$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 2, 53–56

Valstybinis matematikos brandos egzaminas

Jau trečią kartą Nacionalinis egzaminų centras surengė valstybinį matematikos brandos egzaminą. Pateikiame pagrindinės šio egzamino sesijos užduotį. Pirmieji 9 jos uždaviniai — testiniai, vertinant likusius buvo nagrinėjami ir sprendimai.

UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$. **A** $\frac{43}{30}$ **B** $\frac{10}{9}$ **C** $\frac{16}{15}$ **D** $\frac{25}{21}$ **E** 2

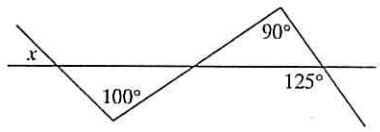
2. $4^{\log_2 3} =$ **A** 2 **B** 8 **C** 9 **D** $\log_4 3$ **E** $\sqrt{3}$

3. Metami trys standartiniai šešiasieniai lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad iškritusių akučių suma bus lygi 5?

A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{1}{20}$ **C** $\frac{1}{25}$ **D** $\frac{1}{36}$ **E** $\frac{5}{216}$

4. Lygties $|(x-2)(x+4)| = 5$ sprendinių skaičius yra: **A** 4 **B** 3 **C** 2 **D** 1 **E** 0

5. Laužtę kerta tiesė (žr. brėžinį). Kampas x lygus



A 25° **B** 30° **C** 40° **D** 45° **E**50°

6. $\frac{1+x}{1-x} + \frac{x-1}{x+1} =$ **A** $\frac{2}{1-x^2}$ **B** $\frac{4x}{1-x^2}$ **C** $\frac{2x}{1-x^2}$ **D** $\frac{4x}{x^2-1}$ **E** x

7. $\int\limits_1^2 \frac{x^2+1}{x}\,dx =$ **A** $\frac{3}{2} + \ln 2$ **B** $2\frac{3}{4} + \ln 2$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{3}{4}$ **E** $\frac{3}{2}$

8. Kuri šių funkcijų yra atvirkštinė funkcijai $f(x) = 2^{1-x}$?

A $g(x) = 2^{x-1}$ **B** $g(x) = 1 - \log_2 x$ **C** $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ **D** $g(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$
E $g(x) = \log_2(x+1)$

9. Jei $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{2})$, tai funkcijos f išvestinė $f'(0) =$

A $-\frac{\pi}{2}$ **B** 0 **C** 1 **D** $\cos\frac{\pi x}{2}$ **E** $\frac{\pi}{2}$

10. Prieš Kalėdas prekės kaina sumažinta 24%. Po Naujųjų metų šventinė prekės kaina padidinta 20%. Kiek procentų padidėjo arba sumažėjo prekės kaina lyginant ją su pradine kaina?

(3 taškai)

11. Apskaičiuokite $a + 2b$, kai $a = 2{,}8 \cdot 10^{-7}$, $b = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$. Atsakymą užrašykite standartinės išraiškos skaičiumi.

(2 taškai)

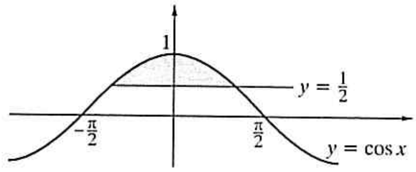
12. Apskaičiuokite kampą tarp vektorių $\vec{m}\left\{-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right\}$ ir $\vec{k}\left\{\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right\}$ (čia $a > 0$).

(3 taškai)

13. Išspręskite lygtį $2\cos^2 x = 3\cos x$. *(3 taškai)*

14. Apskaičiuokite $f'(2)$, kai $f(x) = (x-2)(x^2+1)$. *(2 taškai)*

15. Brėžinyje pavaizduota figūra, apribota kreivėmis $y = \cos x$ ir $y = \frac{1}{2}$.
Apskaičiuokite šios figūros plotą. *(3 taškai)*



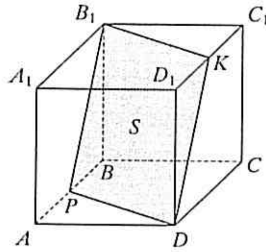
16. Parabolės $y = ax^2 + bx + 1$ viršūnė yra taške $M(1; 2)$.
Raskite koeficientus a ir b. *(4 taškai)*

17. Išspręskite lygtį $\sqrt{x+2} = x$. *(3 taškai)*

18. 1. Įrodykite teiginį „Paeiliui sujungę iškilojo keturkampio kraštinių vidurio taškus gauname lygiagretainį“. *(3 taškai)*

