$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 2, 67–72

50-oji Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiada

Romualdas Kašuba, Juozas Mačys
romualdas.kasuba@mif.vu.lt
conf@ktl.mii.lt

Straipsnyje pateikiami 50-osios Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai ir jų sprendimai.

IX ir X klasės

1. Raskite
a) bent vieną
b) visas
natūraliųjų skaičių poras $(x; y)$, kurioms teisinga lygybė $2^x = y! + 304$ ($y!$, vadinamasis y faktorialas, reiškia natūraliųjų skaičių nuo 1 iki y sandaugą, pvz., $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$).

2. Du apskritimai Q ir R kertasi taškuose A ir B. Tašką P pasirenkame tame apskritimo Q lanke AB, kuris yra apskritimo R išorėje. Tiesė PA kerta apskritimą R dar ir taške C, o tiesė PB kerta apskritimą R dar ir taške D. Įrodykite, kad stygos CD ilgis nepriklauso nuo taško P pasirinkimo.

3. Stačiakampis 6×5 sudarytas iš 30 vienetinių kvadratėlių.
a) Užtušuokite tame stačiakampyje 18 kvadratėlių taip, kad kiekviename kvadrate 2×2 būtų ne daugiau kaip du užtušuoti kvadratėliai.
b) Keliais būdais tai galima padaryti?
c) Dabar tame pačiame stačiakampyje užtušuota jau 19 kvadratėlių. Įrodykite, kad jame galima rasti kvadratą 2×2, kurio mažiausiai trys kvadratėliai yra užtušuoti.

4. Raskite, kiek yra keturženklių skaičių, kurių kiekvienas turi tokias savybes:
i) skaičiaus skaitmenys griežtai mažėja;
ii) jeigu skaičiuje yra skaitmuo 8, tai jame nėra skaitmens 1;
iii) jeigu skaičiuje nėra skaitmens 8, tai jame yra skaitmuo 1.

XI ir XII klasės

5. Lygtis $x^3 + x^2 = m$ su tam tikra m reikšme turi tris skirtingus realiuosius sprendinius, kurie sudaro aritmetinę progresiją.
a) Raskite minėtą m reikšmę.
b) Raskite tuos sprendinius.

6. Taškas E yra kvadrato $ABCD$ kraštinėje BC, taškas F yra kraštinėje CD, o kampas EAF yra lygus 45°. Įstrižainė BD kerta atkarpas AE ir AF atitinkamai taškuose P ir Q. Raskite trikampių AEF ir APQ plotų santykį.

7. Stačiakampis 6×5 sudarytas iš 30 vienetinių kvadratėlių.

a) Užtušuokite tame stačiakampyje 18 kvadratėlių taip, kad kiekviename kvadrate 2×2 būtų ne daugiau kaip du užtušuoti kvadratėliai.

b) Keliais būdais tai galima padaryti?

c) Dabar tame pačiame stačiakampyje užtušuota jau 19 kvadratėlių. Įrodykite, kad jame galima rasti kvadratą 2×2, kurio mažiausiai trys kvadratėliai yra užtušuoti.

8. Natūraliųjų skaičių a ir b kvadratų suma a^2+b^2 dalijasi iš 124. Įrodykite, kad ir skaičius $2a+2b$ dalijasi iš 124.

Sprendimai

1. a) Pabandę įrašinėti konkrečius skaičius, greitai susekame, kad $1024 = 2^{10} = 6!+304 = 720+304$, t. y. pora (10; 6) yra lygties sprendinys.

b) Pastebėkime, kad jeigu y lygybėje $2^x = y!+304$ yra „didelis“, tai $y!$ dalijasi iš didelio dvejeto laipsnio. Bet tada ir $2^x (> y!)$ didelis, t. y. dalijasi iš didelio dvejeto laipsnio. Vadinasi, ir jų skirtumas $2^x - y! = 304$ dalijasi iš didelio dvejeto laipsnio, o taip nėra: $304 = 19\cdot16$ dalijasi tik iš 2^4. Vadinasi, didelių sprendinių lygtis neturi.

