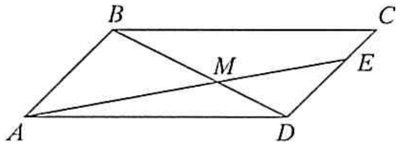
$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 2, 77–82

Išleista antroji LJMM laida

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus, Juozas Šinkūnas
antanas.apynis@maf.vu.lt, eugenijus.stankus@maf.vu.lt,
sinkunas@vpu.lt

2001 m. balandžio mėn. 7 d. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete vyko baigiamasis antrosios LJMM laidos uždavinių sprendimo konkursas, kuriame dalyvavo 216 moksleivių (į mokyklą 1999 m. buvo įstoję 445 moksleiviai). Šiame konkurse moksleiviai per 1 valandą turėjo išspręsti 5 uždavinius iš nagrinėtų temų. Pateikiame šią užduotį:

1. Raskite parametro q reikšmę, su kuria lygties $x^2 - 5x + q = 0$ šaknų kvadratų suma lygi 21.
2. Išspręskite nelygybę $\sqrt{1 - 2x + x^2} + |3 - x| > 4$.
3. Į statųjį trikampį, kurio įžambinė lygi 10 cm, įbrėžtas apskritimas. Raskite trikampio perimetrą, jeigu apskritimo spindulys yra 2 cm.
4. Keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis, $DE = \frac{2}{3}DC$. Atkarpa AE kerta įstrižainę BD taške M. Raskite figūros $MBCE$ plotą, jeigu $S_{ABCD} = 120\,\mathrm{cm}^2$.



5. Dvi rankininkės — Marytė ir Onutė meta po vieną baudinį. Tikimybė, kad Marytė pelnys įvartį, lygi 0,65. Tikimybė, kad Onutė pelnys įvartį, lygi 0,8. Kokia tikimybė, kad bent viena iš rankininkių nepelnys įvarčio?

Aštuoni moksleiviai išsprendė visus penkis uždavinius ir tapo konkurso nugalėtojais

VYTAUTAS BALSYS	VTGTM licėjus
VIOLETA BLADŽIŪNAITĖ	VTGTM licėjus
ANASTAZIJA GONČAROVA	Visagino „Gerosios vilties" vidurinė mokykla
ROMAS KARDOKAS	Vilniaus Užupio vidurinė mokykla
MARIUS NOREIKA	Garliavos Juozo Lukšos gimnazija
INDRĖ PETRAUSKAITĖ	VTGTM licėjus
JEROSLAVAS PETROVSKIS	Visagino „Gerosios vilties" vidurinė mokykla
VYKINTAS STRIUŽAS	Švenčionėlių vidurinė mokykla

Dvylikai moksleivių nepavyko išspręsti nė vieno uždavinio.

Balandžio 7 dieną mokyklos baigimo pažymėjimai buvo įteikti 202 moksleiviams. Dar 14 moksleivių LJMM pažymėjimus gavo per papildomą baigiamąjį konkursą balandžio 28 dieną. Norėtųsi paminėti miestus ir mokyklas, iš kurių LJMM klausytojų buvo daugiausia. Pažymėjimus gavo 35 Vilniaus miesto, 24 — Kauno miesto, 29 — Panevėžio miesto moksleiviai. Konkurse daugiausia moksleivių dalyvavo iš J. Balčikonio gimnazijos (28 moksleiviai), Garliavos Juozo Lukšos gimnazijos (21 moksleivis), Ukmergės „Šilo" vidurinės mokyklos (12 moksleivių), Vilniaus „Gabijos" gimnazijos (9 moksleiviai) ir VTGTM licėjaus (9 moksleiviai).

