$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 2, 37–52

Vietoj recenzijos, arba Padėkime abiturientams

Juozas Mačys
conf@ktl.mii.lt

Nors pastaraisiais metais išleista nemažai uždavinynų ir knygelių matematikos egzaminams pasiruošti, viešai jų vertė nebuvo aptarinėjama. Autorius pabandė panagrinėti, kokie uždaviniai ir jų sprendimai pateikiami vienoje iš jų.

Buvo balandžio pradžia, ir ruošiausi važiuoti į Kauną, į konferenciją „Matematika ir jos dėstymas". Buvau numatęs pakalbėti tema „Kaip rašoma matematika", o iš tikrųjų — apie tai, kaip kartais neatsakingai rengiami vadovėliai ir uždavinynai. Ir būna gi atsitiktinumų — prieš pat važiuojant į konferenciją pažįstamas matematikos mokytojas atsinešė uždavinyną, kuriame buvo prižymėta daugybė korektūros klaidų ir neteisingų atsakymų. Tai buvo Algidės Jocaitės ir Vaidoto Mockaus knygelė[1], išleista 2000 metais Šiauliuose.

Konferencijoje užsiminiau, kad mokytojai į dabar gausiai leidžiamas knygeles turėtų žiūrėti kritiškai. Keletą pavyzdžių pateikiau ir iš šios knygelės: $x^2 = a$ pavidalo lygtis tiriama ieškant diskriminanto (!) ir taikant Vijeto teoremą (!!); mokiniams siūloma įrodyti, kad funkcija $y = x^3$ neperiodinė (!).

Bet netikėtumai tuo nesibaigė — grįžęs į Vilnių, darbe pamačiau nematytą neregėtą laikraštį „Mokyklos frontas" (Nr. 1, 2001 03 27) , o jame — Justės Sladkevičiūtės ir Lino Pupelio straipsnį „Matematikos uždavinynų gausa gąsdina moksleivius". Straipsnyje rašoma:

> Šiaulių „Salduvės" vidurinės mokyklos mokytoja-ekspertė (taip jau parašyta, su brūkšneliu; ir toliau pastabos skliausteliuose mano — J. M.), daugelio vadovėlių autorė, Petrė Grebeničenkaitė moksleiviams siūlo naudoti du pagrindinius vadovėlius (!!), jos manymu, labiausiai atitinkančius valstybinio egzamino lygį: „Pasiruoškite baigiamajam matematikos egzaminui" (turi būti — „Pasiruoškime ... ") ir „Baigiamajam matematikos egzaminui artėjant".

Straipsnyje teigiama, kad Kauno „Atžalyno" mokyklos mokytoja R. Repečkienė, greta kelių kitų knygų, moksleiviams rekomenduoja minėtąją „Baigiamajam ... artėjant". Toliau straipsnyje rašoma: „Gana retas šios knygos privalumas tas, kad R. Repečkienė knygoje nerado nė vienos klaidos".

Nekalbėsiu apie laikraščio siūlomą „vadovėlių" privalumų nustatymo metodiką. Nepradėsiu abejoti, ar tikrai moksleivius gąsdina uždavinynų gausa. Vis dėlto labai norėtųsi jiems padėti. Manau, kad nesvarbu, ar šias pastabas skaitys abiturientai, ar jų mokytojai — jos ir vieniems, ir kitiems padės orientuotis minėtoje „gausoje".

Toliau kalbėsiu tik apie knygelę „Baigiamajam ... artėjant" (kurioje, anot laikraščio, nerasta nė vienos klaidos). Mano nuomonė apie ją kategoriška — kaip kažkada teko rašyti vienos knygos recenzijoje: „Ši knygelė, nei kokia ji yra, nei pataisyta negali būti rekomenduojama moksleiviams". Negrupuosiu gausybės dalyko, metodikos, tiesiog logikos, pagaliau — kalbos klaidų. Stengsiuosi

[1] A. Jocaitė, V. Mockus, *Baigiamajam matematikos egzaminui artėjant. 200 mokyklinės matematikos uždavinių su sprendimais ir 200 uždavinių savikontrolei su atsakymais*, Šiauliai, 2000. Recenzavo Gintaras Šaparnis, Šiaulių universiteto Edukacinio testavimo mokslinio centro mokslinis bendradarbis, J. Janonio gimnazijos mokytojas.

keliomis dešimtimis pavyzdžių paaiškinti, kaip reikia spręsti uždavinius, kaip suprasti netiksliai suformuluotas sąlygas, kaip nedaryti klaidų taikant vadovėlių teiginius. Iš pradžių smulkiu šriftu pateikiama *netaisyta* knygelės uždavinio sąlyga, atsakymas ir sprendimas (prašome skaitant nekrūpčioti — stengėmės nieko nekeisti), po to įprastiniu šriftu — straipsnio autoriaus pastabos.

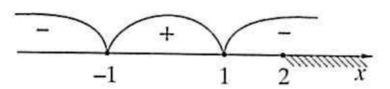
I bilietas, 7 klausimas

Išspręskite lygtį $\sqrt{x-2} = 1 - x^2$.

Atsakymas. Lygtis realiųjų sprendinių neturi.

Sprendimas. Lygtis turi sprendinius, kai tenkinamos sąlygos:

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 1 - x^2 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ (1-x)(1+x) \geqslant 0. \end{cases}$$



Kadangi gautoji sistema sprendinių neturi, tai duotoji lygtis neturi sprendinių.

Pastabos. i) Visiškai aišku, kad sistema

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

neturi sprendinių — kam tada intervalų metodas ir piešinys?

Beje, vargu ar nelygybę $1 - x^2 \geqslant 0$ verta spręsti skaidant — juk nelygybės $x^2 \leqslant 1$ sprendiniai akivaizdūs: $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

ii) Bet svarbiausia, kad siūlomasis sprendimas klaidina. Pasakyta, kad „lygtis turi sprendinius, kai tenkinamos sąlygos“

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 1 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Taip teigti klaidinga. Pavyzdžiui, imkime lygtį $\sqrt{x-2} = x + 1$. Sąlygos

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

tenkinamos (kai $x \geqslant 2$), o lygtis $\sqrt{x-2} = x+1$ sprendinių neturi.

Teisingas teiginys yra toks: lygtis *gali* turėti sprendinių tik tada, kai tenkinamos nurodytos sąlygos (tas pats kitaip: lygtis sprendinių neturi, jeigu nurodytos sąlygos netenkinamos). O atvirkščias teiginys, kaip matėme, būna ir neteisingas: sąlygos tenkinamos, bet sprendinių nėra. (Beje, teiginio „turi realiųjų sprendinių“ pakeitimas teiginiu „turi realiuosius sprendinius“ nėra matematikoje toks nekaltas, kaip tat galėtų pasirodyti iš pirmo žvilgsnio. Pavyzdžiui, lygtis $(x^2-1)(x^2+x+1) = 0$ turi realiųjų sprendinių — tai $x = 1$ ir $x = -1$. Bet negerai sakyti, kad ši lygtis turi realiuosius sprendinius, nes ji turi ir menamųjų sprendinių, netgi du: $x = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$.)

iii) Uždavinys nestandartinis, jį sunku išspręsti keliant kvadratu. Todėl nori nenori tenka samprotauti apie x kitimo sritį. Elegantiškas sprendimas būtų, pavyzdžiui, toks:

Kairioji lygties pusė apibrėžta, kai $x \geqslant 2$, ir neneigiama. Bet tada dešinioji pusė neigiama, taigi lygtis sprendinių neturi.

I bilietas, 10 klausimas

Duota lygtis $ax^2 + 4x - 3 = 0$.

1. Su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis turi realiuosius sprendinius?

2. Su kuriomis parametro a reikšmėmis šios kvadratinės lygties šaknų kvadratų suma didesnė už 10?

Atsakymas. 1) $[-1\frac{1}{3}; \infty)$; 2) $(-1; 0) \cup (0; 1{,}6)$.

Sprendimas. 1. Lygtis turi realiuosius sprendinius, kai $D \geqslant 0$. $D = 16 + 12a$; $4(4+3a) \geqslant 0$, $a \geqslant -1\frac{1}{3}$, $[-1\frac{1}{3}; \infty)$.

2. Kvadratinei lygčiai $ax^2 + bx + c = 0$ taikome Vietos teoremą $x_1 + x_2 = -b/a$ ir $x_1 \cdot x_2 = c/a$, t. y. $x_1 + x_2 = -4/a$ ir $x_1 \cdot x_2 = -3/a$. $(x_1+x_2)^2 = (-4/a)^2$; $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 16/a^2$; $x_1^2 + x_2^2 = 16/a^2 + 6/a$. Kadangi $x_1^2 + x_2^2 > 10$, tai $16/a^2 + 6/a > 10$; $(10a^2 - 6a - 16)/a^2 < 0$; $10(a-1{,}6)(a+1)/a^2 < 0$. Nelygybės sprendinys $(-1; 0) \cup (0; 1{,}6)$.

Pastabos. i) Sąlyga suformuluota labai nevykusiai. Teiginys „turi realiuosius sprendinius" gali įteigti mintį, kad reikia ieškoti tokių parametro a reikšmių, su kuriomis lygtis turėtų bent du realiuosius sprendinius. Todėl reikia sakyti „turi (realiųjų) sprendinių". Sakyti „ši kvadratinė lygtis" negalima, nes kartais ji yra kvadratinė, o kartais — ne (ši frazė tarsi uždraudžia nagrinėti parametro reikšmę $a = 0$). Na ir dar viena problema mokiniui: kai šaknis viena — ar galima kalbėti apie šaknų kvadratų sumą, ar ne? Mano nuomone, ir tada, kai šaknis viena ($a = 0$, t. y. lygtis pirmojo laipsnio), ir tada, kai diskriminantas lygus nuliui ($a = -4/3$), šaknų kvadratų suma reikia laikyti vienos šaknies kvadratą (juk nebijome kalbėti apie sumą $1+2+\cdots+n$, kai $n = 1$: ar teko kur nors matyti užrašą $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$, kai $n \geqslant 2$?).

ii) Sprendimas neteisingas: pasakyta, kad lygtis turi realiuosius sprendinius, kai $D \geqslant 0$. Bet jau sakėme, kad ši lygtis kartais kvadratinė, kartais — ne. Jeigu lygtis kvadratinė, tai turime teisę kalbėti apie jos diskriminantą. Jei lygtis nekvadratinė, tai tokios galimybės neturime (niekam juk neateis į galvą klausti, koks lygties $x - 2 = 0$ ar lygties $x^3 - 2 = 0$ diskriminantas). Vadinasi, reikia spręsti taip.

