-x)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x+9)=24x^2$ sprendinius.