$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 2, 15–18

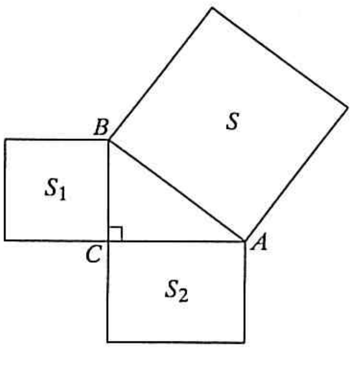
Pitagoro dienų atgarsiai

Edmundas Mazėtis
edmundas@vpu.lt

Pitagoro teoremą galima formuluoti kaip teiginį apie kvadratų, nubrėžtų ant stačiojo trikampio kraštinių, plotus. Straipsnyje nagrinėjami pavyzdžiai, kuriuose kvadratai pakeisti kitokiomis figūromis, tačiau teiginys apie jų plotus lieka teisingas.

Mūsų autorius yra Vilniaus pedagoginio universiteto docentas. Jo mokslinio darbo sritis — geometrija.

Prieš kurį laiką Vilniaus pedagoginio universiteto studentai matematikai organizavo renginį, pavadintą Pitagoro diena. Tą dieną Matematikos fakulteto studentai ir dėstytojai, pasidabinę senovės graikų drabužiais — tunikomis, susipažino su Pitagoro epocha, aptarė Pitagoro ir jo mokyklos vaidmenį matematikos istorijoje, išnagrinėjo ne vieną Pitagoro teoremos įrodymą, pabandė ją apibendrinti.



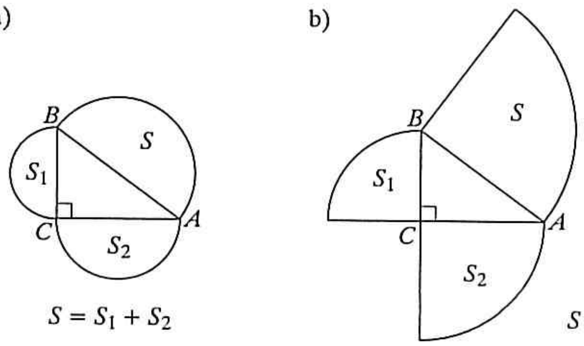
$S = S_1 + S_2$

1 pav.

Pitagoro teoremos formuluotė visiems gerai žinoma. Kvadrato, kurio kraštinė lygi stačiojo trikampio įžambinei, plotas lygus kvadratų, kurių kraštinės lygios to trikampio statiniams, plotų sumai (1 pav.). Natūraliai kyla klausimas, ar negalima šioje formuluotėje kvadratų pakeisti kitomis geometrinėmis figūromis. Pasirodo, kad lygybė $S = S_1 + S_2$ yra teisinga ne tik kvadratams.

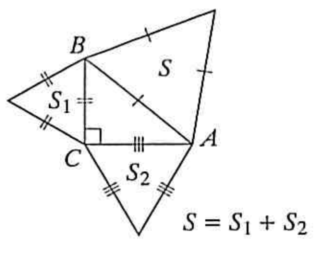
1 pavyzdys. Įrodykite, kad skritulio, kurio skersmuo (arba spindulys) lygus stačiojo trikampio įžambinei, plotas lygus skritulių, kurių skersmenys (arba spinduliai) lygūs to trikampio statiniams, plotų sumai (2 pav. a) ir b)).

a) b)

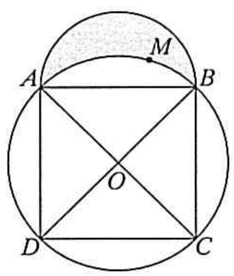


$S = S_1 + S_2$ $S = S_1 + S_2$

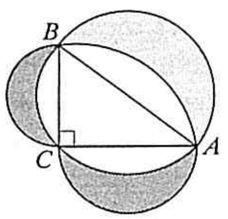
2 pav.



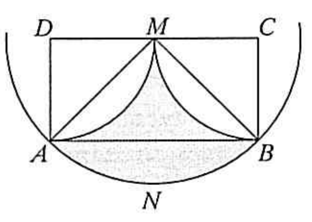
3 pav.