2. Ar teisingas teiginys neiškilajam keturkampiui?
Atsakymą pagrįskite. *(2 taškai)*

19. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kraštinė lygi 2 cm. Šį kubą kertant plokštuma, einančia per viršūnes B_1 ir D bei briaunų AB ir D_1C_1 vidurio taškus P ir K, gauname keturkampį PB_1KD (žr. pav.). Apskaičiuokite gautojo keturkampio plotą. *(3 taškai)*



20. 1. Kiek skirtingų keturženklių skaičių, kurių visi skaitmenys skirtingi, galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3? *(2 taškai)*

2. Iš skaitmenų 0, 1, 2, 3 atsitiktinai sudaromas keturženklis skaičius, kurio visi skaitmenys skirtingi. Kokia tikimybė, kad šis skaičius dalijasi iš 6? *(2 taškai)*

21. Jurgita kartą per savaitę patręšia kambarinę gėlę biotrąšomis. Yra žinoma, kad trąšų kiekis gėlės vazone per savaitę sumažėja apie 20%.

1. Tarkime, kad Jurgitos prižiūrima gėlė anksčiau nebuvo tręšta biotrąšomis. Jurgita kiekvieną šeštadienį patręšia gėlę 10 g biotrąšų. Biotrąšos veikia efektyviai tik tada, kai jų kiekis vazone iki kito tręšimo momento visą laiką yra didesnis nei 20 g. Apskaičiuokite, po kelių patręšimų tokiu būdu tręšiant gėlę trąšos ims veikti efektyviai visą laiką. *(2 taškai)*
2. Parašykite formulę, pagal kurią galima būtų apskaičiuoti trąšų kiekį vazone po kiekvieno patręšimo. *(2 taškai)*
3. Kai biotrąšų kiekis viršija 50 g, gėlė ima džiūti dėl per didelio trąšų kiekio. Ar gali Jurgita ir toliau pastoviai šeštadieniais tręšti jos prižiūrimą gėlę pasirinktu būdu? *(2 taškai)*

22. 9 m atkarpoje, jungiančioje du taškinius šviesos šaltinius, vienas iš kurių aštuonis kartus stipresnis už kitą, raskite mažiausiai apšviestą tašką. Apšviestumo dėsnis: apšviestumas tiesiog proporcingas šaltinio šviesos stiprumui ir atvirkščiai proporcingas atstumo iki šviesos šaltinio kvadratui. *(5 taškai)*

RŪPESTIS DĖL GĖLĖS

Panagrinėkime šių metų valstybinio matematikos brandos egzamino užduoties 21 uždavinį apie gėlės tręšimą. Bent jau todėl, kad jo sąlyga „šiltesnė“ už kitas, tarsi mažiau bauginanti. Tad beveik visi jį ir bandė spresti.

Kada trąšos veiks efektyviai?

Tikrai nesunku atlikti keletą skaičiavimų su trupmenomis, tuo labiau, kad galima pasinaudoti ir skaičiuokliais. Patręšus pirmą kartą, vazone bus 10 g trąšų, o prieš pat antrąjį — $10 \cdot \frac{3}{4} = \frac{30}{4}$ (g). Patręšus antrąjį kartą iš pradžių vazone bus $10 + \frac{30}{4} = \frac{70}{4}$ (g) trąšų. Prieš pat trečiąjį tręšimą bus likę $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{70}{4}\right)$ g trąšų. Abu šie trąšų kiekiai mažesni už 20 g, taigi visą antrąją savaitę trąšų bus dar per mažai, kad jos efektyviai veiktų. Skaičiuodami toliau nustatome, kad prieš ketvirtąjį tręšimą, t. y. trečios savaitės pabaigoje, trąšų bus nepakankamai, kad jos efektyviai veiktų. Tačiau ir po ketvirtojo ir tuoj prieš penktąjį tręšimą trąšų kiekis vazone bus didesnis už 20 g. Beveik jau galima rašyti ir atsakymą: trąšos visą laiką veiks efektyviai po ketvirtojo tręšimo. Tačiau ... trūksta dar taško ant i. Juk skaičiuodami įsitikinome tik tuo, kad trąšų poveikis bus efektyvus visą ketvirtą savaitę. O penktąją, šeštąją...? Kad mūsų argumentai įtikintų visus, dar turėtume įrodyti tokį teiginį: jei $a > 20$, tai ir $\frac{3}{4} \cdot (a + 10) > 20$. Žinoma, tai akivaizdu, o ir pats egzaminas — ne koks laikas loginėms subtilybėms.