Atvykusieji į konkursą turėjo progos susipažinti su Lietuvos matematikų draugijos pirmininku prof. J. Kubiliumi, kuris ir įteikė mokyklos baigimo pažymėjimus. Kol darbai buvo tikrinami, moksleiviai išklausė docentų V. Stakėno ir A. Juozapavičiaus bei daktaro R. Kašubos paskaitas. Įteikimo ceremonijoje taip pat dalyvavo Kauno technologijos universiteto Fundamentaliųjų mokslų fakulteto dekanas prof. V. Pekarskas, Vilniaus pedagoginio universiteto prorektorius doc. V. Bernotas, Šiaulių universiteto prorektorius doc. D. Jurgaitis. Moksleiviai iš jų sužinojo apie stojimo į šiuos universitetus bei mokymosi juose sąlygas.

Apžvelgiant per dvejus mokslo metus nagrinėtas temas, pastebėta, kad moksleiviai lengviausiai sprendė pirmosios (Funkcija) ir šeštosios (Indukcija) temų uždavinius. Sunkiausiai sekėsi septintoji (Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės) ir aštuntoji (Koordinačių sistemos. Žemėlapiai) temos. Pateikiame kiekvienos užduoties „sunkiausią" (už kurį surinkta mažiausiai balų) uždavinį ir jo sprendimą.

I užduotis. Funkcija

Viename inde yra 5 kg druskos tirpalo, o kitame — 20 kg kito druskos tirpalo. Garuojant vandeniui, druskos koncentracija pirmame inde padidėjo m kartų, o antrame inde — n kartų. Koks vandens kiekis išgaravo iš abiejų indų kartu, jeigu žinoma, kad $m \cdot n = 9$?

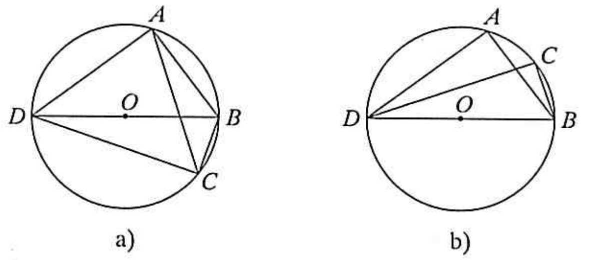
Sprendimas. Sakykime, pirmame ir antrame induose yra z ir t kg druskos, o iš jų išgaravo atitinkamai x ir y kg vandens. Tuomet pagal uždavinio sąlygą: $\frac{z}{5-x}\Big/\frac{z}{5} = m$ ir $\frac{t}{20-y}\Big/\frac{t}{20} = n$. Iš čia $\frac{5}{5-x} = m$ ir $\frac{20}{20-y} = n$. Iš šių lygybių gauname: $x = 5 - \frac{5}{m}$, $y = 20 - \frac{20}{n}$. Vadinasi, iš abiejų indų išgaravusio vandens kiekis yra $x + y = 25 - \frac{5}{m} - \frac{20}{n}$. Kadangi $m \cdot n = 9$, tai $n = \frac{9}{m}$ ir $x + y = 25 - \left(\frac{5}{m} + \frac{20}{9}m\right)$. Kita vertus, remdamiesi dviejų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkio savybe, gauname: $\frac{5}{m} + \frac{20}{9}m \geqslant 2\sqrt{\frac{5}{m} \cdot \frac{20}{9} \cdot m} = \frac{20}{3}$. Todėl $x + y \leqslant 25 - \frac{20}{3} = 18\frac{1}{3}$. Taigi iš abiejų indų negali išgaruoti daugiau kaip $18\frac{1}{3}$ kg vandens. Jeigu $\frac{5}{m} = \frac{20}{9}m$, t. y. $m = \frac{3}{2}$, tai šių skaičių aritmetinis vidurkis lygus geometriniam vidurkiui $x + y = 25 - \frac{20}{3} = 18\frac{1}{3}$ (kg). Iš pirmojo indo išgaravo $x = 5 - \frac{5}{m} = \frac{5}{3}$ (kg), o iš antrojo — $y = 20 - \frac{20}{9}m = \frac{50}{3}$ (kg) vandens.

Atsakymas. Iš abiejų indų išgaravo ne daugiau kaip $18\frac{1}{3}$ kg vandens. Jei $m = \frac{3}{2}$, $n = 6$, tai išgaravo lygiai $18\frac{1}{3}$ kg vandens.