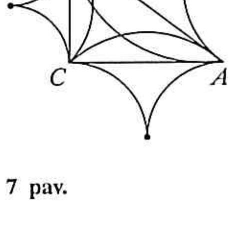
4 pav.



5 pav.



6 pav.



7 pav.

2 pavyzdys. Lygiakraščio trikampio (arba bet kokio taisyklingojo n-kampio), kurio kraštinė lygi stačiojo trikampio įžambinei, plotas lygus lygiakraščių trikampių (taisyklingųjų n-kampių), kurių kraštinės yra to trikampio statiniai, plotų sumai (3 pav.). Įrodykite tai.

3 pavyzdys. Sakykime, kad atkarpa AB yra pusskritulio skersmuo. Nubraižykime kvadratą $ABCD$, esantį kitoje tiesės AB pusėje negu pusskritulis, ir apie jį apibrėžkime skritulį. Pusskritulio dalį, nesančią skritulyje, pavadinkime mėnuliu, nubrėžtu ant atkarpos AB (4 pav.).

Raskime plotą mėnulio, nubrėžto ant atkarpos AB, kurios ilgis lygus a. Pusskritulio, kurio skersmens ilgis lygus a, plotas $S_1 = \frac{\pi a^2}{8}$. Skritulio, kurio spindulys $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, nuopjovos AMB plotas S_2 lygus išpjovos AOB ir trikampio AOB plotų skirtumui:

$$S_{\text{išpj.}AOB} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}, \qquad S_{\triangle AOB} = \frac{a^2}{4},$$

$$S_2 = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}.$$

Tuomet mėnulio plotas $S = S_1 - S_2 = \frac{a^2}{4}$. Taigi nubrėžto ant atkarpos AB mėnulio plotas lygus trikampio AOB plotui.

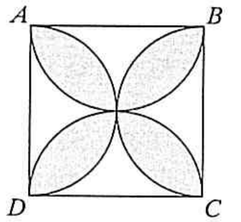
Iš įrodymo išplaukia, kad mėnulio, nubrėžto ant stačiojo trikampio įžambinės, plotas lygus mėnulių, nubrėžtų ant šio trikampio statinių plotų sumai (5 pav.).

4 pavyzdys. Nubraižykime stačiakampį $ABCD$, kurio kraštinė AB yra du kartus ilgesnė už kraštinę AD. Iš kraštinės CD vidurio taško M, kaip iš centro, nubrėžkime spindulio MA pusskritulį, taip pat nubrėžkime skritulius, kurių centrai yra taškai C ir D, o spindulių ilgiai lygūs stačiakampio kraštinei AD. Nubrėžtojo pusskritulio dalį, nesančią minėtuose skrituliuose, pavadinkime kreiviniu trikampiu, nubrėžtu ant atkarpos AB (6 pav.).

Apskaičiuokime kreivinio trikampio plotą, jei atkarpos AB ilgis lygus a. Kadangi $\angle AMB = 90°$, tai išpjovos MAB plotas lygus $\frac{\pi}{4} \cdot MA^2 = \frac{\pi a^2}{8}$. Tuomet nuopjovos ANB plotas lygus išpjovos MAB ir trikampio AMB plotų skirtumui, t. y. $\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}$. Ieškomąjį kreivinio trikampio plotą S gauname iš stačiakampio $ABCD$ ploto $\frac{a^2}{2}$ atėmę pusskritulio, kurio spindulys $\frac{a}{2}$, plotą $\frac{\pi a^2}{8}$ ir pridėję nuopjovos ANB plotą. Vadinasi,

$$S = \frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8} + \left(\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4}.$$

Gavome, kad šio kreivinio trikampio plotas lygus pusei stačiakampio $ABCD$ ploto. Iš čia išplaukia, kad kreivinio trikampio, nubrėžto ant stačiojo trikampio įžambinės, plotas lygus kreivinių trikampių, nubrėžtų ant šio trikampio statinių plotų sumai (7 pav.).



8 pav.