Konkrečiai lygtis galėtų būti nagrinėjama taip: kadangi $2^8 < 304 < 2^9$, tai $x \geqslant 9$. Tada $y! \geqslant 512-304 = 208$, ir pirmasis didesnis kaip 208 faktorialas yra $6!$, t. y. $y \geqslant 6$. Kadangi $6! = 720 = 45\cdot16$, tai pradinę lygybę padaliję iš 16 gauname

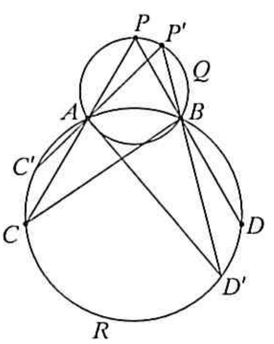
$$2^{x-4} = 45\cdot(7\cdot8\cdot\dots\cdot y)+19.$$

Dabar aišku, kad $y < 8$ (jei $y \geqslant 8$ („didelis“), tai kairioji pusė lyginė, o dešinioji — nelyginė). Taigi lieka ištirti atvejus $y=6$ ir $y=7$.

Jei $y=6$, tai $2^{x-4} = 45+19 = 64$ ir $x=10$, o šį sprendinį jau esame minėję.

Jei $y=7$, tai $2^{x-4} = 45\cdot7+19 = 334$, $2^{x-5} = 167$, ir sveikųjų x nėra.

Atsakymas. Yra vienintelė tokia pora (10; 6).

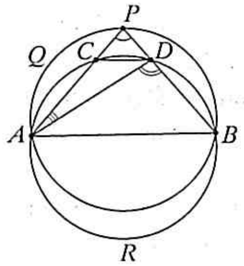


1 pav.

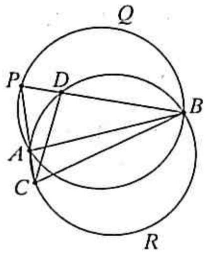
2. Pastumkime tašką P į kitą padėtį P', o atitinkamus tiesių $P'A$ ir $P'B$ kirtimosi su apskritimu R taškus pažymėkime C' ir D' (1 pav.). Įbrėžtiniai kampai PAP' ir PBP' remiasi į tą patį apskritimo Q lanką PP', todėl yra lygūs. Lygūs yra ir kryžminiai jiems kampai $C'AC$ ir $D'BD$.

Kampai CAD' ir CBD' irgi lygūs, nes remiasi į tą patį apskritimo R lanką CD'. Vadinasi, kampai $\angle CBD = \angle D'BD + \angle CBD'$ ir $\angle C'AD' = \angle C'AC + \angle CAD'$ yra lygūs, todėl lygios ir juos jungiančios stygos CD ir $C'D'$.

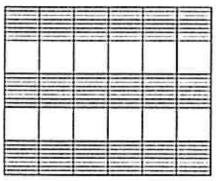
Atrodytų, sprendimas baigtas, o uždavinys labai paprastas (kai kurie vertinimo komisijos nariai net siūlė šį uždavinį pakeisti sunkesniu). Bet olimpiados nugalėtojai tuoj pat pastebėjo, kad toks sprendimas

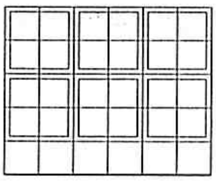


2 pav.



3 pav.


4 pav.


5 pav.

nėra išsamus: juk reikia išnagrinėti ne tik atvejį, kai abu taškai C ir D yra kitoje tiesės AB pusplokštumėje negu taškas P (tokį atvejį žymėkime $P(2)$, žr. 1 pav.), o ir atvejus, kai toje pat pusplokštumėje kaip ir P (atvejis $P(0)$, žr. 2 pav.) arba taškai C ir D yra skirtingose tiesės AB pusplokštumėse (atvejis $P(1)$, žr. 3 pav.).

