$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 2, 89–90

Savo sprendimus siųskite adresu: „Alfa plius omega“ redakcija, Akademijos g. 4, LT-2600, Vilnius.

ε. 104

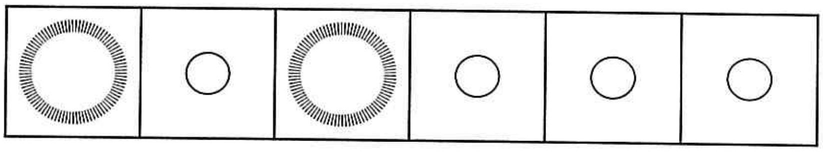
Gintas mokosi dauginti skaičius. Padauginęs 64 iš 48 jis gavo 3112. Mokytojas pažiūrėjo į sąsiuvinį ir tarė: „Padarei vienintelę klaidą — kai dauginai 6 iš 8“. Kam, Ginto manymu, lygi skaičių 6 ir 8 sandauga?

ε. 105

Trys draugai gyvena toje pačioje gatvėje, jų namų numeriai — 34, 36, 38. Draugai skiriasi savo plaukų spalva ir pomėgiais. Brunetas mėgsta nardyti. Blondinas gyvena name, kurio numeris dalijasi iš 4. Futbolininko namo numerio skaitmenų suma lygi futbolininkų komandos narių skaičiui. Kuriame name gyvena muzikantas?

ε. 106

Ant stalo įrengtos šešios lemputės. Dvi iš jų dega. Palietus vieną lemputę, gretimos pakeičia savo padėtį: nedegančios užsidega, degančios užgęsta. Kiek mažiausiai lempučių reikia paliesti, kad visos užgestų?



ε. 107

Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, turintį tokią savybę: bet kurį jo skaitmenį pakeitus bet kuriuo kitu gaunamas sudėtinis skaičius (t. y. jis dalijasi ne tik iš vieneto ir paties savęs).

ε. 108

Tomo skaičiuoklis sugedo: užrašant skaičius galima naudotis tik trimis skaitmenų 1–9 mygtukais. Naudojantis šiais mygtukais, galima sudaryti šešis dviženklius skaičius, kurių kiekvieno skaitmenys skiriasi. Visus šiuos skaičius sudėjus, pasirodė, kad suma užrašoma tais pačiais trimis skaitmenimis, kurių mygtukai veikia! Kokie tai skaitmenys?

Mūsų skyrelyje — 42-osios tarptautinės jaunųjų matematikų olimpiados, vykusios 2001 liepos 8–9 dienomis Vašingtone, uždaviniai.

α. 239

Apskritimo, apibrėžto apie smailųjį trikampį ABC, centras yra taške O, aukštinė, nubrėžta iš viršūnės A, kerta kraštinę BC taške P. Tegu $\angle BCA \geqslant \angle ABC + 30°$. Įrodykite, kad $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

α. 240

Įrodykite, kad su visais teigiamais skaičiais a, b ir c teisinga nelygybė

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

α. 241

Matematikų varžybose dalyvavo dvidešimt viena mergaitė ir dvidešimt vienas berniukas.

- Kiekvienas dalyvis išsprendė daugiausiai šešis uždavinius.
- Kiekvienai mergaitės ir berniuko porai yra bent vienas uždavinys, kurį išsprendė abu šie dalyviai.

Įrodykite, kad yra uždavinys, kurį išsprendė mažiausiai trys mergaitės ir trys berniukai.

α. 242

Tegu n yra nelyginis, didesnis už 1 skaičius ir $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — sveikieji skaičiai. Kiekvienam skaičių $1, 2, \ldots, n$ kėliniui $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pažymėkime

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Įrodykite, kad egzistuoja du skirtingi kėliniai b, c, jog $S(b) - S(c)$ dalijasi iš $n!$.

α. 243

Trikampyje ABC atkarpos AP ir BQ yra kampų BAC ir ABC pusiaukampinės, taškai P ir Q yra kraštinėse BC ir CA. Žinoma, kad $\angle BAC = 60°$ ir $AB+BP = AQ+QB$. Kokios yra galimos trikampio ABC kampų reikšmės?

α. 244

Tegu a, b, c, d yra natūralieji skaičiai, $a > b > c > d > 0$, tenkinantys lygybę

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Įrodykite, kad skaičius $ab + cd$ nėra pirminis.