II užduotis. Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai

Apskritimo spindulys yra R, stygų AB ir BC ilgiai lygūs a ir b. Apskaičiuokite stygos AC ilgį.

Sprendimas. Galimi du atvejai:



a) Brėžiame skersmenį BD ir keturkampiui $ABCD$ taikome Ptolemajo teoremą:
$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot DB$.
Kadangi trikampiai ADB ir DCB yra statieji, tai $AD = \sqrt{4R^2 - a^2}$, $DC = \sqrt{4R^2 - b^2}$.
Taigi $a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2} = 2R \cdot AC$.
Iš čia randame $AC = \frac{a\sqrt{4R^2-b^2}+b\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$.

b) BD — skersmuo, $AC \cdot BD + CB \cdot AD = AB \cdot CD$ ir $AC = \frac{a\sqrt{4R^2-b^2}-b\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$.

Atsakymas. $AC = \frac{a\sqrt{4R^2-b^2}+b\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$, kai taškai A ir C yra skirtingose skersmens, einančio per tašką B, pusėse ir $AC = \frac{a\sqrt{4R^2-b^2}-b\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$, kai toje pat pusėje.

III užduotis. Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose

Įrodykite nelygybę $|ac - bd| \leqslant 1$, kai $a^2 + b^2 = 1$ ir $c^2 + d^2 = 1$.

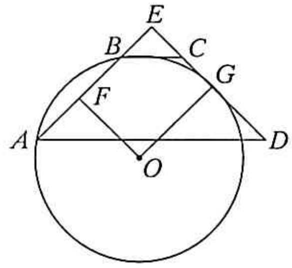
Sprendimas.

1 būdas. Kai $a^2+b^2 = 1$ ir $c^2+d^2 = 1$, tai $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = 1$, $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 = 1$, $a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 + a^2d^2 + 2abcd = 1$, $(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = 1$, $(ac - bd)^2 = 1 - (bc + ad)^2$. Kadangi $(bc + ad)^2 \geqslant 0$, tai $(ac - bd)^2 \leqslant 1$, $|ac - bd| \leqslant 1$.

2 būdas. Su bet kuriais realiaisiais skaičiais a, b, c ir d teisingos šios nelygybės:
$(a + c)^2 + (b - d)^2 \geqslant 0$, $(a - c)^2 + (b + d)^2 \geqslant 0$.
Iš pirmosios nelygybės gauname: $2(ac - bd) \geqslant -(a^2 + c^2 + b^2 + d^2)$, o iš antrosios — $2(ac - bd) \leqslant a^2 + c^2 + b^2 + d^2$.
Kai $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, turime:
$ac - bd \geqslant -1$ ir $ac - bd \leqslant 1$, t. y. $|ac - bd| \leqslant 1$.

IV užduotis. Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai

Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 39\,cm$ ir $BC = 26\,cm$, o šoninės kraštinės $AB = 5\,cm$ ir $CD = 12\,cm$, Raskite spindulį apskritimo, kuris eina per viršūnes A ir B ir liečia kraštinę CD arba jos tęsinį.



Sprendimas. Pratęskime šonines trapecijos kraštines AB ir CD, tegu jos susikerta taške E. Sakykime, $BE = x$, o $EC = y$. Pagal Talio teoremą:

1) $\frac{BE}{EA} = \frac{BC}{AD}$, t. y. $\frac{x}{x+5} = \frac{26}{39}$. Iš čia $x = 10\,\mathrm{cm}$.
2) $\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{AD}$, t. y. $\frac{y}{y+12} = \frac{26}{39}$. Iš čia $y = 24\,\mathrm{cm}$.