Vien už tokį pastebėjimą komisija davė visus 7 taškus (sprendimas be panašios pastabos buvo vertinamas 6 taškais), nes abiejų kitų atvejų įrodymas nors ir skiriasi, bet labai panašus į pirmojo (siūlome įsitikinti). Šiaip jau turėdami du taškus P ir P' privalome išnagrinėti atvejus $P(2)$ ir $P'(2)$, $P(2)$ ir $P'(1)$, $P(2)$ ir $P'(0)$, $P(1)$ ir $P'(1)$, $P(1)$ ir $P'(0)$, $P(0)$ ir $P'(0)$. Žinoma, praktiškai tai daroma taip: išnagrinėjami keli būdingi atvejai, ir pasakoma, kad kiti atvejai nagrinėjami analogiškai.

3. a) Šiek tiek pabandę, greitai randame tinkamą užtušavimą (4 pav.).

b) Imkime 6 kvadratus 2×2, nurodytus 5 pav. Kadangi kiekviename kvadrate gali būti daugiausiai du užtušuoti kvadratėliai, tai apatinėje eilėje turi būti užtušuoti ne mažiau kaip 6 kvadratėliai.

Vadinasi, joje užtušuoti visi 6 kvadratėliai. Analogiškai viršutinėje eilėje užtušuoti visi 6 kvadratėliai. Bet tada nei antroje, nei penktoje eilėje neužtušuotas nė vienas kvadratėlis. Vadinasi, visi likusieji užtušuoti kvadratėliai yra vidurinėje eilėje.
Įrodėme, kad 4 pav. užtušavimas yra vienintelis.

c) Kai užtušuoti 19 kvadratėlių, imkime kuriuos nors 18 kvadratėlių. Kaip jau įrodėme, tai bus 4 pav. užtušuotieji kvadratėliai. Bet tada devynioliktam kvadratėliui nebelieka vietos.

Atsakymas. a) Žr. 4 pav. b) Vienas vienintelis būdas, žr. 4 pav.

4. Iš uždavinio sąlygos aišku, jog kiekviename tinkamame skaičiuje visada yra arba 8, arba 1, bet ne abu minėti skaitmenys. Be to, aišku, jog skaičių tiek su skaitmeniu 1, tiek su skaitmeniu 8 yra po lygiai (jei kuris nors iš jų yra tinkamo skaičiaus $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ skaitmuo, tai kitas yra skaičiaus $\overline{(9-a_4)(9-a_3)(9-a_2)(9-a_1)}$ skaitmuo. Todėl pakanka surasti, kiek yra tinkamų keturženklių skaičių, turinčių skaitmenį 8. Reikia pasirinkti dar 3 skaitmenis iš likusių 8 (skaitmens 1 nėra, skaitmuo 8 jau paimtas). Kai tik tie 3 skaitmenys bus pasirinkti, keturženklį skaičių gausime automatiškai, išrikiavę visus 4 skaitmenis mažėjimo tvarka. Suskaičiuokime, keliais būdais galima pasirinkti tuos 3 skaitmenis iš 8. Sakykime, kad tokių būdų yra x. Vadinasi, yra x triženklių skaičių, kurių skaitmenys mažėja. Mums lengviau suskaičiuoti visų „nesutvarkytų" triženklių skaičių kiekį (čia ir toliau nesutvarkytas triženklis skaičius gali prasidėti ir nuliu). Jeigu 3 skaitmenys jau pasirinkti, tai yra tik vienas iš jų sudarytas triženklis skaičius, kurio skaitmenys mažėja. Perstatę tuos skaičius, gauname 6 skaičius (pirmą skaitmenį galima pasirinkti trim būdais, antrą — dviem būdais, trečią — vienu būdu, ir pagal sandaugos taisyklę $3\times2\times1=6$ būdai).

Vadinasi, iš x sutvarkytų skaičių gausime $6x$ nesutvarkytų skaičių. Dabar kitaip suskaičiuokime, kiek yra nesutvarkytų triženklių skaičių. Pirmą skaitmenį galime pasirinkti 8 būdais, antrą skaitmenį — 7 būdais, trečią skaitmenį — 6 būdais, todėl skaičių sudaryti galima $8 \cdot 7 \cdot 6$ būdų.