Nagrinėkime 2 atvejus: 1) $a = 0$ ir 2) $a \neq 0$. Pirmuoju atveju gauname pirmojo laipsnio lygtį $4x - 3 = 0$, kuri turi vienintelį sprendinį $x = 3/4$. Antruoju atveju $a \neq 0$, tada lygtis kvadratinė, taigi ji turi sprendinių (vieną arba du), kai $D \geqslant 0$, t. y. kai $a \neq 0, a \geqslant -4/3$. Sujungę 1) ir 2) atvejų a reikšmes, gauname atsakymą į (patikslintą) pirmą uždavinio klausimą: lygtis turi realiųjų šaknų, kai $a \geqslant -4/3$.

Dabar atsiribokime nuo pirmosios uždavinio dalies (užmirškime ją!) ir nepriklausomai išspręskime tiksliau suformuluotą antrą uždavinio dalį:

Su kuriomis parametro a reikšmėmis lygties $ax^2 + 4x - 3 = 0$ šaknų kvadratų suma didesnė už 10?

Nepulkime taikyti Vijeto teoremos — ją galima taikyti tik tada, kai lygtis kvadratinė, o jos šaknys realios. Kitaip sakant, Vijeto teorema lygčiai $ax^2 + bx + c = 0$ užrašoma ne dviem sąryšiais $x_1 + x_2 = -b/a, x_1x_2 = c/a$, o net keturiais: $a \neq 0,\ D \geqslant 0,\ x_1 + x_2 = -b/a,\ x_1x_2 = c/a$.

Taigi sprendžiame taip. Jeigu lygties $ax^2 + 4x - 3 = 0$ koeficientas $a = 0$, tai lygtis yra pirmojo laipsnio ir turi vieną šaknį $x = 3/4$, kurios kvadratas yra 9/16, todėl reikšmė $a = 0$ netinka. Jeigu $a \neq 0$, tai lygtis kvadratinė. Su kai kuriomis a reikšmėmis ji neturi šaknų, su kai kuriomis turi vieną šaknį, su kai kuriomis — dvi. Tos reikšmės, kai lygtis neturi šaknų (kai $D = 16 + 12a < 0$), mums netinka. Lygtis turi vieną šaknį, kai $D = 0$, t. y. $a = -4/3$. Randame tą šaknį: $-4x^2/3 + 4x - 3 = 0$, $4x^2 - 12x + 9 = 0$, $(2x - 3)^2 = 0$, $x = 3/2$. Jos kvadratas yra 9/4, taigi mažiau už 10, ir $a = -4/3$ mums netinka. Pagaliau, lygtis turi dvi šaknis, kai $a \neq 0$ ir $D > 0$, t. y. $a > -4/3$, $a \neq 0$. Remiantis Vijeto teorema, $x_1 + x_2 = -4/a, x_1x_2 = -3/a$, todėl $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-4/a)^2 + 2 \cdot 3/a = 16/a^2 + 6/a$. Kad būtų $x_1^2 + x_2^2 > 10$, turi būti $16/a^2 + 6/a > 10$. Šios nelygybės sprendiniai yra $-1 < a < 0$ ir $0 < a < 8/5$, be to, jie tikrai yra nagrinėjamoje srityje $a > -4/3$, $a \neq 0$. Uždavinys išspręstas.

I bilietas, 11 klausimas

Ūkininkas už 37,5% turimų pinigų pasistatė namą, o už 0,4 likusios sumos nusipirko žemės, už 2/3 likusių pinigų nusipirko inventorių, o 12000 Lt padėjo į banką.

1. Kiek ūkininkui kainavo namo statyba?
2. Kiek jis išleido pinigų, pirkdamas žemę?
3. Kiek ūkininkui kainavo inventorius?

Pastabos. Vėl prastai suformuluota sąlyga — ypač klaidina pirmasis jungtukas „o". Ir apskritai — įdomus tas ūkininkas: spręsdami sužinome, kad jis „turėjo" 96 000 litų, o iš sąlygos suvokiame, kad jis, ko gero, neturėjo nei namo, nei žemės, nei inventoriaus. Beje, „kuriant" vadinamuosius realiojo turinio uždavinius dažnai atsitinka, kad turinys tampa visiškai nerealus.

$\alpha + \omega$

II bilietas, 7 klausimas

Moteris krepšyje turėjo obuolių. Paklausta, kiek obuolių turi krepšyje, ji atsakė, jog tiksliai nežinanti, tačiau atsimenanti, kad sudėjus obuolius į krūveles po 2, 3, 4, 5, 6 ir 7, kiekvieną kartą likdavo vienas obuolys. Kiek obuolių turėjo moteris?

Atsakymas. 421.

Sprendimas. Obuolių skaičius yra skaičių 2, 3, 4, 5, 6 ir 7 bendras mažiausias kartotinis plius vienas (nes vienas obuolys, sudėjus į krūveles, likdavo). Skaičius skaidome dauginamaisiais: 2; 3; 2^2; 5; $2 \cdot 3$ ir 7. Sudarome sandaugą dauginamųjų su didžiausiu laipsnio rodikliu, t. y. $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$; $420 + 1 = 421$.

Pastabos. Autoriai sugebėjo sugadinti tiek gerai žinomo uždavinio sąlygą, tiek ir jo sprendimą. Jei jau moteris krepšyje galėjo panešti 421 obuolį, tai gal ji galėjo panešti ir 841 obuolį — tai juk netgi ne dvigubai daugiau, o 841 irgi tenkina uždavinio sąlygą.

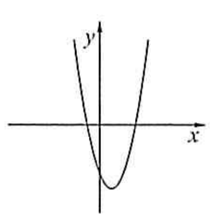
Gelbėti uždavinį (ir sprendimą) galima keičiant uždavinio klausimą taip: *Kiek mažiausiai obuolių galėjo turėti moteris*? O geriau būtų dar ir obuolius pervardijus obuoliukais — nieko nepadarysi, jei jau realiname uždavinį, tai realinkime.

Sprendimo klaida — kalbama ne apie bendrąjį kartotinį, o apie mažiausiąjį bendrąjį kartotinį. Sakinys „Sudarome sandaugą dauginamųjų su didžiausiu laipsnio rodikliu" visiškai nevykęs.

II bilietas, 9 klausimas

Kurios funkcijos:

1) $y = -x^2 - 4x - 5$; 2) $y = x^2 - 4x - 5$; 3) $y = x^2 + 4x + 5$; 4) $y = x^2 + 4x - 5$; 5) $y = -x^2 + 4x + 5$. grafikas pavaizduotas paveiksle?



Atsakymas. 2).

Sprendimas. Kvadratinės funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafiko šakos eina į viršų, jei $a > 0$; koeficientas c parodo, kuriame taške grafikas kerta y ašį. Kadangi pagal duotą funkcijos grafiką $a > 0$ ir $c < 0$, todėl grafikas gali būti 2) arba 4) funkcijos. Grafiko viršūnės koordinatės abscisė x_o turi būti teigiama. (Viršūnės koordinatė apskaičiuojama pagal formulę: $x_o = -b/(2a)$ arba randame funkcijos kritinį tašką, t. y. $y' = 0$).

Šią sąlygą tenkina tik 2) funkcija, t. y. $y' = 2x - 4$, $2x - 4 = 0$, $x = 2$.

Pastabos. i) Sprendimo sakiniai apie *viršūnės* koordinatės abscisę x_0 — neraštingumo *viršūnė*.

ii) Atsakymas, kad pavaizduotas funkcijos $y = x^2 - 4x - 5$ grafikas, aiškiai neteisingas. Juk $y = (x + 1)(x - 5)$, ir atstumas nuo koordinačių pradžios iki parabolės ir Ox ašies susikirtimo taško (5; 0) būtų lygus 5, o iki parabolės ir Oy ašies susikirtimo taško (0; −5) — taip pat lygus 5. O net iš akies (juo labiau pamatavę) matome, kad tie atstumai nelygūs.

Savaime aišku, kad duodant tokius uždavinius būtina bent apytiksliai nupiešti norimos funkcijos grafiką.

Ką tokiu ekstra atveju patarti mokiniams? Paaiškinkime jiems, kad atsakymas galėtų būti toks: Sąlygos netenkina nė viena iš nurodytų funkcijų. Greičiausiai buvo numatytas atsakymas, kad sąlygą tenkina funkcija $y = x^2 - 4x - 5$, bet labai apsirikta braižant jos grafiką.

II bilietas, 16 klausimas

Duota lygtis $\sin 2x \cdot \sqrt{4 - x^2} = 0$.

1. Raskite apibrėžimo sritį.
2. Raskite lygties sprendinius.

Atsakymas. 1) $[-2; 2]$; 2) -2; $-\pi/2$; 0; $\pi/2$; 2.

Sprendimas. 1) $4 - x^2 \geqslant 0$, $(2 - x)(2 + x) \geqslant 0$; $[-2; 2]$.

2) Lygties kairioji pusė yra dviejų reiškinių su kintamuoju x sandauga. Tokios lygties sprendiniai yra tos ir tik tos kintamojo x reikšmės, su kuriomis bent vienas iš dauginamųjų lygus nuliui, t. y. $\sin 2x = 0$ arba $4 - x^2 = 0$. $\sin 2x = 0$, kai $x = \pi k/2$, $k \in z$, o $4 - x^2 = 0$, kai $x = \pm 2$. Iš sprendinių, kurių pavidalas yra $\pi k/2$, išrenkame tuos, kurie priklauso pradinės lygties apibrėžimo sričiai $[-2; 2]$. Kai $k = -1$, tai $x = -\pi/2$; kai $k = 0$, tai $x = 0$; kai $k = 1$, tai $x = \pi/2$; kai $k = -2$, tai $x = \pi$ (nepatenka į intervalą $[-2; 2]$). Vadinasi, lygties sprendiniai yra -2; $-\pi/2$; 0; $\pi/2$; 2.

Pastabos. i) Sprendimo teiginys „lygties sprendiniai yra tos ir tik tos kintamojo reikšmės, su kuriomis bent vienas iš dauginamųjų lygus nuliui“ — neteisingas. Jį pataisyti galima dvejopai:

1) lygties sprendiniai *gali būti* tik tos reikšmės, su kuriomis bent vienas iš dauginamųjų lygus nuliui (iš tikrųjų kaip tik šiuo teiginiu ir naudojamasi sprendime);

2) lygties sprendiniai yra tos ir tik tos reikšmės, kai vienas iš dauginamųjų lygus nuliui, o kitas turi prasmę (kad mokiniams būtų lengviau įsiminti, sakome: nulį padauginę iš bet kurio skaičiaus gauname nulį, bet nulį padauginę iš nesąmonės gauname nesąmonę).

ii) Perranka, kurios iš reikšmių $\pi k/2$ patenka į apibrėžimo sritį, atlikta ne iki galo. Gal galima būtų jos ir nekomentuoti, bet jeigu jau komentuojame — tai ją reikia atlikti „į abi puses“ (beje čia mokinį trikdys ir korektūros klaida: „kai $k = -2$, tai $x = \pi$“). Rašyti galima, pavyzdžiui, taip:

Kai $k = 0$, tai $x = 0$; kai $k = 1$, tai $x = \pi/2$; kai $k = 2$, tai $x = \pi > 2$ ir nepatenka į intervalą $[-2; 2]$; juo labiau į šį intervalą nepatenka reikšmės su $k > 2$.