Nesunku patikrinti, kad $BC^2 = EB^2 + EC^2$, taigi trikampis BEC yra statusis. Iš apskritimo centro O nubrėžkime į kraštines AB ir CD statmenis OF ir OG. $OG = R$, nes CD yra apskritimo liestinė. Kadangi keturkampis $OFEG$ — stačiakampis, tai $OG = EF$. Kita vertus, $BF = \frac{1}{2}AB = 2{,}5\,(\mathrm{cm})$, tai $EF = EB + BF = 10 + 2,5 = 12,5\,(\mathrm{cm})$.

Atsakymas. 12,5 cm.

V užduotis. Matematinės indukcijos metodas

Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis galioja nelygybė $2^n > n^2 + 4n + 5$? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. Mažiausias natūralusis skaičius, su kuriuo galioja nelygybė, yra 7 (tuo įsitikiname tiesiog tikrindami). Matyt, nelygybė teisinga su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n, didesniu už 6. Siekdami tai įrodyti, taikysime matematinės indukcijos metodą. Iš pradžių pažymėkime $n = 6 + m$ ir nagrinėkime nelygybę $2^{6+m} > (6+m)^2 + 4(6+m) + 5$.

Atlikę veiksmus, turėsime tokią nelygybę:

$$64 \cdot 2^m > m^2 + 16m + 65. \qquad (*)$$

Įrodysime, kad ji teisinga su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi m.

Kai $m = 1$, ši nelygybė yra teisinga.

Tegul nelygybė $(*)$ galioja, kai $m = k$, t. y. $64 \cdot 2^k > k^2 + 16k + 65$.

Pasinaudoję šia prielaida, gauname

$$64 \cdot 2^{k+1} = 2(64 \cdot 2^k) > 2(k^2 + 16k + 65) = ((k+1)^2 + 16(k+1) + 65) + (k^2 + 14k + 48) > \\ > (k+1)^2 + 16(k+1) + 65.$$

Taigi nelygybė $(*)$ galioja su visais natūraliaisiais skaičiais m.

Pastaba. Nelygybę galima spręsti ir grafiškai, nubraižius funkcijų $f(x) = 2^x$ ir $g(x) = x^2+4x+5$ grafikus.

VI užduotis. Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas

Išspręskite nelygybę $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) < 2\log_{\frac{1}{3}}(x - 4)$.

Sprendimas. Nelygybės $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) < 2\log_{\frac{1}{3}}(x - 4)$ apibrėžimo sritis $(4; +\infty)$, todėl ji ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 18 > (x-4)^2, \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$$

Atsakymas. $(4; +\infty)$.

VII užduotis. Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės

Patikrinkite, kad Markovo schemoje $\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1$.

Sprendimas. Pažymėkime, kai $k = 0, 1, \ldots$

$$S_k = \sum_{\omega_0=0}^{1} \cdots \sum_{\omega_n=0}^{1} p_0(\omega_0)p(\omega_0, \omega_1)\ldots p(\omega_{k-1}, \omega_k), \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Tada $\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = S_n$.
Matematinės indukcijos būdu įrodysime, kad $S_k = 1$ su visais $k = 0, 1, \ldots$.
Gauname:

$$S_0 = p_0(0) + p_0(1) = 1, \qquad \sum_{\omega_k=0}^{1} p(\omega_{k-1}, \omega_k) = p(\omega_{k-1}, 0) + p(\omega_{k-1}, 1) = 1.$$

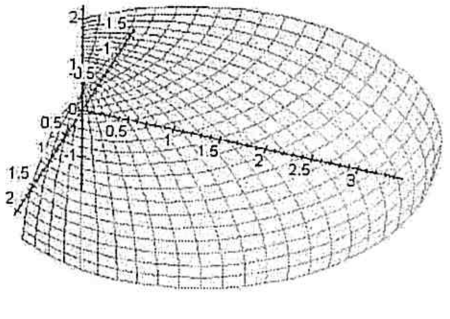
Taigi padarę prielaidą, kad $S_{k-1} = 1$, gauname

$$S_k = \sum_{\omega_0=0}^{1}\sum_{\omega_1=0}^{1} \cdots \sum_{\omega_{k-1}=0}^{1} \left[p_0(\omega_0)p(\omega_0, \omega_1)\ldots p(\omega_{k-2}, \omega_{k-1}) \sum_{\omega_k=0}^{1} p(\omega_{k-1}, \omega_k)\right] = S_{k-1} = 1.$$

VIII užduotis. Koordinačių sistemos. Žemėlapiai

Nubraižykite paviršių, kurio lygtis sferinėje koordinačių sistemoje yra $\theta = \rho + \varphi$, *kai* ρ *ir* φ *kinta intervale* $[0, 2]$.