Todėl $6x = 8 \cdot 7 \cdot 6$, ir $x = 8 \cdot 7 = 56$. Taigi yra 56 sutvarkyti skaičiai, kurie neturi vieneto, ir tiek pat skaičių, kurie neturi skaitmens 8.

Vadinasi, iš viso yra $52 \cdot 2 = 112$ sąlygą tenkinančių skaičių.

Pastaba. Žinoma, nelabai sunku pagal kokią nors sistemą išrašyti visus skaičius. Taip irgi įsitikiname, kad jų yra 112.

Atsakymas. 112 skaičių.

5. Kadangi trys skirtingos lygties $x^3 + x^2 = m$ šaknys sudaro aritmetinę progresiją, tai patogu jas pažymėti „simetriškai": $x - d$, x, $x + d$. Tada

$$(x-d)^3 + (x-d)^2 = m, \tag{1}$$

$$x^3 + x^2 = m, \tag{2}$$

$$(x+d)^3 + (x+d)^2 = m. \tag{3}$$

Sudėję (1) ir (3) lygtis ir atėmę dvigubą (2), gauname

$$6xd^2 + 2d^2 = 0.$$

Kadangi remiantis sąlyga $d \neq 0$, tai $x = -\frac{1}{3}$, ir iš (2) lygties gauname $m = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27}$.

Iš (3) lygties atėmę (1) ir padalija pusiau, gauname

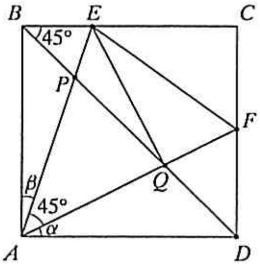
$$3x^2d + d^3 + 2xd = 0,$$

o įstatę $x = -\frac{1}{3}$ turime

$$d\left(d^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = 0, \quad d^2 = \frac{1}{3}, \quad d = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Abiem atvejais gauname tris sprendinius $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, kuriuos galima surikiuoti į aritmetinę progresiją. Kad lygčiai $x^3 + x^2 = \frac{2}{27}$ tinka $x = -\frac{1}{3}$, jau matėme. Tenkina lygtį ir kiti du sprendiniai $x + d$ (čia $x = -\frac{1}{3}$, $d = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$), nes

$$\begin{aligned}(x+d)^3 + (x+d)^2 &= (x+d)^2(x+ \; +d+1) = \\ &= (x^2 + 2xd + d^2)\left(-\frac{1}{3} + d + 1\right) = \\ &= \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{3}d + \frac{1}{3}\right)\left(d + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{3}d\right)\left(d + \frac{2}{3}\right) = \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - d\right)\left(\frac{2}{3} + d\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9} - d^2\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27}.\end{aligned}$$



6 pav.

6. *I būdas.* Sujungę E su Q (6 pav.) turime, jog keturkampyje $ABEQ$ kampai EBQ ir EAQ yra lygūs (po 45°). Vadinasi, apie keturkampį $ABEQ$ galima apibrėžti apskritimą, todėl jo priešingų kampų sumos yra po 180°. Kadangi ABE status, tai ir priešingas jam keturkampio kampas AQE irgi status. Tada trečiasis trikampio AQE kampas irgi 45°, o AQE yra statusis lygiašonis trikampis, $AE = AQ\sqrt{2}$. Analogiškai jungdami taškus P ir F, gautume $AF = AP\sqrt{2}$. Todėl

$$S_{\Delta AEF} : S_{\Delta APQ} = \left(\frac{1}{2}AE \cdot AF \sin 45^\circ\right) : \left(\frac{1}{2}AP \cdot AQ \sin 45^\circ\right) = 2.$$

II būdas. Tegu kvadrato $ABCD$ kraštinė $AB = a$, $\angle FAD = \alpha$, o $\angle EAB = \beta$. Tada iš ΔAQD pagal sinusų teoremą $AQ = a\sin 45^\circ / \sin(45^\circ + \alpha)$. Iš ΔAPB analogiškai $AP = a \sin 45^\circ / \sin(45^\circ + \beta)$. Tada trikampių ΔAEF ir ΔAPQ plotų santykis lygus

$$\frac{AE \cdot AF}{AP \cdot AQ} = \frac{2\sin(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}.$$

Kadangi $\alpha + \beta = 45^\circ$, tai $\sin(45^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta$, $\sin(45^\circ + \beta) = \cos\alpha$, ir ieškomasis santykis lygus 2.