Kai $k = -1$, tai $x = -\pi/2$; kai $k = -2$, tai $x = -\pi < -2$ ir nepatenka į intervalą $[-2; 2]$. Juo labiau į šį intervalą nepatenka reikšmės su $k < -2$.

Užuot perrinkinėjus, galima spręsti nelygybę: $-2 \leqslant \pi k/2 \leqslant 2$, $-4 \leqslant \pi k \leqslant 4$, $-4/\pi \leqslant k \leqslant 4/\pi$, $k \in \{-1; 0; 1\}$.

II bilietas, 18 klausimas

Duotas kvadratas ir skritulys. Žinoma, kad jų plotai lygūs. Kuris dydis didesnis: apskritimo ilgis ar kvadrato perimetras? Atsakymą pagrįskite.

Atsakymas. Apskritimo ilgis yra mažesnis už kvadrato perimetrą.

Sprendimas. Sakykime, kad a — kvadrato kraštinė, r — apskritimo spindulys. Tada, remiantis uždavinio sąlyga, $a^2 = \pi r^2$; iš čia $a = r\sqrt{\pi}$. Tarkime, kad apskritimo ilgis didesnis už kvadrato perimetrą. Tuomet, $2\pi r > 4a$, $2\pi r > 4r\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi} > 2$, $\pi > 4$. Gavome klaidingą skaitinę nelygybę (prisiminkime, kad $\pi \approx 3,14$). Tai rodo, kad mūsų prielaida, jog apskritimo ilgis didesnis už kvadrato perimetrą, yra klaidinga. Vadinasi, apskritimo ilgis yra mažesnis už kvadrato perimetrą.

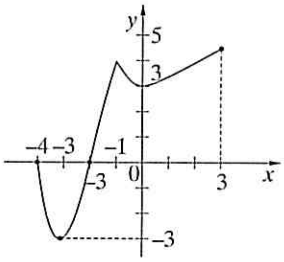
Pastabos. i) Sprendžiant padaryta tipiška klaida: teiginiui „didesnis“ priešingas teiginys yra ne „mažesnis“, o „ne didesnis“. Negana to, prieštarą sunkoka gauti, kai operuojama apytikslėmis lygybėmis. Todėl sprendimą taisome taip:

Tarkime, kad apskritimo ilgis yra didesnis už kvadrato perimetrą arba jam lygus. Tada $2\pi r \geqslant 4a$, $2\pi r \geqslant 4r\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi} \geqslant 2$, $\pi \geqslant 4$. Bet žinome, jog $\pi < 3,15$. Tai rodo, kad mūsų prielaida, jog apskritimo ilgis ne mažesnis už kvadrato perimetrą, yra klaidinga. Vadinasi, apskritimo ilgis yra mažesnis už kvadrato perimetrą.

ii) Mokiniams visada prieinamesnis tiesioginis sprendimas, be prieštaros. Kvadrato (taigi ir skritulio) plotą pasižymėkime S. Tada kvadrato kraštinė yra $\sqrt{S}$, o perimetras lygus $4\sqrt{S}$; apskritimo spindulys yra $\sqrt{S/\pi}$, todėl jo ilgis lygus $2\sqrt{\pi S}$. Bet $4 > 2\sqrt{\pi}$, nes $\pi < 4$, todėl kvadrato perimetras didesnis.

III bilietas, 3 klausimas

Funkcijos grafikas pavaizduotas brėžinyje. Nustatykite šios funkcijos didėjimo intervalą.



Pastabos. Matome, kad tokie intervalai yra du. Kas tai — specialus mokinio klaidinimas ar neapsižiūrėjimas? Juk sakyti „Raskite lygties sprendinį“ visai ne tas pat, kas prašyti „Išspręskite lygtį“ ar „Raskite visus sprendinius“.

III bilietas, 9 klausimas

Trikampio kraštinės yra 3 cm, 5 cm ir 7 cm ilgio. Smailusis, bukasis ar statusis šis trikampis?

Atsakymas. Bukasis trikampis.

Sprendimas. Rasime kampą prieš ilgiausią kraštinę. Taikome kosinusių teoremą: $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\alpha$. $\cos\alpha = (9 + 25 - 49)/(2 \cdot 3 \cdot 5) = -1/2$. Kadangi $\cos\alpha < 0$, tai α — bukasis kampas: $\cos\alpha = -60°$; $\alpha = 180° - 60° = 120°$.

Pastabos. Kai skaitai „kosinusių", šypteli — graži korektūros klaida. Bet kai skaitai toliau — norisi ir juoktis, ir verkti. Gavę $\cos\alpha = -1/2$, autoriai „įrodinėja", kad α — bukasis kampas: $\cos\alpha = -60°$ (??), $\alpha = 180° - 60°$ (???). Ir čia visiškai ne korektūros klaida, o tikrų tikriausia maišalynė galvoje — visi mes ne kartą ir ne du matėme prastus mokinius taip rašinėjant.

III bilietas, 11 klausimas

Duota funkcija $y = 2\sqrt{3}\cos x + \cos 2x$.

1. Raskite funkcijos kritinius taškus.
2. Tarp kritinių taškų nurodykite vieną minimumo tašką.

Pastabos. Sąlygos žodis „tarp" dviprasmiškas. Mokiniui visiškai neaišku, kokį minimumo tašką jam reikia rasti. Jei „bent vieną", tai taip ir sakykime. O dar geriau paprašyti rasti visus minimumo taškus (arba vieną tašką konkrečiame intervale).

III bilietas, 12 klausimas

Dėžėje yra 15 raudonų, 9 mėlyni ir 6 žali vienodo dydžio rutuliai. Atsitiktinai vienas po kito išimami 6 rutuliai. Kokia tikimybė, kad bus išimtas 1 žalias, 2 mėlyni ir 3 raudoni rutuliai?

Pastabos. Sunku suprasti, apie kokį įvykį kalbama: ar 1) pirmas rutulys bus žalias, antras ir trečias — mėlyni, ketvirtas, penktas ir šeštas — raudoni, ar 2) tarp šešių ištrauktų rutulių bus 1 žalias, 2 mėlyni ir 3 raudoni. Sąlygoje viską sugadino bereikalingi žodžiai „vienas po kito".

III bilietas, 14 klausimas

Atstumas tarp miestų A ir B lygus 100 km. Iš miesto A į miestą B tuo pačiu metu išvyksta du automobiliai. Pirmojo automobilio greitis 10 km/h didesnis negu antrojo. Žinoma, kad pirmasis automobilis 50 min buvo sustojęs. Raskite visas pirmojo automobilio greičio reikšmes, su kuriomis jis atvyksta į miestą B ne vėliau negu antrasis automobilis.

Atsakymas. (10; 40].

Pastabos. Autoriai vėl beviltiškai sugadino gerai žinomą uždavinį, liepdami rasti „visas" greičio reikšmes. Paaiškėja, kad jiems visiškai patinka antrojo automobilio greitis 0,5 km/h (ir net 0,01 km/h). Bet net maksimalūs lenktyniaujančių automobilių greičiai džiugina: 40 km/h ir 30 km/h. Kažkada eismo taisyklėse esu matęs punktą, kad automobilis privalo nekompromituoti automobilio vardo.

IV bilietas, 5 klausimas

Duota funkcija $g(x) = x^3$. Nubraižykite funkcijos $g'(x)$ grafiką.

Pastaba. Beskonybės formuluojant uždavinį pavyzdys: duota viena funkcija, braižyti siūloma kitos funkcijos grafiką.

IV bilietas, 7 klausimas

Raskite $\log_2 \sqrt{ab}$, jei $\log_2 a = x$ ir $\log_2 b = y$.

Pastaba. Mokiniui bus labai malonu, kad duoti x ir y, o reikia rasti a ir b: tai lygiai septynis kartus maloniau negu rasti x ir y, kai duoti a ir b (o gal aš neteisus?).

IV bilietas, 12 klausimas

Įrodykite, kad funkcijos $y = \sin\pi x$ mažiausias teigiamas periodas lygus 2.

Įrodymas. Jeigu skaičius $T \neq 0$ yra funkcijos $y = \sin\pi x$ periodas, tai pagal periodinės funkcijos apibrėžimą lygybė $\sin\pi(x + T) = \sin\pi x$ turi galioti su bet kuria kintamojo x reikšme. Turime $\sin\pi(x + T) - \sin\pi x = 0$; $2\cos(\pi x + \pi T/2)\sin(\pi T/2) = 0$. Dauginamojo $\cos(\pi x + \pi T/2)$ reikšmė priklauso nuo x, todėl paskutinioji lygybė teisinga su bet kuria kintamojo x reikšme tiktai kai $\sin(\pi T/2) = 0$, t. y. $\pi T/2 = \pi k$, $T = 2k$, kur $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Mažiausią teigiamą reikšmę dydis T įgyja, kai $k = 1$. Vadinasi, mažiausias teigiamas duotosios funkcijos periodas yra $T = 2$.

Pastabos. i) Mokiniui siūlomas neįtikėtinas dalykas — užmiršti, kad funkcijos $\sin x$ (mažiausias teigiamas) periodas yra 2π. Juk jeigu jis tai žino, tai jam visiškai aišku, kad funkcijos $\sin 3x$

periodas yra $2\pi/3$, o $\sin\pi x$ periodas yra $2\pi/\pi = 2$. Ir už mokinio sprendimą „Kadangi funkcijos $\sin x$ periodas yra 2π, tai funkcijos $\sin\pi x$ periodas yra $2\pi/\pi = 2$“ privalu duoti visus už tą uždavinį skirtus balus.

ii) Sprendžiant remiamasi nelabai aiškiu teiginiu:

Lygybės $2\cos(\pi x + \pi T/2)\sin(\pi T/2) = 0$ *dauginamojo* $\cos(\pi x + \pi T/2)$ *reikšmė priklauso nuo* x, *todėl lygybė teisinga su bet kuria kintamojo* x *reikšme tiktai kai* $\sin(\pi T/2) = 0$, *t. y.* $\pi T/2 = \pi k$, $T = 2k$, *kur* $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Taip samprotauti pavojinga. Iš tikrųjų imkime panašų teiginį:

Lygybės $2(\cos\pi x \cos\pi T/2 \sin\pi T - \sin\pi x \sin\pi T/2 \sin\pi T)\sin\pi T/2 = 0$ *dauginamojo skliaustuose reikšmė priklauso nuo* x, *todėl lygybė teisinga tiktai kai* $\sin\pi T/2 = 0$, *t. y.* $T = 2k$, $k \in Z$.