Atsakymas. Turi būti gautas paviršius, pavaizduotas paveiksle.



Visus šios laidos absolventų spręstus uždavinius (su sprendimais) galima rasti LJMM leidinio *Jaunajam matematikui* 2 numeryje, kuris turėtų pasirodyti šį rudenį. Pirmosios mūsų laidos visa metodinė medžiaga jau išleista atskira knygele: *Jaunajam matematikui*, **1**, Vilnius: Danieliaus leidykla, 2001.

Šie LJMM mokslo metai pasibaigė. Rudenį Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla savo darbą tęs. Maloniai kviečiame vienuoliktokus tapti mūsų klausytojais 2001–2003 mokslo metais. Mokyklos taryba jau yra numačiusi pateikti tokias temas:

1. Skaičiavimo sistemos.
2. Antros eilės kreivės.
3. Matematinės logikos elementai (pradmenys).
4. Atvirkštinės funkcijos.
5. Optimizavimo uždaviniai.
6. Kombinatorika.
7. Atsitiktiniai dydžiai.
8. Kompleksiniai skaičiai.

Sekite mūsų interneto svetainę *http://www.maf.vu.lt/ljmm/*.

Tęsdami nusistovėjusią tradiciją šiame žurnale skelbti visas mūsų užduotis, įdedame ketvirtąją 2000–2002 m. m. užduotį.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Penkiakampio $ABCDE$ kraštinių AB, BC, CD ir DE vidurio taškai yra atitinkamai M, P, N ir Q. Atkarpų MN ir PQ vidurio taškai yra K ir L. Įrodykite, kad tiesės AE ir KL lygiagrečios ir raskite santykį $AE : KL$.
2. Atkarpų AB ir CD vidurio taškai P ir Q. Įrodykite, kad atkarpų AC, BD ir PQ vidurio taškai yra vienoje tiesėje.
3. Trapecijos $ABCD$ šoninių kraštinių AD ir BC vidurio taškai yra M ir N. Ar tiesės AN ir CM yra lygiagrečios?
4. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC yra taškai M ir N, be to, $AM : MB = 3 : 2$, $AN : NC = 1 : 4$. Tiesės CM ir BN kertasi taške P. Raskite santykius $BP : PN$ ir $CP : PM$.
5. Jei trikampio ABC pusiaukraštinės lygiagrečios trikampio $A'B'C'$ kraštinėms, tai trikampio $A'B'C'$ pusiaukraštinės lygiagrečios trikampio ABC kraštinėms. Įrodykite.
6. Lygiagretainio kraštinių ilgiai yra 2 ir 3, kampas tarp jų lygus 60°. Raskite kampą tarp lygiagretainio įstrižainių.
7. Kvadrato $ABCD$ kraštinės AD vidurys yra taškas E, taškas F yra įstrižainėje AC ir $AF : FC = 3$. Įrodykite, kad tiesės EF ir FB yra statmenos.
8. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AB ir CD yra taškai M ir N, be to, $AM : MB = 1 : 2$, $CN : ND = 5 : 1$. Tiesė MN kerta įstrižainę AC taške P. Raskite kampą APD.
9. Trapecijos įstrižainių kvadratų suma lygi jos šoninių kraštinių kvadratų sumai, sudėtai su pagrindų ilgių dviguba sandauga. Įrodykite.
10. Trikampis ABC — lygiakraštis, kraštinėse AC ir AB yra taškai D ir E, be to, $DC = 2AD$, $AE = 2EB$. Tiesės BD ir CE susikerta taške Q. Raskite kampą AQC.