$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 1, 88–92

Užduotys

Šeštoji 1999–2001 m. m. užduotis

1. Kurios iš lygčių

a) $\sqrt{5x^2 - 14x + 5} + 5x + 1 = 0$,

b) $\sqrt{5x^2 - 14x + 5} = 5x + 1$,

c) $4x^2 + (x+3)^2 = 8$

yra ekvivalenčios lygčiai

$$\left(5x + \frac{x+4}{x+1}\right)(x+1) = 3?$$

Išspręskite lygtis:

2. $\log_{\frac{5}{4+x^2}}(3 + 4x^2 - 4x) = \log_{1+\sqrt{x}}(-x - x^2)$;

3. $\sqrt{x^3 - 4x + 3} = \sqrt{11 - 4x}$;

4. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$ (spręsdami pasinaudokite tapatybe $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$);

5. $20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x}x^3 - 3\log_{\frac{x}{2}}x^2 = 0$.

Išspręskite nelygybes:

6. $\big||x-2| - 2\big| < 1$;

7. $|x^2 - 5x + 1| < 2x - 5$;

8. $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x - 2$;

9. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x} \leq \sqrt{3x-1} + \sqrt{2(2x-1)}$;

10. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) < 2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$.

Septintoji 1999–2001 m. m. užduotis

1. Patikrinkite, ar Bernulio schemoje

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1.$$

2. Įrodykite, kad Bernulio schemoje įvykiai $A_k(i_k) = \{\omega\colon\ \omega_k = i_k\}$ yra nepriklausomi ir $P(A_k(i_k)) = p^{i_k}(1-p)^{1-i_k}$, $i_k \in \{0, 1\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

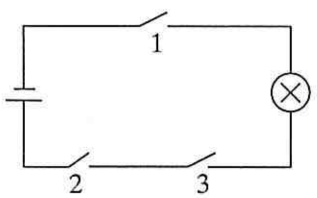
3. Įsitikinkite, kad Markovo schemoje

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1.$$

4. Patikrinkite, ar tuo atveju, kai $p_0(1) = p(i, 1) = p$, $i = 0, 1$, Markovo schema sutampa su Bernulio schema.

5. Įrodykite, kad Bernulio schemoje $|\Omega| = 2^{n+1}$ ir, kai $p = \frac{1}{2}$, $P(\{\omega\}) = |\Omega|^{-1}$, t. y. gauname klasikinį modelį.

6. Urnoje yra 2 balti ir 3 juodi rutuliai, kurie, gerai išmaišius, traukiami ir negrąžinami. Apibrėžkite atitinkamą tikimybinę erdvę ir įrodykite, kad tikimybės įvykių, jog traukiant pirmą ir paskutinį kartus bus ištraukti balti rutuliai, yra lygios. Raskite tas tikimybes.



7. Tikimybės, kad elektros grandinės 1, 2 ir 3 kontaktai bus sujungti arba atjungti nepriklausomai vienas nuo kito, yra vienodos ir lygios 1/2. Apibrėžkite atitinkamą tikimybinę erdvę ir raskite tikimybę įvykio, jog lemputė nedegs. Raskite sąlyginę tikimybę, kad kontaktas 1 atjungtas, jei žinoma, kad lemputė nedega.

8. Matematinės indukcijos būdu įrodykite, kad

$$\Pi^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - q^k & q^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

kai

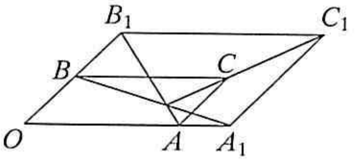
$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - q & q \end{pmatrix}.$$

9. Matematinės indukcijos būdu įrodykite, kad

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{kai } k \text{ lyginis natūralusis skaičius,} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{kai } k \text{ nelyginis natūralusis skaičius.} \end{cases}$$

10. Tegu orų kaitą iš giedros į ūkanotą ir atvirkščiai, aprašo homogeniška Markovo grandinė su perėjimo tikimybių matrica $\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. Raskite tikimybę, kad poryt bus giedra diena, jei žinoma, kad šiandien yra giedra.

Aštuntoji 1999–2001 m. m. užduotis



1. Brėžinyje pavaizduoti du lygiagretainiai $OACB$ ir $OA_1C_1B_1$. Įrodykite, kad tiesės AB_1, BA_1 ir CC_1 susikerta viename taške.

   Nurodymas. Pasirinkite pražulnią koordinačių sistemą taip, kad tiesės OA ir OB būtų koordinačių ašimis, be to, taškų O, A ir B koordinatės — $O(0;0)$; $A(1;0)$, $B(0;1)$. Pasirinkę taškų A_1 ir B_1 koordinates, pavyzdžiui, $A_1(a;0)$, $B_1(0;b)$, parašykite tiesių A_1B, AB_1 ir CC_1 lygtis ir įsitikinkite, kad tiesės eina per vieną tašką.

2. Taškai A_1, B_1 ir C_1 — trikampio ABC kraštinių BC, AC ir AB vidurio taškai, o taškas M — bet kuris plokštumos taškas. Taškai P, Q ir R — simetriški taškui M taškų A_1, B_1 ir C_1 atžvilgiu. Įrodykite, kad tiesės AP, BQ ir CR kertasi viename taške.

   Nurodymas. Pasirinkite koordinačių sistemą taip, kad taškų A, B ir C koordinatės būtų: $A(0;0)$, $B(1;0)$ ir $C(0;1)$. Tada:

   1) apskaičiuokite taškų A_1, B_1 ir C_1 koordinates;
   2) taško M koordinates pažymėję x ir y, raskite taškų P, Q ir R koordinates;
   3) apskaičiuokite atkarpos AP vidurio taško L koordinates ir įrodykite, kad L yra atkarpų BQ ir CR vidurio taškas.