Tai jau neteisingas teiginys — lygybė teisinga ir kai, pavyzdžiui, $T = 1$.

iii) Sprendimo logika turėtų būti tokia. Lygybė $\sin\pi(x + T) = \sin\pi x$ galioja su kiekviena x reikšme, todėl imkime keletą „patogių“ x reikšmių. Pasirinkę $x = 0$, gauname $\sin\pi T = 0$, $\pi T = \pi k$, $T = k$ (paėmę $x = -T$, gauname tą patį). Ką tuo įrodėme? Ogi štai ką: *jeigu* funkcija $\sin\pi x$ turi teigiamą periodą, tai jis gali būti tik vienas iš skaičių $1, 2, 3, \ldots$. Bet atsiminkime — dar nežinome, ar tie skaičiai yra periodai, ar ne. Mažiausias iš tų skaičių yra 1, ir jeigu mums pavyktų įrodyti, kad tai periodas, jis ir būtų ieškomasis. Deja, $T = 1$ nėra funkcijos $\sin\pi x$ periodas: lygybė $\sin\pi(x + 1) = \sin\pi x$ neteisinga, pavyzdžiui, kai $x = 1/2$, — kairiojoje pusėje gauname -1, o dešiniojoje 1.

Dabar iš eilės eina skaičius $T = 2$, ir jeigu pavyktų įrodyti, kad tai periodas, jis ir būtų mažiausias teigiamas periodas. Bet tai padaryti lengva: $T = 2$ yra periodas, nes $\sin\pi(x + 2) = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin\pi x$. Čia remiamės tuo, kad 2π yra $\sin x$ periodas. Vadinasi, liepti mokiniams užmiršti šį faktą tikrai negalima.

iv) Galėtų pasirodyti, kad knygelės sprendime šio fakto neprireikia. Nieko panašaus — ten tiesiog nebaigtas įrodymas. Juk pirmas įrodymo sakinys prasideda žodžiu „jeigu“. Kitaip sakant, įrodyta (jeigu patikslintume neaiškius samprotavimus) tik tiek: jeigu $\sin\pi x$ turi periodų, tai mažiausias teigiamas periodas yra ne mažesnis kaip $T = 2$. O štai įrodant, jog periodų yra, tenka remtis tuo, kad $\sin x$ turi periodą 2π.

v) Žinoma, mūsų pateiktas sprendimas yra mokomasis. O išmokus spręsti, surašyti sprendimą trumpai galima taip:

Jeigu $T > 0$ yra funkcijos $\sin\pi x$ periodas, tai su visais x teisinga lygybė $\sin\pi(x+T) = \sin\pi x$. Paėmę $x = -T/2$, gauname $2\sin(\pi T/2) = 0$, t. y. $T = 2k$, $k \in N$. Mažiausia iš šių T reikšmių yra $T = 2$.

Dar reikia įrodyti, kad $T = 2$ tikrai yra periodas. Bet tai išplaukia iš fakto, kad 2π yra sinuso periodas: $\sin\pi(x + 2) = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin\pi x$.

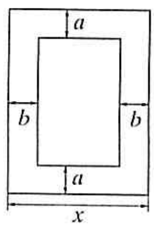
V bilietas, 15 klausimas

Įrodykite, kad atstumų nuo trikampio bet kurio vidaus taško iki jo viršūnių suma lygi šio trikampio pusperimetriui.

Pastabos. Tai labai populiarus uždavinys, tik sąlyga sugadinta: turi būti ne „lygi pusperimetriui“, o „didesnė“ už pusperimetrį. Tokias klaidas sunku net vadinti korektūros klaidomis.

V bilietas, 18 klausimas

Knygos puslapio plotas yra $S\,\mathrm{cm}^2$. Pagal technines sąlygas viršuje ir apačioje teksto paraščių plotis turi būti lygus a cm, o iš kairės ir iš dešinės — b cm.



1. Knygos plotį pažymėkite x. Parodykite, kad teksto užimamas plotas $Q = S + 4ab - (2bS/x + 2ax)\,\mathrm{cm}^2$.

2. Raskite funkcijos $Q(x)$ išraišką, kai $S = 231{,}2$, $a = 13{,}6$ ir $b = 17$.

3. Koks turi būti puslapio matmenų santykis, kad puslapyje teksto užimamas plotas būtų didžiausias?

Atsakymas. 2) $Q(x) = 238{,}4 - 554{,}88/x - 3x$ (cm^2); 3) 4/5 arba 5/4.

Sprendimas. 1) Kadangi knygos plotis x, tai ilgį pažymėkime y. Tada knygos plotas $S = xy$, iš čia $y = S/x$. Teksto užimamas plotas

$Q = (x - 2b)(y - 2a) = (x - 2b)(S/x - 2a) = S - 2ax - 2bS/x + 4ab = S + 4ab - (2bS/x + 2ax)$.

Tai reikėjo įrodyti.

2) Įstatę duotąsias reikšmes, gauname:

$Q(x) = 231{,}2 + 7{,}2 - 554{,}88/x - 3x = 238{,}4 - 554{,}88/x - 3x$.

3) Randame funkcijos $Q(x)$ kritinius taškus, t. y. $Q'(x) = 0$.

Funkcija $Q(x)$ įgyja didžiausią reikšmę taške $x = 13{,}6$. Vadinasi, teksto užimamas plotas bus didžiausias, kai knygos puslapio plotis bus 13,6 cm. Rasime puslapio ilgį $y = 231{,}2/13{,}6 = 17$ cm. Vadinasi, kad puslapyje teksto užimamas plotas būtų didžiausias, puslapio matmenų santykis turi būti $x/y = 4/5$ arba $y/x = 5/4$.

Pastaba. Galima įrodyti, kad $x/y = b/a$.

Pastabos. i) „Kadangi knygos plotis x, tai ilgį pažymėkime y". (Fantastiškas priežastingumo ryšys!) Na, bet svarbiausia — mes visi žinome, kas yra knygos plotis. Bet kas yra ilgis? Na, matyt, tai knygos aukštis. Ir dar — jų sukeisti vietomis negalima, nes knyga būtų visai kitokios formos.

ii) Sprendžiant iš tolesnio teksto, 2 punkto duomenys turi būti $a = 1{,}5$ ir $b = 1{,}2$ (o ne $a = 13{,}6$ ir $b = 17$ — ir šiaip jau 17 cm paraštė būtų didoka, ar ne?).

iii) Kadangi sąlygoje yra visiems trims punktams bendra dalis, tai 3 punktas turi būti sprendžiamas bendru atveju, su a ir b, o ne su 2 punkto duomenimis. Autoriai tai irgi jaučia — kitaip kam rašytų pastabą. Beje, pati pastaba suformuluota visiškai nesuprantamai: juk jeigu x ir y yra kintamieji, tai nieko ir įrodyti negalima. Iš tikrųjų ji turėtų būti tokia: bendru atveju puslapyje teksto užimamas plotas yra didžiausias, kai puslapio pločio ir aukščio santykis lygus b/a (faktiškai tai teisingas 3) punkto atsakymas).

Išspręsti 3 punktą nesunku tiek su išvestinėmis, tiek ir išskyrus pilnąjį kvadratą:

$$Q(x) = S + 4ab - 2(bS/x + ax) = S + 4ab - 2(\sqrt{bS/x} - \sqrt{ax})^2 - 4\sqrt{abS}.$$

Aišku, kad $Q(x)$ didžiausią reikšmę įgyja, kai $\sqrt{bS/x} = \sqrt{ax}$, t. y. kai knygos plotis $x = \sqrt{bS/a}$. Tada knygos aukštis y lygus $S : x = S : \sqrt{bS/a} = \sqrt{Sa/b}$, o pločio ir aukščio santykis lygus $x/y = \sqrt{bS/a} : \sqrt{Sa/b} = b/a$ (bet ne a/b).

iv) Žinoma, visur reikėtų kalbėti apie puslapio matmenis (o ne apie knygos!)

v) Ir vėl beviltiškai sugadinta neblogo uždavinio sąlyga. Juk jeigu puslapio plotas *yra* S, tai yra ir paraštės, knygos plotis ir aukštis. Va kitas dalykas, jeigu *reikia sumaketuoti* puslapį, kurio plotas būtų S, paraštės a ir b, o teksto užimamas plotas būtų didžiausias.

vi) Sprendime parašyta frazė „$x/y = 4/5$ arba $y/x = 5/4$" yra tikras nesusipratimas: juk galima prirašyti dar daugiau ekvivalenčių nelygybių, pavyzdžiui, $x = 4y/5$ ar $y = 5x/4$. Esmė čia visai kita — matmenys griežtai nusakyti: plotis yra tas matmuo, kurio paraštės yra b, o kitas matmuo (ar vadintume jį ilgiu (?), ar aukščiu, ar antruoju matmeniu) — tas, kurio paraštės yra a. Todėl teisingas atsakymas toks: pločio ir aukščio santykis turi būti $b : a$ (4 : 5 konkrečiu pataisytų 2 punkto reikšmių $a = 1{,}5$ ir $b = 1{,}2$ atveju).

VI bilietas, 15 uždavinys

Duota lygtis $x + 2/(m - 10) + 1/(5x) = 0{,}8/((10 - m)x)$.

1. Parodykite, kad šios lygties diskriminantas $D = -20(m - 6)(m - 10)$.
2. Raskite m reikšmes, su kuriomis lygtis turi:

a) realias šaknis;

b) ne daugiau kaip vieną realią šaknį;

c) realias vienodų ženklų šaknis;

d) realias skirtingų ženklų šaknis.

3. Su kuriomis m reikšmėmis lygtis neturi realių šaknų?

Atsakymas. 2) a) [6; 10); b) 6; c) tokių m reikšmių nėra; d) (6; 10); 3) $(-\infty; 6) \cup (10; \infty)$.

Sprendimas. 1) Pertvarkę lygtį, gauname $5(10-m)x^2-(m-6)=0$. Randame šios lygties diskriminantą $D=4\cdot 5(10-m)(m-6)=-20(m-10)(m-6)$.

2) a) Lygtis turi visas realias šaknis, kai $D\geqslant 0$, todėl sprendžiame nelygybę $-20(m-10)(m-6)\geqslant 0$, $20(m-10)(m-6)\geqslant 0$, iš čia $[6;\,10)$, nes $m\neq 10$.

b) Lygtis turi vieną realią šaknį, kai $D=0$ ir koeficientas prie x^2 lygus nuliui (šiuo atveju lygtis virsta tiesine, o tiesinė lygtis turi vieną šaknį). Kadangi šiuo atveju $m\neq 10$, tai lygtis turi vieną šaknį, kai $m=6$.

c) Lygtis $ax^2+bx+c=0$ turi vienodų ženklų šaknis, kai $D>0$ ir $x_1\cdot x_2>0$, kai x_1 ir x_2 yra lygties šaknys (pagal Vieto teoremą $x_1\cdot x_2=c$). Išsprendę nelygybių sistemą $\begin{cases}-20(m-10)(m-6>0,\\ -(m-6)<0,\end{cases}$ gauname, kad $m\in(6;\,10)$.

