$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 2, 73–75

Vidurkių nelygybės

Aistė Mackevičiūtė, Leonas Narkevičius
leonasn@gim.ktu.lt

Straipsnyje pateikiami nelygybių įrodymo uždavinių sprendimai naudojantis skaičių vidurkių savybėmis.

Visi besidomintys matematika moksleiviai, be abejo, žino aritmetinį ir geometrinį vidurkius ir tai, kad aritmetinis vidurkis yra ne mažesnis už geometrinį. Pravartu susipažinti su dar dviem — harmoniniu ir kvadratiniu vidurkiais. Reikia pastebėti, kad dažniausiai lyginamas aritmetinis vidurkis su geometriniu.

Tegu $a_1, a_2, \dots, a_n$ yra teigiami skaičiai ($a_k > 0$). Tada aritmetinis, geometrinis, harmoninis ir kvadratinis vidurkiai A_n, G_n, H_n, S_n apibrėžiami taip:

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, \quad H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}, \quad S_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}.$$

Kai reikia įrodyti kokias nors nelygybes, dažnai pravartu pasinaudoti vidurkių nelygybėmis, kurias pateiksime be įrodymo: $\min a_k \leqslant H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant S_n \leqslant \max a_k$.

Kai $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, tai visos nelygybės virsta lygybėmis. Kitais atvejais — nelygybės yra griežtos. Panagrinėsime uždavinius, kuriuos galima išspręsti pasinaudojus vidurkių nelygybėmis.

Uždaviniai

Įrodykite nelygybes (jei nenurodyta kitaip, $a, b, c, d, \dots$ laikykite teigiamais skaičiais):

1. $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

2. $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

3. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

4. $(a^2b+b^2c+c^2a)(b^2a+c^2b+a^2c) \geqslant 9a^2b^2c^2$.

5. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$.

6. Jei $x_1, x_2, \dots, x_n$ — teigiami skaičiai, o $y_1, y_2, \dots, y_n$ — tie patys, tik kita tvarka surašyti skaičiai, tai $\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\dots+\frac{x_n}{y_n} \geqslant n$. Įrodykite.

7. $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geqslant 6$.

8. $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc\cdot(a+b+c)$.

9. $a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b$.

10. Tegu $a\cdot b\cdot c\cdot d = 1$. Įrodykite, kad $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 10$.

11. $\frac{1}{2}\cdot(a+b)^2+\frac{1}{4}\cdot(a+b) \geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

12. Jei $x+y+z=1$, tai $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

13. Raskite mažiausią polinomo $P(x;\, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$ reikšmę.

Raskite teigiamus sprendinius šių lygčių sistemų:

14. $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ xyz = 27. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + y + z + u = 4, \\ xyzu = 1. \end{cases}$

Sprendimai

1. Užrašykime kairiosios pusės sumą atitinkamai sugrupavę dėmenis ir pasinaudokime tuo, kad aritmetinis vidurkis yra ne mažesnis už geometrinį:
$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} \geqslant ab + bc + ca.$
Toks dėmenų pergrupavimas įrodinėjant panašias nelygybes praverčia gana dažnai.

2. Uždavinys sprendžiamas panašiai kaip pirmasis:
$a + b + c = \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$

3. Nelygybė skiriasi nuo antrojo uždavinio nelygybės tik tuo, kad vietoje a, b, c yra atvirkštiniai skaičiai. Įrodymas visiškai analogiškas:
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2} + \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2} + \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}.$

4. Nelygybę lengvai įrodome taikydami aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę kairiosios pusės reiškiniams:
$(a^2b + b^2c + c^2a)(b^2a + c^2b + a^2c) \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} \cdot 3\sqrt[3]{b^2a \cdot c^2b \cdot a^2c} =$
$= 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3 \cdot a^3b^3c^3} = 9a^2b^2c^2.$

5. Pakanka pasinaudoti aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe:
$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3 \cdot 1 = 3.$

6. Čia lyginame n narių aritmetinį vidurkį su geometriniu:
$\frac{\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{y_n}} = \sqrt[n]{1} = 1.$

7. Uždavinį galima išspręsti tiesiog palyginus aritmetinį vidurkį su geometriniu:
$\frac{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}}{6} \geqslant \sqrt[6]{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b}} = \sqrt[6]{1} = 1.$
Įrodysime nelygybę kitu būdu. Panagrinėkime tokią lygybę:
$\frac{a+b+c}{c} + \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} = (a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$
Pasinaudokime tuo, kad aritmetinis vidurkis yra ne mažesnis už harmoninį:
$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Taigi
$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$, ir $\frac{a+b+c}{c} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{a} \geqslant 9,$
$\frac{a+b}{c} + 1 + \frac{b+c}{a} + 1 + \frac{c+a}{b} + 1 \geqslant 9,\quad \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geqslant 6.$