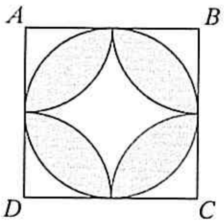
5 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ viduje nubraižykime keturis pusskritulius, kurių skersmenys yra to kvadrato kraštinės. Figūra, kurią sudaro kiekvienos poros besikertančių pusskritulių bendrosios dalys, vadinama *rozete* (8 pav.).

Įrodysime, kad apibrėžto apie kvadratą $ABCD$ skritulio dalies, gautos pašalinus iš jo rozetę, plotas lygus kvadrato plotui. Kiekviena rozetės dalis yra sudaryta iš dviejų lygių skritulio nuopjovų. Jei kvadrato kraštinės ilgis lygus a, tai kiekvienos nuopjovos plotas

$$S_1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} = \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8}.$$

Tuomet rozetės plotas lygus $8S_1 = \frac{\pi a^2}{2} - a^2$. Taigi apie kvadratą apibrėžto skritulio dalies, gautos pašalinus iš jo rozetę, plotas

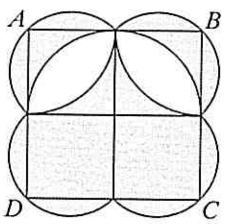
$$S = \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi a^2}{2} - a^2\right) = a^2.$$



9 pav.

6 pavyzdys. Panagrinėkime kitokią rozetę. Į kvadratą $ABCD$ įbrėžkime skritulį ir nubraižykime keturis skritulius, kurių centrai yra kvadrato viršūnės, o spinduliai lygūs kvadrato kraštinės pusei. Šių keturių skritulių dalis, esanti įbrėžtame į kvadratą skritulyje, sudaro 9 pav. pavaizduotą rozetę.

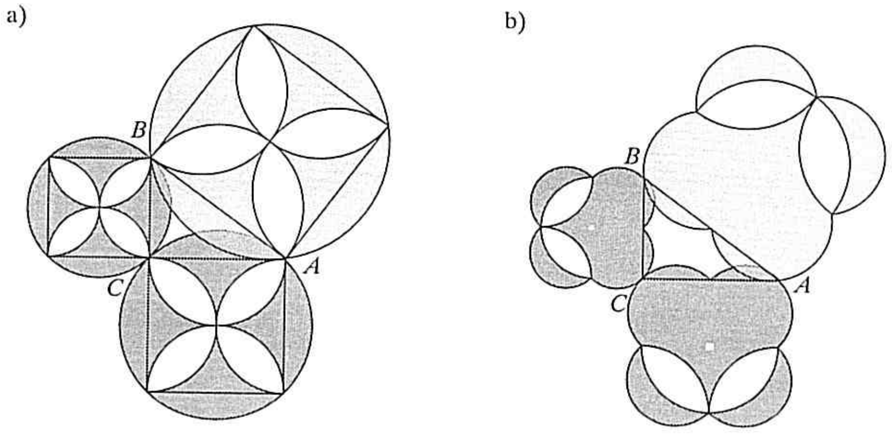
Tiesėmis, einančiomis per kvadrato $ABCD$ centrą ir lygiagrečiomis su kvadrato kraštinėmis, padalykime kvadratą į keturis lygius kvadratus. Apie kiekvieną iš jų apibrėžkime skritulį ir išnagrinėkime figūrą, kurią sudaro kvadrato taškai, minėtų keturių skritulių taškai ir iš kurios pašalinta pusė 9 paveiksle pavaizduotos rozetės (10 pav.).



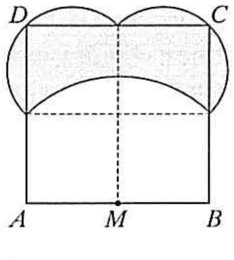
10 pav.

Nesunkiai įrodoma (atlikite tai savarankiškai), kad 10 paveiksle nubrėžtos figūros plotas lygus kvadrato $ABCD$ plotui.

Iš 5 ir 6 pavyzdžių rezultatų išplaukia, kad 11 paveiksle pavaizduotų šviesiai pilkai nudažytų figūrų plotai yra lygūs tamsiai pilkai nudažytų figūrų plotų sumai.