3) Lygtis neturi realiųjų šaknų, kai $D<0$. Vadinasi, $m\in(-\infty;\,6)\cup(10;\,\infty)$.

Pastabos. i) Duotoji lygtis neturi diskriminanto — jį turi tik kvadratinės (!) lygtys. Ši lygtis ne kvadratinė, o racionalioji. Ją pertvarkę, gauname lygtį $5(m-10)x^2+10x+m-6=0$. Kai $m=10$, pastaroji nėra ekvivalenti pradinei: naujoji lygtis turi šaknį $x=-0{,}4$, o pradinė — neturi. Kai $m\neq 10$, tai gautoji lygtis kvadratinė, o jos diskriminantas lygus $100-20(m-6)(m-10)=-20m^2+320m-1100$.

ii) Gražu pažiūrėti, kaip sprendžiama lygtis $5(10-m)x^2-(m-6)=0$. „Lygtis turi visas realias šaknis, kai $D\geqslant 0$“. Lietuviškai apie vieną ar dvi šaknis nesakoma — visas. Ir pagrindinis klausimas — o kam čia tas diskriminantas?

iii) Malonu sužinoti, kad lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknys tenkina lygybę $x_1x_2=c$ (bent jau abiturientai neabejoja, kad taip būna tik tada, kai $a=1$).

iv) Punkte b) prašoma gana keisto dalyko — rasti m reikšmes, su kuriomis lygtis turi ne daugiau kaip vieną šaknį. Vadinasi, reikia rasti m reikšmes, su kuriomis lygtis šaknų neturi, ir reikšmes, su kuriomis turi vieną šaknį. Sprendžiant nagrinėjamas tik vienos šaknies atvejis.

v) Baikime spręsti uždavinį. Jau sakėme, kad pradinė lygtis neturi šaknų, kai $m=10$. Kvadratinė lygtis turi šaknį $x=0$, kai $m=6$, ir pradinei lygčiai tada tinka tik kita jos šaknis $x=1/2$. Kadangi kvadratinės lygties diskriminantas yra $D=-20m^2+320m-1100=-20(m-11)(m-5)$, tai tiek kvadratinė, tiek pradinė lygtis turi vieną šaknį, kai $m=5$ ir $m=11$.

Kvadratinė (taigi ir pradinė) lygtis neturi šaknų, kai $D<0$, t. y. kai $m<5$ ir $m>11$. Pradinė lygtis turi dvi šaknis, kai $D>0$ ir $m\neq 6$, t. y. kai $5<m<6$ ir $6<m<11$. Be to, tos šaknys bus vieno ženklo, kai $(m-6)/(m-10)>0$, t. y. kai $m<6$ ir $m>10$, ir skirtingų ženklų, kai $6<m<10$. Vadinasi, uždavinio atsakymas turi būti toks:

Atsakymas. 1. Punkto užduotis nekorektiška, nes diskriminantas apibrėžiamas tik kvadratinei lygčiai. Lygtį pertvarkius, ji kvadratinė tik kai $m\neq 10$, o tada jos diskriminantas lygus $-20(m-11)(m-5)$.

2. a) Lygtis turi šaknų, kai $m\in[5,\,11]$.

b) Lygtis turi ne daugiau kaip vieną šaknį, kai $m\in(-\infty,\,5]\cup\{6;\,10\}\cup[11,\,\infty)$.

c) Lygtis turi dvi vienodų ženklų šaknis, kai $m\in(5,\,6)\cup(10,\,11)$.

d) Lygtis turi dvi skirtingų ženklų šaknis, kai $m\in(6,\,10)$.

VI bilietas, 17 klausimas

Žinoma, kad $a+b+c<0$ ir kad lygtis $ax^2+bx+c=0$ neturi realiųjų šaknų. Nustatykite koeficiento c ženklą.

Atsakymas. $c<0$.

Sprendimas. Kadangi kvadratinis trinaris $f(x)=ax^2+bx+c$ neturi realiųjų šaknų, tai jis su visomis x reikšmėmis turi tą patį ženklą. Kadangi, $f(1)=a+b+c<0$, tai $f(0)=c<0$.

Pastabos. i) Vėl daroma klaida, kad ax^2+bx+c yra kvadratinis trinaris — tai ne visada taip. Reikia skirti du atvejus (išnagrinėtas tik atvejis $a\neq 0$).

Kai $a=0$, turime lygtį $bx+c=0$. Jeigu $b\neq 0$, tai lygtis turi šaknį $x=-c/b$. Vadinasi, ir $b=0$. Bet $a+b+c<0$, todėl $0+0+c<0$, t. y. $c<0$.

ii) Jei jau sąlygoje kalbama apie lygties koeficientus, tai formuluotėje nuo lygties reikia ir pradėti.

VII bilietas, 5 klausimas

Ar ekvivalenčios nelygybės $(x+5)/(x-8) \leqslant 0$ ir $(x+5)(x-8) \leqslant 0$?

Atsakymas. Ne.

Sprendimas. Jei nelygybių sprendiniai sutampa, tai tokias nelygybes vadiname ekvivalenčiomis. Pirmosios nelygybės sprendiniai yra $[-5; 8)$, o antrosios sprendiniai yra $[-5; 8]$. Pirmoji nelygybė neturi prasmės, kai $x = 8$. Matome, kad nelygybių sprendinių aibės nesutampa, todėl nelygybės nėra ekvivalenčios.

Pastabos. i) Visiškai nesvarbu, kad viena nelygybė neturi prasmės, o kita turi prasmę, kai $x = 8$: svarbu tik, ar $x = 8$ yra antrosios nelygybės sprendinys.

ii) Spręsti nelygybes visai nebūtina: užtenka pastebėti, kad $x = 8$ tenkina antrą nelygybę, bet netenkina pirmosios.

iii) Ekvivalenčių nelygybių apibrėžimas kažkodėl „išvirkščias“.

VII bilietas, 15 klausimas

1. Raskite a reikšmes, su kuriomis lygčių sistema $\begin{cases} ax - y = 3, \\ (a+1)x^2 - (a-2)x - y = 2 \end{cases}$ turi tik vieną sprendinį.
2. Raskite šį sprendinį.

Atsakymas. 1) 0; 3; 2) kai $a = 0$, tai $(-1; -3)$; kai $a = 3$, tai $(0{,}5; -1{,}5)$.

Sprendimas. 1) $\begin{cases} y = ax - 3, \\ (a+1)x^2 - x(a-2) - ax + 3 = 2 \end{cases}$. $(a+1)x^2 - x(2a-2) + 1 = 0$.

Lygčių sistema turi vieną sprendinį, kai diskriminantas lygus nuliui $D = (2a-2)^2 - 4(a+1) = 4a^2 - 12a$.
$4a^2 - 12a = 0$, $4a(a-3) = 0$, $a = 0$ arba $a = 3$.

2) Kai $a = 0$, tai $y = -3$, o $x^2 + 2x + 1 = 0$, $(x+1)^2 = 0$, $x = -1$.

Kai $a = 3$, tai $\begin{cases} y = 3x - 3, \\ 4x^2 - 4x + 1 = 0. \end{cases}$ Išsprendę šią sistemą, gauname $x = 1/2$ ir $y = -3/2$.

Pastaba. Neteisybė, kad lygtis $(a+1)x^2 - x(2a \cdot 2) + 1 = 0$ turi vieną sprendinį tik tada, kai $4a^2 - 12a = 0$. Ji taip pat turi vienintelį sprendinį ir tada, kai $a = -1$. Tada gauname $4x + 1 = 0$, $x = -0{,}25$, $y = -2{,}75$. Šis sprendinys praleistas ir atsakyme.

VIII bilietas, 7 klausimas

Nespręsdami kvadratinės lygties $3x^2 - x - 1 = 0$ sudarykite tokią lygtį, kurios šaknys yra atvirkštinės duotosios lygties šaknims.

Atsakymas. $x^2 + x - 3 = 0$.

Sprendimas. Kvadratinei lygčiai $ax^2 + bx + c = 0$ pritaikome Vietos teoremą: $x_1 \cdot x_2 = c/a$ ir $x_1 + x_2 = -b/a$.
Duotosios lygties $3x^2 - x - 1 = 0$ šaknų $x_1 \cdot x_2 = -1/3$ ir $x_1 + x_2 = 1/3$. Kadangi pagal sąlygą reikia rasti šaknis, kurios būtų atvirkštinės duotosioms lygties šaknims, tai pažymime naujosios lygties šaknis $1/x_1'$ ir $1/x_2'$. Įstatome į Vietos teoremą $1/x_1' \cdot 1/x_2' = -1/3$ ir $1/x_1' + 1/x_2' = 1/3$. Gauname, kad $x_1' \cdot x_2' = -3$ ir $(x_1' + x_2')/(x_1'x_2') = 1/3$, t. y. $x_1' + x_2' = 1/3 \cdot x_1'x_2'$, $x_1' + x_2' = -1$. Vadinasi, naujoji lygtis yra $x^2 + x - 3 = 0$.

Pastabos. i) Ir vėl prastai taikoma Vijeto (knygelėje tai Vietos, tai Vieto) teorema: reikėtų patikrinti, ar lygtis iš viso turi šaknų. Pavyzdžiui, lygtį $3x^2 - x + 1 = 0$ spręsdami taip pat, gautume $x_1 + x_2 = 1/3$, $x_1x_2 = 1/3$. Tada $1/x_1 + 1/x_2 = (x_1 + x_2)/(x_1x_2) = (1/3)/(1/3) = 1$, $1/x_1 \cdot 1/x_2 = 3$, ir gautume lygtį $x^2 - x + 3 = 0$. Deja, ji šaknų neturi.

ii) Keista, kad naujosios lygties šaknys žymimos $1/x_1'$ ir $1/x_2'$. Jei jau pirmos lygties šaknys pažymėtos x_1 ir x_2, tai antrosios turi būti $1/x_1$ ir $1/x_2$.

iii) Sprendime rašoma: „ ... pagal sąlygą reikia rasti šaknis, kurios būtų atvirkštinės duotosioms lygties šaknims“. Viskas čia atvirkščiai: pirma, pradinės lygties šaknys nėra duotos; antra, sąlygoje kaip tik prašoma jų neieškoti; ir trečia, sąlyga visiškai neprašo rasti ieškomos lygties šaknų.

VIII bilietas, 9 klausimas

Raskite funkcijos $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ kritinius taškus.

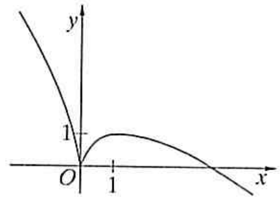
Atsakymas. 1.