Pastaba. Iš sąlygos galima numanyti, kad plotų santykis nepriklauso nuo taško E padėties. Atspėti, kad jis lygus 2, galima paėmus „ribinį“ atvejį, kai taškas E (ir taškas P) atslenka į B, o taškas F atslenka į C (taškas Q atsiduria kvadrato įstrižainių susikirtimo taške). Tuomet ΔAQB užima ketvirtadalį, o ΔACB — pusę pradinio kvadrato.

Atsakymas. Plotų santykis lygus 2.

7. Žr. 3 uždavinio sprendimą.

8. Kadangi $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ dalijasi iš 4, tai $a + b$ — lyginis. Tada $(a+b)^2$ dalijasi iš 4, vadinasi, ab dalijasi iš 2. Todėl bent vienas iš skaičių a ir b lyginis. Kadangi jų suma lyginė, tai ir kitas — lyginis. Vadinasi, $a = 2p$, $b = 2q$, $a^2 + b^2 = 4(p^2 + q^2)$ dalijasi iš 124, todėl $p^2 + q^2$ dalijasi iš 31.

Dabar įrodysime, kad tiek p, tiek q dalijasi iš 31.

Bet kurį natūralųjį skaičių n galima užrašyti pavidalu $n = 31k \pm r$, kur r ne daugiau už 15 (tai — vadinamosios mažosios liekanos; iš tikrųjų, jei $r \geqslant 16$, tai galima atimti 31). Iš lygybės $n^2 = 31^2k^2 \pm 2 \cdot 31kr + r^2$ matome, kad n^2 dalybos iš 31 liekaną lemia r^2.

0	0	0
1	1	1
2	4	4
3	9	9
4	16	−15
5	25	−6
6	36	5
7	49	−13
8	64	2
9	81	−12
10	100	7
11	121	−3
12	144	−11
13	169	14
14	196	10
15	225	8

Dabar surašykime galimas r reikšmes, r^2 reikšmes bei mažąsias r^2 dalybos iš 31 liekanas į lentelę kairėje.
Gautas mažąsias liekanas surašykime eilute:

$$0, 1, 2, -3, 4, 5, -6, 7, 8, 9, 10, -11, -12, -13, 14, -15.$$

Užrašykime p ir q minėtu pavidalu. Kadangi $p^2 + q^2$ dalijasi iš 31, tai šios eilutės dviejų (galbūt ir vienodų) dėmenų suma dalijasi iš 31. Bet ta suma moduliu mažesnė už 31, vadinasi, ji lygi 0. Kitaip sakant, liekana turi turėti šioje eilutėje ir priešingą, bet tokia yra tik liekana 0. Vadinasi, tiek skaičiaus p, tiek skaičiaus q liekana yra nulis, t. y. abu tie skaičiai dalijasi iš 31.
Kadangi kiekvienas iš skaičių a ir b dalijasi iš 2 ir iš 31, tai $a + b$ dalijasi iš 62, o $2a + 2b$ dalijasi iš 124.

S V E I K I N A M E

Juozas Juvencijus Mačys — daktaras, Matematikos ir informatikos instituto vyresnysis mokslinis bendradarbis ir olimpiadų klasės vadovas, daugelio matematikos knygų autorius, bendraautoris ir redaktorius, Lietuvos moksleivių matematikos olimpiadinės komandos vadovas, Lietuvos „Kengūros“ konkurso organizavimo komiteto pirmininkas, mūsų žurnalo redaktorių tarybos narys ir nuolatinis autorius apdovanotas

Didžiojo Lietuvos Kunigaikščio Gedimino ordino 1-ojo laipsnio medaliu!

Sveikiname!