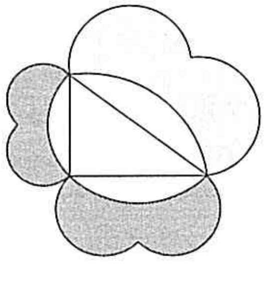


11 pav.



12 pav.

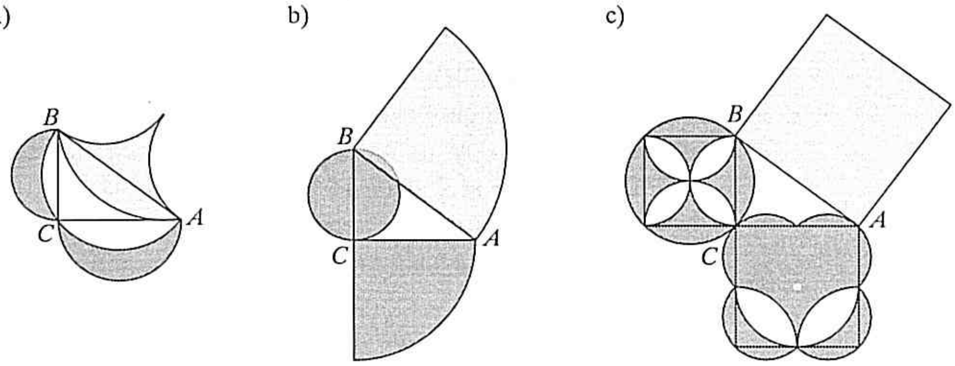
7 pavyzdys. Kvadratą $ABCD$ padalykime į keturis lygius kvadratus. Nubrėžkime skritulį, kurio centras yra kvadrato kraštinės AB vidurio taškas M, o spindulio ilgis yra lygus įstrižainės AC pusei. Apie du kvadratus, esančius prie kraštinės CD, apibrėžkime skritulius. Figūra, sudaryta iš šių dviejų skritulių dalių, nesančių pirmajame skritulyje, pavaizduota 12 pav. Įrodykite, kad šios figūros plotas lygus kvadrato $ABCD$ ploto pusei.



13 pav.

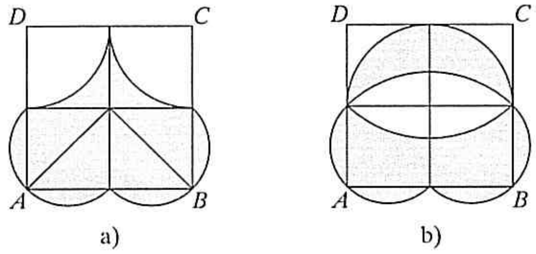
Iš čia išplaukia, kad 13 paveiksle šviesiai pilkos figūros plotas lygus tamsiai pilkų figūrų plotų sumai.

Įvairiai kombinuojant nagrinėtuose pavyzdžiuose pateiktas figūras, galima gauti daug įvairių konstrukcijų, nubraižytų ant stačiojo trikampio kraštinių, pasižyminčių savybe, kad figūros, nubraižytos ant stačiojo trikampio įžambinės, plotas lygus figūrų, nubraižytų ant šio trikampio statinių, plotų sumai. Keletas tokių konstrukcijų pateikta 14 paveiksle (lygybės $S = S_1 + S_2$ teisingumą be vargo patikrins skaitytojai).



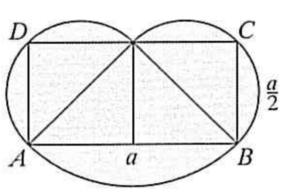
14 pav.

8 pavyzdys. Įrodykite, kad 15 paveikslo a) ir b) pilkai nudažytų figūrų plotai lygūs trims ketvirtadaliams kvadrato $ABCD$ ploto.



15 pav.

9 pavyzdys. Įrodykite, kad 16 paveikslo pilkai nudažytos figūros plotas lygus skritulio, kurio skersmuo yra atkarpa AB, plotui.



16 pav.