Sprendimas. Kritiniai taškai — tai tie taškai, kuriuose $f'(x) = 0$. Kadangi $f'(x) = 1/\sqrt{x} - 1$, tai $(1 - \sqrt{x})/\sqrt{x} = 0$; iš čia $1 - \sqrt{x} = 0$, $x = 1$. Reiškinio apibrėžimo sritis — $(0; \infty)$.

Pastabos. i) Neteisingai nustatyta funkcijos apibrėžimo sritis — akivaizdu, kad tai $[0;\infty)$. Būtent nuo jos reikia pradėti.

ii) Neteisingas kritinių taškų apibrėžimas: kritiniais taškais vadinami *vidiniai apibrėžimo srities* taškai, kuriuose išvestinė lygi 0 arba neegzistuoja.

iii) Kad būtų aiškiau, išnagrinėkime pavyzdį: raskime funkcijos $2\sqrt{|x|}-x$ kritinius taškus (neneigiamiems x ji sutampa su ankstesne). Funkcija apibrėžta intervale $(-\infty,\infty)$. Funkcijos $f(x)=2\sqrt{|x|}-x$ išvestinė



$f'(x)=\begin{cases}1/\sqrt{x}-1, & \text{kai } x>0,\\ -1/\sqrt{-x}-1, & \text{kai } x<0,\end{cases}$ t. y. $f'(x)=\sqrt{|x|}/x-1$, kai $x\neq 0$, ir neegzistuoja, kai $x=0$.

Vadinasi, kritiniai taškai $x=1$ ir $x=0$ (sprendžiant pagal kygelėje siūlomą „metodiką“ antrasis taškas būtų prarastas). Tai gerai matyti ir iš grafiko (kritiniai taškai — tai visi vizualiai „įtartini“ taškai: iškilumų viršūnės, įdubų žemiausi taškai, grafiko „kampai“; beje, kartais ir ne tik jie — prisiminkite grafiko $y=x^3$ tašką $(0;0)$).

VIII bilietas, 10 klausimas

Raskite funkcijos $y=(x^2-3x+1)/(x^2+1)$ reikšmių sritį.

Atsakymas. $[-0{,}5; 2{,}5]$.

Sprendimas. Kadangi $x^2+1\neq 0$, tai abi lygybės puses padauginame iš x^2+1 ir gauname: $yx^2+y=x^2-3x+1$, t. y. $x^2(y-1)+3x+y-1=0$.

Gautoji lygtis turi sprendinius, kai $D\geqslant 0$. $D=9-4(y-1)^2$. Sprendžiame nelygybę $9-4(y-1)^2\geqslant 0$, t. y. $(y-1)^2\leqslant 9/4$. Iš čia $-3/2\leqslant y-1\leqslant 3/2$; $-1/2\leqslant y\leqslant 5/2$.

Pastabos. i) Sprendžiant reikia skirti du atvejus: $y=1$ ir $y\neq 1$; antru atveju lygtis tiesinė, ir diskriminantas tiesiog neegzistuoja.

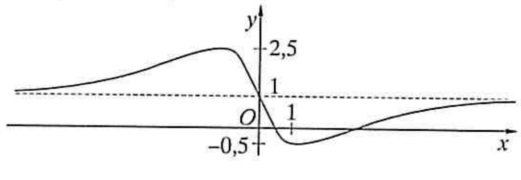
ii) Sprendimo logika nesuvokiama, o ją mokiniui reikia kruopščiai paaiškinti.

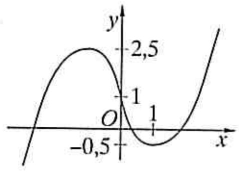
Rasti funkcijos $y=(x^2-3x+1)/(x^2+1)$ reikšmių sritį reiškia: nustatyti visas y reikšmes, su kuriomis yra tokių x reikšmių, kad parašytoji lygybė teisinga. O tai yra tas pats, kas nustatyti, su kuriomis y reikšmėmis pradinė lygtis x atžvilgiu turi sprendinių. Dabar vėl tenka skirti atvejus $y=1$ ir $y\neq 1$.

iii) Sprendimo logikos prasme paprasčiau taikyti išvestines, bet atsiranda sunkumų, susijusių su tuo, kad funkcija apibrėžta visoje skaičių tiesėje (o ne baigtiniame intervale).

$y=1-3x/(x^2+1)$, $y'=\frac{-3(x^2+1)+3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{3(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

Kai $x=-1$, turime maksimumą $5/2$, kai $x=1$ — minimumą $-1/2$ (žr. kairįjį brėžinį). Tai apskritai kalbant dar nereiškia, kad mažiausia funkcijos reikšmė yra $-1/2$, o didžiausia lygi $5/2$ (žr. dešinįjį brėžinį).





Bet įrodyti, kad tos reikšmės ir yra mūsų atveju didžiausia ir mažiausia, nesunku:

$$1-3x/(x^2+1)\leqslant 5/2,\quad x/(x^2+1)\geqslant -1/2,\quad -2x\leqslant x^2+1,\quad (x+1)^2\geqslant 0;$$
$$1-3x/(x^2+1)\geqslant -1/2,\quad x/(x^2+1)\leqslant 1/2,\quad 2x\leqslant x^2+1,\quad (x-1)^2\geqslant 0.$$

Mūsų funkcija tolydi, todėl ji įgyja visas reikšmes iš intervalo $[-1/2, 5/2]$.

Galima apsieiti ir be išvestinių:

$y = 1 - 3\frac{x}{x^2+1} = 1 - \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+1} = 1 + \frac{3}{2}(1 - \frac{2x}{x^2+1} - 1) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

Iš čia matome, kad mažiausia y reikšmė yra $-1/2$ (nes antras dėmuo neneigiamas). Bet panašiai gauname $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$, ir didžiausia y reikšmė yra $5/2$ (nes antras dėmuo neteigiamas).

VIII bilietas, 12 klausimas

Su kuriomis a reikšmėmis skaičius 2 yra lygties $\sqrt{x-a} = 3a - x$ sprendinys?

Atsakymas. 1.

Sprendimas. Jei skaičius 2 yra lygties šaknis, tai turi būti teisinga lygybė $\sqrt{2-a} = 3a - 2$. Sprendžiame sistemą $\begin{cases} 2 - a = (3a-2)^2, \\ 3a - 2 \geqslant 0. \end{cases}$ $2 - a = 9a^2 - 12a + 4$; $9a^2 - 11a + 2 = 0$. Išsprendę šią lygtį, gauname, kad $a_1 = 1$ ir $a_2 = 2/9$. Kadangi $a \geqslant 2/3$, o lygties apibrėžimo sritis $a \leqslant 2$, tai $a_2 = 2/9$ nėra lygties šaknis. Vadinasi, skaičius 2 yra pradinės lygties šaknis, kai $a = 1$.

Pastabos. i) „Kadangi $a \geqslant 2/3$, o lygties apibrėžimo sritis $a \leqslant 2$, tai $a = 2/9$ nėra lygties šaknis“. Sprendime kalbama apie tris lygtis, ir visiškai neaišku, kada apie kurią.

ii) Neaišku, kas sprendžiama: sistema ar lygtis.

iii) Keista logika: $a = 2/9$ netinka, vadinasi, $a = 1$ tinka. O gal abi reikšmės netinka? Reikia tikrinti!

Iš tikrųjų, kai $a = 1$, gauname lygtį $\sqrt{x-1} = 3 - x$. Įstatę $x = 2$ matome, kad ši reikšmė yra lygties sprendinys.

VIII bilietas, 15 klausimas

Begalinės geometrinės progresijos antrasis narys lygus 6, o suma lygi 1/8 aritmetinės progresijos, sudarytos iš duotosios progresijos narių kvadratų, sumos. Raskite begalinės geometrinės progresijos:

1) vardiklį;

2) pirmąjį narį.

Pastabos. i) Sąlygoje vietoj „aritmetinės progresijos“ turi būti „geometrinė progresija“.

ii) Autoriai neskiria nykstamosios (= be galo mažėjančios) geometrinės progresijos nuo begalinės geometrinės progresijos. Abi progresijos $1, 2, 4, 8, \ldots$ ir $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ yra begalinės, bet tik antroji yra be galo mažėjanti.

VIII bilietas, 17 klausimas

1. Skrydžiui į Mėnulį reikia sukomplektuoti tokią kosminio laivo įgulą: laivo vadas, pirmasis jo padėjėjas, antrasis padėjėjas, du borto inžinieriai ir vienas gydytojas. Vadovaujantis trejetas gali būti parinktas iš 25 skrydžiui pasirengusių lakūnų, du borto inžinieriai — iš 20 specialistų, išmanančių laivo įrangą, ir 1 gydytojas — iš 8 drąsių medikų. Kiek galima sudaryti skirtingų įgulų?

2. Raskite kintamojo x reikšmę iš lygybės $C_{x+1}^2 / C_x^3 = 4/5$.

3. Išreikškite daugianariu $(\frac{1}{2}a - b)^5$.

Atsakymas. 1) 20976000; 2) 7; 3) $\frac{1}{32}a^2 - \frac{5}{16}a^4b + \frac{5}{4}a^3b^2 - \frac{5}{2}a^2b^3 + \frac{5}{2}ab^4 - b^5$.

Sprendimas. 1) Pasirenkant laivo vadą ir jo padėjėjus, svarbu ne tik vadovaujančio trejeto sudėtis, bet ir jo pasiskirstymas pareigomis. Vadovaujančių trejetų gali būti sudaryta A_{25}^3. Abiejų borto inžinierių pareigos vienodos, todėl eiliškumas čia neturi reikšmės, todėl šiuos žmones galima pasirinkti C_{20}^2 būdais. Gydytojas gali būti pasirinktas 8 būdais. Visą laivo įgulą galima sudaryti $A_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot 8 = 20976000$ skirtingų būdų.

2) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $C_{x+1}^2 = \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (x-1)\cdot x\cdot (x+1)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (x-1)} = \frac{x(x+1)}{2}$; $C_x^3 = \frac{x!}{3!(x-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (x-3)(x-2)(x-1)\cdot x}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (x-3)} =$ $= \frac{(x-2)(x-1)\cdot x}{6}$. $\frac{x(x+1)}{2} : \frac{(x-2)(x-1)x}{6} = \frac{4}{5}$; $\frac{3(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{4}{5}$.

Kadangi $x \neq 2$, $x \neq 1$, tai išsprendę lygtį $4x^2 - 27x - 7 = 0$, gauname, kad $x = 7; x = -1/4$ (netinka, nes $x \in N$).

