

Reiškiniai su dalyba



Jūratė Skūpienė

jurate@kbl.mii.lt

Autorė nagrinėja vieno iš šeštosios Baltijos šalių informatikos olimpiados uždavinio sprendimą. Straipsnį apie šią olimpiadą spausdinome 2000 metų antrajame žurnalo numeryje.

Reiškiniai su dalyba yra tokio pavidalo aritmetiniai reiškiniai: $x_1/x_2/x_3/\dots/x_k$; čia x_i yra teigiamas sveikasis skaičius kiekvienam i , $1 \leq i \leq k$. Reiškinių reikšmė skaičiuojama iš kairės į dešinę. Pavyzdžiui, reiškinio $1/2/1/2$ reikšmė lygi $1/4$. Sudėti reiškinyje skliaustai gali pakeisti jo reikšmę. Pavyzdžiui, reiškinio $(1/2)/(1/2)$ reikšmė šiuo atveju būtų lygi 1.

Užduotis. Duotas reiškinys su dalyba E . Ar įmanoma jame taip sudėti skliaustus, kad gautume reiškinį E' , kurio reikšmė būtų sveikasis skaičius? Žinoma, kad reiškinį E gali sudaryti nuo 2 iki 10 000 narių ir nė vienas reiškinyje įrašytas skaičius (x_i) neviršys 1 000 000 000.

Sprendimas. Tai pats lengviausias olimpiados uždavinys. Kai kurie dalyviai sakėsi ilgai sėdėję prie šio uždavinio ieškodami paslėptų kablukų, netikėdami, kad jis gali būti toks paprastas...

Nagrinėjamą reiškinį perrašome tokiu pavidalu:

$$\frac{x_1}{x_2 x_3 \dots x_k}$$

Kad ir kaip sudėtume skliaustus, x_1 visada bus trupmenos skaitiklyje, x_2 — visada vardiklyje. Visi likę nariai gali būti ir skaitiklyje, ir vardiklyje. Juos perkeliame į skaitiklį:

$$x_1/(x_2/x_3/\dots/x_k) = \frac{x_1 x_3 \dots x_k}{x_2}$$

Belieka patikrinti, ar skaitiklyje esančius skaičius galima suprastinti iš vardiklio. Tam nebūtina įsiminti visų reiškinį sudarančių skaičių.

Perskaitomas eilinis reiškinio narys. Randamas šio nario bei nesuprastintos vardiklio dalies didžiausias bendrasis daliklis ir iš jo padalijamas likęs vardiklis. Toliau perskaitomas dar vienas reiškinio narys, ir veiksmas kartojami kol vardiklis tampa lygus 1 arba kol perskaitomi visi reiškinį sudarantys skaičiai.

Ieškant didžiausiojo bendrojo daliklio, svarbu naudotis dalyba (kaip tai daroma Euklido algoritme), o ne atimtimi. Pastarasis didžiausio daliklio paieškos algoritmas yra gerokai lėtesnis.

Pavyzdžiui, yra toks reiškinys:

$$\begin{aligned} 4/64/5/24/3/2/18/28/19/15 &= \\ &= 4/(64/5/24/3/2/18/28/19/15) = \\ &= \frac{4 \times 5 \times 24 \times 3 \times 2 \times 18 \times 28 \times 19 \times 15}{64} \end{aligned}$$

Imame pirmąjį bei antrąjį reiškinio narius (4 ir 64). Pirmasis narys bus skaitiklyje, antrasis — vardiklyje. Reikia suprastinti trupmeną $\frac{4}{64}$. Didžiausias bendrasis 4 ir 64 daliklis yra 4. Vardiklis sumažėja iki 16: $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$. Imame trečiąjį narį (5). Trupmenos $\frac{5}{16}$ suprastinti negalime. Imame ketvirtąjį narį (24). Šį kartą vardiklis sumažėja iki 2: $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$. Imame penktąjį narį (3). Trupmenos $\frac{3}{2}$ suprastinti negalime. Paėmus šeštąjį narį (2), trupmenos vardiklis sumažėja iki 1.

Atsakymas. Reiškinių galima pertvarkyti taip, kad gautume sveikąjį skaičių.