8. Analogiškai kaip 1 uždavinyje sugrupavę poromis po pusę dėmens, gauname nelygybę:
$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2,$
o atlikę tai dar kartą, gauname
$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant \sqrt{a^2 \cdot b^4 \cdot c^2} + \sqrt{b^2 \cdot c^4 \cdot a^2} + \sqrt{c^2 \cdot a^4 \cdot b^2}.$
Akivaizdu, kad dešiniojoje pusėje gauname reiškinį $a \cdot b \cdot c \cdot (b + c + a)$.

9. Lyginame aritmetinį vidurkį su geometriniu:

$a^2+b^2+1=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2+1}{2}+\frac{b^2+1}{2}\geqslant a\cdot b+a+b.$

10. Kelis kartus taikome 1 uždavinyje minėtą metodą:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+a\cdot b+a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d+c\cdot d=$$
$$=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}+\frac{d^2+a^2}{2}+a\cdot b+a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d+c\cdot d\geqslant$$
$$\geqslant a\cdot b+b\cdot c+c\cdot d+a\cdot d+a\cdot b+a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d+c\cdot d\geqslant$$
$$\geqslant 2\cdot 2\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot d}+2\cdot 2\sqrt{b\cdot c\cdot a\cdot d}+2\sqrt{a\cdot c\cdot b\cdot d}=10\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot d}=10.$$

Paskutiniąją lygybę gavome pasinaudoję tuo, kad $a\cdot b\cdot c\cdot d=1$.

11. Šiame uždavinyje tenka šiek tiek paeksperimentuoti ieškant, kaip patogiausia aritmetinį vidurkį palyginti su geometriniu:

$$\tfrac{1}{2}\cdot(a+b)^2+\tfrac{1}{4}\cdot(a+b)\geqslant\tfrac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot 2\sqrt{ab}+\tfrac{1}{4}\cdot 2\sqrt{ab}=$$
$$=(a+b)\cdot\sqrt{ab}+\tfrac{1}{2}\sqrt{ab}=\sqrt{ab}(a+b+\tfrac{1}{2})=$$
$$=\sqrt{ab}\cdot\left(\frac{2a+\frac{1}{2}}{2}+\frac{2b+\frac{1}{2}}{2}\right)\geqslant\sqrt{a\cdot b}\cdot\left(\sqrt{2a\cdot\tfrac{1}{2}}+\sqrt{2b\cdot\tfrac{1}{2}}\right)=$$
$$=\sqrt{ab}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a\sqrt{b}+b\sqrt{a}.$$

12. Pirmiausia užrašykime akivaizdžias lygybes:

jei $x+y+z=1$, tai $(x+y+z)^2=1$, $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=1$.

Kadangi $2xy+2yz+2xz\leqslant 2\cdot(x^2+y^2+z^2)$ (žr., pavyzdžiui, 1 uždavinį), tai

$3(x^2+y^2+z^2)\geqslant x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=(x+y+z)^2=1.$

Dabar belieka nelygybės abi puses padalyti iš 3: $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$.

13. Tai kiek netradicinis nelygybių uždavinys, tačiau labai įdomus. Pirmiausia pertvarkykime polinomą taip:

$$P(x;y)=4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2=3+1+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2\geqslant$$
$$\geqslant 3+3\cdot\sqrt[3]{1\cdot x^2y^4\cdot x^4y^2}-3x^2y^2=3+3x^2y^2-3x^2y^2=3.$$

Gautoji nelygybė virsta lygybe tada ir tik tada, kai $1=x^2y^4=x^4y^2$, t.y. $x=\pm y=\pm 1$. Taigi mažiausia $P(x,y)$ reikšmė lygi 3.

14. Tarkime, skaičiai $x,y,z>0$ tenkina antrąją lygčių sistemos lygtį, t.y. $x\cdot y\cdot z=27$. Parašę su šiais skaičiais aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę, gauname

$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z}=3,\quad x+y+z\geqslant 9.$

Žinome, kad lygybė galioja tik su $x=y=z$. Taigi $x=y=z=3$ yra vienintelis lygčių sistemos sprendinys.

15. Šio uždavinio lygčių sistemą galima išspręsti visiškai analogiškai kaip 14 uždavinio. Vienintelis skirtumas — aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę reikia rašyti su keturiais, o ne su trimis skaičiais.