Trąšų kiekio formulė

Tegu a_n — trąšų kiekis vazone iškart po n-ojo tręšimo. Nesunku parašyti lygybę, siejančią a_n ir a_{n-1}:

$$a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + 10.$$

Matyt, tikėtasi, kad sprendėjai padirbės su šia formule ir nustatys „tikrąjį“, ne rekurentųjį ryšį:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{4}a_{n-1} + 10 = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}a_{n-2} + 10\right) + 10 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 a_{n-2} + 10 \cdot \frac{3}{4} + 10 = \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} a_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \cdot 10 + \cdots + 10 = 10\left(1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Dabar jau galima pasinaudoti geometrinės progresijos narių sumos formule ir gauti atsakymą:

$$a_n = 10 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = 40 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right).$$

Tačiau galima samprotauti ir ne taip formaliai. Tręšdami pirmą kartą, įbėrėme 10 g trąšų. Kiek trąšų iš šio kiekio liks po vienos savaitės? Aišku, $\frac{3}{4} \cdot 10$, po dviejų — $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10$, po $(n-1)$-os savaitės (n-ojo tręšimo momentu) $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot 10$. Tręšdami antrą kartą, vėl įbėrėme 10 g trąšų, kai tręšime n-ąjį kartą, iš šio kiekio bus likę $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \cdot 10$ gramų. Dabar susumavę visus trąšų likučius ir pridėję 10 g, įbertų n-ojo tręšimo metu, gauname

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot 10 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \cdot 10 + \cdots + 10.$$

Ką patarti Jurgitai?

Kas sugebėjo gauti formulę

$$a_n = 40 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right),$$

tas ir patarimą gali lengvai duoti: kadangi

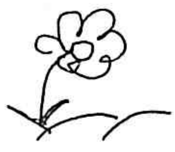
$$a_n = 40 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) < 40 \cdot 1 < 50,$$

tai trąšų kiekis vazone niekada nepasidarys toks, kad gėlė imtų džiūti. Gali Jurgita tręšti gėlę pasirinktuoju būdu!

Tačiau daugelis taip patarė ir be jokių argumentų. Juokais galima tarti, kad tai padiktavo sveiko proto nuoseklumas. Jeigu jau pirmoje dalyje nustatėme, kad po ketvirtojo tręšimo trąšos visą laiką veiks efektyviai, tai ir tręškime nieko nebijodami. Mažai kam šaus į galvą, kad efektyvus trąšų veikimas gali reikšti ir gėlės marinimą.

Matyt, šiek tiek „minkštesnė" uždavinio formuluotė įteigė mintį, kad ir argumentai gali būti „švelnesni". Tad Jurgitai negailėta geranoriškų patarimų. Kai kurie buvo gana įdomūs. Štai žiupsnelis citatų iš egzamino darbų.

- *Taip, gali, nes trąšų kiekis didėja labai nežymiai ir greičiausiai po kiek laiko, kol trąšos viršys normą, Jurgitai ši gėlė atsibos, o gal ji ir nudžius.*
- *Jeigu gėlė ruošiasi augti amžinai, tai Jurgita negali jos taip tręšti. Bet gėlė turėtų užaugti, kol trąšų koncentracija padidės iki 50 g. Dar reiktų maždaug pusantro mėnesio.*
- *Negali, nes po kiekvieno karto trąšų lieka 7,5 g. Tai po septynių savaičių liks tik vazonas.*
- *Taip, gali, nes ta gėlė jai greičiau įkyrės, negu nudžius.*
- *Greičiausiai gėlė neišgyvens tiek, kiek ją reikės trąšuoti.*
- *Jei Jurgita ir toliau taip tręš gėlę, ji ims džiūti.*
- *Jurgita negali nuolat tręšti gėlės, nes gėlė nuvys. Ji turi palaukti 11 savaičių, kad trąšų norma atsistatytų.*
- *Gali tręšti drąsiai, nes biotrąšų kiekis viršys normą labai negreitai, o per tą laiką daug kas gali atsitikti.*
- *Gali, nes kuo daugiau tręši, tuo daugiau trąšų gėlė pasisavina ir net didesnį kiekį negu tręši.*
- *Jurgita su savo gėle gali daryti, ką tik nori.*
- *Jurgita negali visada laistyti gėlės trąšomis tokiu principu, nes progresija yra didėjanti ir anksčiau ar vėliau ji pasieks 50 g (mano skaičiavimais maždaug po 35 kartų, t. y. po 9 mėnesių).*
- *Negalima, nes jeigu taip tręš ir toliau, tai trąšų kiekis didės ir didės, o žolė toliau džius.*
- *Biologiškai pamąsčius, ar iš viso taip dažnai reikia tręšti tą gėlę? Juk užtenka kartą pakeisti durpes (per mėnesį) ir gėlė augs. Jurgitos atveju, manyčiau, toliau tręšti nuolat šeštadieniais tikrai neverta. Per didelė priežiūra taip pat kenkia augalams, reikia viską daryti su saiku.*



Vilius Stakėnas