3) $(\frac{1}{2}a - b)^5 = C_5^0(\frac{1}{2}a)^5b^0 - C_5^1(\frac{1}{2}a)^4b + C_5^2(\frac{1}{2}a)^3b^2 - C_5^3(\frac{1}{2}a)^2b^3 + C_5^4 \cdot \frac{1}{2}ab^4 - C_5^5(\frac{1}{2}a)^0b^5 =$ $= \frac{1}{32}a^5 - \frac{5}{16}a^4b + \frac{5}{4}a^3b^2 - \frac{5}{2}a^2b^3 + \frac{5}{2}ab^4 - b^5$.

Pastabos. i) Originalu: klausimas susideda iš 3 dalių — kosmonautų, derinių ir daugianarių.

ii) 2 punkto sąlyga — visiškas esmės nesupratimas. Na, įsivaizduokite uždavinį: „Raskite kintamojo x reikšmę iš lygybės $x - 1 = 0$.“

Bet jeigu x yra kintamasis, tai jis gali įgyti bet kurią reikšmę iš apibrėžimo srities.

Galima būtų uždavinį formuluoti taip:

„Raskite x reikšmę, su kuria lygybė $x - 1 = 0$ teisinga“.

Bet kam visa tai? Juk galima pasakyti paprasčiausiai: „Išspręskite lygtį $x - 1 = 0$.“ Ir visiems bus viskas aišku — ir tiems, kuriems x „kintamasis“, ir tiems, kuriems x „nežinomasis“.

Beje, panašiai nevykusiai formuluojama ir VI bilieto 12 klausimo sąlyga, kur prašoma iš lygties $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^8 \cdot \dots \cdot 3^{3n-1} = 27^5$ rasti natūralųjį skaičių n.

iii) Prasta ir 3 punkto sąlyga. Ką reiškia „išreikšti daugianariu“? Kas tas daugianaris? Dviejų kintamųjų daugianarių mokykloje niekas nežino. Todėl daugianaris čia — bet kuris nevienanaris, pavyzdžiui, $ab + (a/2 - b)^5 - ab$.

Ir vėl — yra įprastinių pasakymų: *atskliauskite* ar *pakelkite laipsniu*.

iv) Pats „kampas“, žinoma, 1 punkto sąlyga. Autorių literatūriniai egzersisai tiesiog pritrenkia. Ir ko tik nesužinome: kosmonautus reikia rinktis iš „skrydžiui pasirengusių lakūnų“, inžinierius — iš „išmanančių laivo įrangą“, o gydytojus — iš medikų, ir ne bet kokių, o drąsių. Bet juk puikiai žinome, kad medikai — tai dar nebūtinai gydytojai, o gydytojai — tai dar ne visi medikai.

v) Vėl trūksta logikos: „kadangi $x \neq 2, x \neq 1$,“ tai sprendžiame lygtį. Bet juk anksčiau vardiklyje buvo $x - 3$, o reikšmė $x = 3$ nekliuvo? Kur čia blogybė, parodysime pavyzdžiu, pagal pateiktą rekomendaciją spręsdami lygtį $C_x^3 = 1$:

$x!/(3!(x-3)!)) = 1, 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (x-3)) = 1, (x-2)(x-1)x/6 = 1, x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0, (x-3)(x^2+2) = 0.$

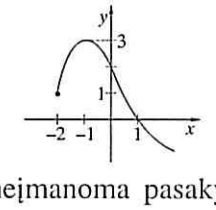
Ši lygtis turi vienintelę šaknį $x = 3$, bet ji netinka ankstesnei lygčiai, kurios vardiklyje yra $x - 3$. Vadinasi, lygtis sprendinių neturi.

Bet juk puikiai žinome lygties $C_x^3 = 1$ sprendinį — tai $x = 3$, nes $C_3^3 = 1$. Tad iš kur atsirado tos mūsų bėdos? Viena iš jų — faktorialo $(x-3)!$ skleidimas kaip $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (x-3)$. Jeigu $(3-3)!$ dar turi prasmę, tai $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 0$ — jokios. Kitaip sakant, formulė $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ teisinga tik kai $n = 1, 2, \dots$, bet neteisinga, kai $n = 0$ (tada $0! = 1$ pagal susitarimą, o ne pagal $n!$ kaip tam tikros sandaugos apibrėžimą).

Bėdų išvengsime, jei reikšmes $x = 2, x = 3, x = 1/4$ atmetinėsime ne spręsdami, o iš karto nustatysime lygties apibrėžimo sritį: simbolis C_x^3 turi prasmę tik kai $x \in N, x \geqslant 3$ (trumpiau: $x - 2 \in N$). Tada C_x^3, kaip derinių skaičius, yra natūralusis ir lygtis $C_{x+1}^2/C_x^3 = 4/5$ virsta (apibrėžimo srityje ekvivalenčia, nors tai nesvarbu) lygtimi $15(x+1)x = 4x(x-1)(x-2)$.

Suprastinę iš x (jau turime teisę: $x \geqslant 3$), gauname kvadratinę lygtį, kurios tik šaknis $x = 7$ priklauso apibrėžimo sričiai (ir tinka).

IX bilietas, 3 klausimas



Funkcijos grafikas pavaizduotas brėžinyje. Nustatykite šios funkcijos:

1) apibrėžimo sritį;

2) reikšmių sritį.

Atsakymas. 1) $[-2; \infty)$; $(-\infty; 3]$.

Pastabos. i) Pirmą kartą matau tokį uždavinį. Juk čia neįmanoma pasakyti, nei kokia yra apibrėžimo sritis, nei kokia reikšmių sritis. Jeigu autoriai „sukūrė“ šį uždavinį — baisu. Jeigu jie jį paėmė iš egzaminų variantų — dar baisiau.

ii) Šio bilieto 6 klausime prašoma rasti funkcijos $f(x) = x^{\sqrt{3}} - x^{-\sqrt{3}}$ išvestinę. Dar įdomiau būtų rasti funkcijos $f(x) = x^{\sqrt{\pi}} - x^{-\sqrt{\pi}}$ išvestinę, argi ne?

iii) Šio bilieto 9 klausimo sprendime išrastas „matematinis vidurkis“ (tokio dar neteko girdėti).

IX bilietas, 16 klausimas

Su kuriomis m reikšmėmis teisinga lygybė $\sin\alpha = (2m^2 - 5m + 8)/(m^2 + 4)$, kai $\alpha \in [0; \pi/2]$?

Atsakymas. $[1; 4]$.

Sprendimas. Randame funkcijos reikšmes intervalo galuose t. y. $\sin 0 = 0$ ir $\sin(\pi/2) = 1$. Kadangi $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$, tai $0 \leqslant (2m^2 - 5m + 8)/(m^2 + 4) \leqslant 1$.

Sprendžiame nelygybių sistemą

$$\begin{cases} (2m^2 - 5m + 8)/(m^2 + 4) \geqslant 0, \\ (2m^2 - 5m + 8)/(m^2 + 4) \leqslant 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} (2m^2 - 5m + 8)/(m^2 + 4) \geqslant 0, \\ (m^2 - 5m + 4)/(m^2 + 4) \leqslant 0. \end{cases}$$

Pirmosios nelygybės vardiklis $m^2 + 4 > 0$, kai $m \in R$ ir skaitiklis $2m^2 - 5m + 8 \geqslant 0$, kai $m \in R$, nes funkcijos $y = 2m^2 - 5m + 8$ grafikas nekerta x ašies ($D < 0$) ir ši funkcija įgyja tik teigiamas reikšmes.

Antrosios nelygybės vardiklis $m^2 + 4 > 0$, kai $m \in R$, todėl skaitiklis $m^2 - 5m + 4 \leqslant 0$, iš čia $m \in [1; 4]$.

Pastabos. i) Sąlyga nesuprantama: tarsi klausiama, ar yra tokių m reikšmių, kad su visomis α reikšmėmis teisinga lygybė $(2m^2 - 5m + 8)/(m^2 + 4) = \sin\alpha$. O štai sprendžiamas visai kitas uždavinys: „Kokios yra m reikšmės, kurioms galima rasti tokį α iš intervalo $[0; \pi/2]$, kad būtų teisinga minėta lygybė?“

ii) Svarbu ne funkcijos reikšmės intervalo galuose, o funkcijos reikšmių sritis. Kadangi $\sin\alpha$ intervale $[0; \pi/2]$ įgyja visas reikšmes nuo 0 iki 1, tai užtenka išspręsti nelygybę $0 \leqslant (2m^2 - 5m + 8)/(m^2 + 4) \leqslant 1$.

Palyginimui pagalvokite, kas pasikeistų, jei vietoj invervalo $[0, \pi/2]$ imtume invervalą $[0; 5\pi/6]$. Ir dar — kokią nelygybę reikėtų spręsti, jei vietoj $f(\alpha) = \sin\alpha$ stovėtų $f(\alpha) = 1/\sin\alpha$, o intervalas būtų $[-\pi/6, \pi/2]$. Nors $f(-\pi/6) = -2$, $f(\pi/2) = 1$, bet $f(\alpha)$ nurodytame intervale įgyja reikšmes ne iš intervalo $[-2, 1]$, o visas reikšmes iš intervalų $(-\infty, -2]$ ir $[1; \infty)$, taigi spręsti reikėtų nelygybes $(2m^2 - 5m + 8)/(m^2 + 4) \leqslant -2$ ir $(2m^2 - 5m + 8)/(m^2 + 4) \geqslant 1$.

iii) Pastaroji nelygybė sprendžiama prastai; pavyzdžiui, kalbama apie grafiką $y = 2m^2 - 5m + 8$, kuris nekerta x ašies (gal m ašies?). O spręsti ją paprasčiausia taip.

Kadangi $m^2 + 4 > 0$, tai $0 \leqslant 2m^2 - 5m + 8 \leqslant m^2 + 4$. Pirma nelygybė teisinga visada, nes diskriminantas neigiamas, o antroji ekvivalenti nelygybei $m^2 - 5m + 4 \leqslant 0$, kuri teisinga „tarp šaknų“, t. y. kai $1 \leqslant m \leqslant 4$.

IX bilietas, 18 klausimas

Atviras plaukimo baseinas yra stačiakampio gretasienio, kurio pagrindas yra kvadratas, formos. Baseino tūris $32\,\mathrm{m}^2$. Raskite baseino matmenis, jeigu žinoma, kad jo dugno ir sienų apdailai buvo sunaudota mažiausiai plytelių.

Pastabos. i) Mokinys tikrai nieko nesupras — sąlyga nebaigta: užmiršta pasakyti, kad tai toks baseinas, kuriam iš visų baseinų, turinčių kvadratinį pagrindą ir tūrį $32\,\mathrm{m}^3$, reikia mažiausiai plytelių.

ii) Kaip ir daugumos šios knygelės „realiojo turinio“ uždavinių, sąlyga — nesusipratimas: ar matėte kada atvirą plaukimo baseiną $4\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$?

iii) Brėžinio pagrindas visai nepanašus į kvadratą. To brėžinio sprendžiant galėtų ir nebūti, bet jei jau brėžinį darome...

X bilietas, 7 klausimas

Raskite funkcijos $y = 2\sin 4x$ periodą.

Atsakymas. $\pi/2$.

Sprendimas. $\sin 4(x + T) = \sin 4x$; $\cos 4T = 2\pi n$; $4T = 2\pi n$, $T = \pi n/2, n \in Z$. Funkcijos $y = 2\sin 4x$ mažiausias periodas $T = \pi/2$.

Pastabos. i) Efektingai atrodo lygybė $\cos 4T = 2\pi n$, o sprendimas iš viso neaiškus.

ii) Paprasčiausias sprendimas toks: kadangi $\sin x$ periodas yra 2π, tai $\sin 4x$ periodas yra $2\pi/4 = \pi/2$ (plg. Pastabas po IV bilieto 7 klausimu).

XI bilietas, 7 klausimas

Kokį ženklą turi skaičius $(\log_3 5 - \log_5 3)/(\log_{0,3} 4 - \log_{0,3} 3)$?

Atsakymas. Minuso ženklas.

Sprendimas. $(\log_3 5 - \log_5 3)/(\log_{0,3} 4 - \log_{0,3} 3) = (1/\log_5 3 - \log_5 3)/\log_{0,3}(4/3) =$
$= (1 - \log_5^2 3)/(\log_5 3 \cdot \log_{0,3}(4/3))$.

Kadangi $\log_5 1 = 0$ ir $\log_5 5 = 1$, tai $0 < \log_5 3 < 1$. Vadinasi, $1 - \log_5^2 3 > 0$.

Kadangi $\log_{0,3}(4/3) < 0$ (rėmėmės logaritmų savybe: jei $0 < a < 1$ ir $b > 1$, tai $\log_a b < 0$) ir $\log_5 3 > 0$ (rėmėmės logaritmų savybe: jei $a > 1$ ir $b > 1$, tai $\log_a b > 0$), tai $\log_5 3 \cdot \log_{0,3}(4/3) < 0$. Taigi trupmenos $(1 - \log_5^2 3)/(\log_5 3 \cdot \log_{0,3}(4/3))$ skaitiklis yra teigiamas skaičius, o vardiklis — neigiamas skaičius ir pati trupmena turi minuso ženklą.

Pastabos. Šitiek aiškinti, kai viskas ir taip aišku: $\log_3 5 > 1$, o $\log_5 3 < 1$, todėl skaitiklis teigiamas. Kadangi $\log_{0,3} 4 < \log_{0,3} 3$, tai vardiklis neigiamas. *Atsakymas.* Minuso ženklą.

XI bilietas, 11 klausimas

Įrodykite, kad funkcija $f(x) = \sin(1/x)$ nėra periodinė.

Įrodymas. Pagal periodinės funkcijos apibrėžimą, funkcija $y = f(x)$ yra periodinė, jei tenkinamos dvi sąlygos:

1) egzistuoja toks skaičius $T > 0$ (šis skaičius vadinamas funkcijos periodu), kad su kiekviena x reikšme iš šios funkcijos apibrėžimo srities reikšmės $x + T$ ir $x - T$ irgi priklauso apibrėžimo sričiai;

2) su kiekviena x reikšme iš funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo srities galioja lygybė $f(x + T) = f(x)$.

Vadinasi, jei funkcija $y = \sin(1/x)$ nėra periodinė, tai bent viena iš minėtų sąlygų jai turi negalioti.

Duotosios funkcijos apibrėžimo sritis yra visi realieji skaičiai, išskyrus $x = 0$, t. y. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Tarkime, kad T — bet koks teigiamas skaičius. Kadangi $-T \neq 0$, tai taškas $x_\circ = -T$ priklauso funkcijos apibrėžimo sričiai. Bet taškas $x_\circ + T = (-T) + T = 0$ nepriklauso apibrėžimo sričiai. Taigi, koks bebūtų skaičius $T > 0$, egzistuoja toks taškas $x = x_\circ$ (iš funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srities), kad taškas $x + T$ nepriklauso apibrėžimo sričiai. Matome, kad netenkinama periodinės funkcijos apibrėžimo pirmoji sąlyga. Vadinasi, funkcija $y = \sin(1/x)$ nėra periodinė.

Pastabos. i) Visiškai netinkamas, grynai formalus uždavinys.

ii) Daug priaiškinta, o esmė paprasta: jeigu periodinė funkcija neapibrėžta viename taške x_0, tai ji neapibrėžta taškuose $x_0 + T, x_0 + 2T, \ldots$, o tokių taškų yra be galo daug. Mūsų funkcija neapibrėžta tik viename taške, vadinasi, ji neperiodinė.

iii) Sprendžiant periodiškumas tiriamas formaliai. Įsivaizduokime, kad turime funkciją $f(x) = \sin x, x \neq 0$. Ji neperiodinė, nes neapibrėžta viename taške. Bet mokiniui (ir inžinieriui) visiškai aišku, kad ji, pavyzdžiui, „periodinė į dešinę“ t. y. $f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \cdots$, kai $x > 0$ ir $T > 0$.

iv) Imkime funkciją $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Įrodykime, kad ji nėra periodinė (dabar formalių priežasčių skelbti ją neperiodine nebėra). Tarkime, kad ji periodinė. Pažymėkime jos periodą $T > 0$. Tada $\sin(1/x) = \sin(1/(x + T))$ su visais x. Vadinasi, kai $x = 1/\pi$, tai teisinga lygybė $\sin \pi = \sin(1/(T + 1/\pi))$, $\sin(1/(T + 1/\pi)) = 0$, $1/(T + 1/\pi) = k\pi (k = 1, 2, \ldots)$, $T = 1/(k\pi) - 1/\pi \leqslant 0$. Prieštara.

Sprendimą galima nusakyti ir žodžiais. Mūsų funkcija virsta nuliu, pavyzdžiui, taške $1/\pi$. Jeigu ji būtų periodinė, ji virstų nuliu kaip norime toli į dešinę. Bet kai $x > 1/\pi$, tai $0 < 1/x < \pi$, o intervale $(0, \pi)$ sinusas nuliu nevirsta.

XI bilietas, 20 uždavinys

Kas daugiau $\log_3 4$ ar $\log_4 5$? Atsakymą pagrįskite.

Atsakymas. $\log_3 4 > \log_4 5$.

Sprendimas. Pažymėkime: $\log_3 4 = x$ ir $\log_4 5 = y$. Tada, remdamiesi logaritmo apibrėžimu, gauname lygybes $3^x = 4$ ir $4^y = 5$, $x > 1$, $y > 1$. Šias lygybes padaliję vieną iš kitos, gauname $3^x/4^y = 4/5$. Šią lygybę pertvarkome: $3/4^y \cdot 3/4 = 4/5$, arba $3^{x-1}/4^{y-1} = 16/15$. Kadangi $16/15 > 1$, tai $3^{x-1}/4^{y-1} > 1$, arba $3^{x-1} > 4^{y-1}$. Bet $x - 1 > 0$ ir $y - 1 > 0$, todėl $x - 1 > y - 1$ arba $x > y$, t. y. $\log_3 4 > \log_4 5$.

Pastabos. i) Uždavinys išspręstas, o ko išmoko mokinys? Nieko. Jis kito panašaus uždavinio neišspręs.

ii) Natūralus sprendimas remiasi labai paprasta mintimi. Abu logaritmai yra tarp 1 ir 2, skiriasi „mažai". Bet tą skirtumą dauginant iš „vis didesnio" skaičiaus n, jis pasidarytų didesnis už 1 (beje, šis paprastas teiginys matematikoje vadinamas Archimedo aksioma), $|n\log_3 4 - n\log_4 5| > 1$. Savo ruožtu tai reikštų, kad tarp skaičių $n\log_3 4$ ir $n\log_4 5$ yra sveikasis skaičius. Sprendžiame:

$\log_3 4$ ir $\log_4 5$ yra tarp 1 ir 2;

$2\log_3 4 = \log_3 16$ ir $2\log_4 5 = \log_4 25$ abu yra tarp 2 ir 3;

$\log_3 4^3 = \log_3 64$ ir $\log_4 5^3 = \log_4 125$ yra tarp 3 ir 4;

$\log_3 4^4 = \log_3 256$ ir $\log_4 5^4 = \log_4 625$ yra tarp 4 ir 5.

Bet štai $\log_3 4^5 = \log_3 1024$ yra tarp 6 ir 7 (nes $3^6 = 729, 3^7 = 2187$), o $\log_4 5^5 = \log_4 3125$ yra tarp 5 ir 6 (nes $4^5 = 1024, 4^6 = 4096$). Įrodėme, kad $\log_3 4^5 > 6 > \log_4 5^5$, $5\log_3 4 > 5\log_4 5$, $\log_3 4 > \log_4 5$.

Panašias pastabas galima tęsti be galo, ir ne tik apie šią knygelę. Bet ką parekomenduoti abiturientui, kad jis bent jau nebūtų klaidinamas?

Visų pirma reikia pasitikrinti, ar knygą rekomenduoja Švietimo ir mokslo ministerija (tai nurodoma knygos 2 psl.). Antra, verta pasidomėti, ar leidykla turi matematikos knygų leidybos patirties (pavyzdžiui, aš vargu ar pirksiu matematikos knygą, jeigu ją išleis „Vagos" leidykla). Ir, pagaliau, niekad nereikia pirkti knygų, kurių autoriais sykį nusivylėte — dažnam iš jų matematikos mokytis jau per vėlu.

Baigiantis darbo dienai kolega Juozas Mačys atnešė man uždavinuko sąlygą ir sako:

— Parvežė sūnus iš Anglijos. Pabandyk išspręsti. Panašius uždavinius dažniausiai pavyksta išspręsti mintinai, bet šitą — nežinau.

Pažvelgęs į sąlygą pagalvojau, kad nieko čia sudėtingo. Deja, nei vakare po darbo, nei kitą rytą ne tik kad trumpo sprendimo nesugalvojau, bet ir iš viso atsakymo negavau...

Manau, kad neverta man daugiau kankintis, o geriau paprašyti Jūsų pagalbos.

Sąlyga tokia:

„Iš stovyklos vienu metu priešingomis kryptimis išvažiavo du dviratininkai, ir vieno iš jų greitis buvo 1 mylia per valandą didesnis. Po valandos iš stovyklos išvažiavo trečias dviratininkas 10 mylių per valandą greičiu. Iš pradžių jis pasivijo lėtesnį dviratininką, po to apsisuko ir pradėjo vytis greitesnįjį, o pavijęs jį apsisuko ir grįžo į stovyklą. Visa trečio dviratininko kelionė truko 5 valandas. Kiek laiko būtų sugaišęs trečias dviratininkas, jei iš pradžių jis būtų vijęsis greitesnįjį dviratininką?

Iš anksto dėkoju
Valdas Vanagas