3. Apskaičiuokite plotą ir perimetrą trikampio ABC, kurio viršūnės (polinėse koordinatėse): $A(9; \frac{\pi}{10})$, $B(12; \frac{\pi}{3})$ ir $C(10; \frac{3\pi}{5})$.

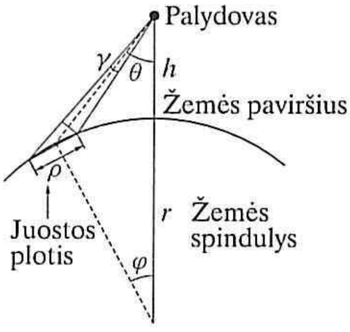
4. Nustatykite polines koordinates viršūnių taisyklingojo šešiakampio, kurio kraštinė lygi a, laikydami poliumi vieną jo viršūnę, o poline ašimi — spindulį, išeinantį iš tos viršūnės, kuriam priklauso šešiakampio kraštinė.

5. Kūgio lygtis Dekarto koordinatėse yra $x^2+y^2=3z^2$. Parašykite šio kūgio lygtį sferinėse koordinatėse.

6. Nubraižykite paviršių, kurio lygtis cilindrinėje koordinačių sistemoje yra $z=r+\varphi$, kai r ir φ kinta intervale $[0, 2]$.

7. Nubraižykite paviršių, kurio lygtis sferinėje koordinačių sistemoje yra $\theta=\rho+\varphi$, kai ρ ir φ kinta intervale $[0, 2]$.

8. Tarkime, Vilnius ir Talinas yra toje pačioje geografinėje ilgumoje ($25°$ į rytus nuo Grinvičo dienovidinio), o jų geografinės platumos yra atitinkamai $54°$ ir $59°$ (į šiaurę nuo pusiaujo). Žemės rutulio spindulys apytikriai yra lygus 6300 km. Koks atstumas tarp Vilniaus ir Talino žemėlapyje, kuris nubraižytas cilindrinėje koordinačių sistemoje? Kokia šio atstumo paklaida, palyginti su realiu atstumu, matuojamu ant Žemės paviršiaus?



9. Palydovas, skrisdamas virš Žemės paviršiaus aukštyje h, skenuoja Žemės paviršiu bangų pluoštu, sudarančiu kampą ϑ su vertikale, nukreipta į Žemės centrą, o skenuojančio bangų pluošto skleistinis kampas yra lygus γ. Raskite skenuojamo Žemės paviršiaus juostos plotį ρ (Žemės spindulys yra lygus r).

10. Dviejų geografinių taškų, esančių toje pačioje ilgumoje, platumų skirtumas yra lygus 30° laipsnių. Matuojant žemėlapyje atstumą tarp šių taškų cilindrinėje koordinačių sistemoje, atstumo paklaida bus tuo didesnė, kuo tie taškai bus didesnėje geografinėje platumoje. Kokiose platumose atstumų paklaida viršys 5%?

Antroji 2000–2002 m. m. užduotis

1. Taikydami Euklido algoritmą, išskleiskite skaičių $-\frac{3523}{1300}$ baigtine grandinine trupmena (BGT).

2. Apskaičiavę reduktus, raskite racionalųjį skaičių r, išreikštą BGT, jei $r = [-7, 2, 1, 4, 6, 1, 3]$.

3. Skaičių $-3\frac{41}{119}$ išskleidę BGT, raskite jo visų eilių reduktus. Patikrinkite lygybę $P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^k$, kai $k = 3$.

4. Suprastinkite racionalųjį skaičių $\frac{11929}{12877}$, skleisdami jį BGT. Raskite jo visų eilių reduktus ir išdėstykite juos didėjimo tvarka.

5. Pakeiskite trupmeną $-\frac{437}{702}$ tokiu jos reduktu su mažiausiu vardikliu, kad padaryta paklaida neviršytų 0,002.

6. Pasinaudodami grandininėmis trupmenomis, išspręskite neapibrėžtąją lygtį $12x + 31y = 436$. Raskite jos atskirąjį sprendinį (x_0, y_0), jei žinoma, kad x_0 reiškia žmogaus gimimo dieną, o y_0 — gimimo mėnesį.

7. Skaičių $\sqrt{23}$ išskleiskite GT. Raskite tokį jo reduktą R_k su mažiausiu vardikliu, kad galiotų įvertis

$$\left|\sqrt{23} - R_k\right| \leqslant 0{,}001.$$

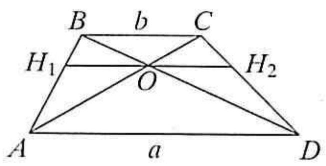
8. Skleisdami GT, raskite kvadratinės lygties $x^2 - 5x + 3 = 0$ mažesniosios šaknies racionalųjį artinį 0,002 tikslumu.

9. Raskite kvadratinę iracionalybę α, jei žinoma, kad

$$\alpha = [-3, 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \ldots] = [-3, 2, \overline{1, 4}].$$

10. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais n $\sqrt{n^2 + 2} = [n, n, 2n, n, 2n, n, 2n, n, \ldots] = [n, \overline{n, 2n}]$.

Trečioji 2000–2002 m. m. užduotis



1. Stačiojo trikampio statiniai yra a ir b, įžambinė lygi c. Statinių a ir b projekcijas įžambinėje pažymėkime a', b'. Įrodykite lygybes $a = \sqrt{ca'}$, $b = \sqrt{cb'}$. Pasinaudodami šiomis lygybėmis išveskite Pitagoro teoremos formulę.

2. Per trapecijos $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką O nubrėžta atkarpa H_1H_2, lygiagreti su trapecijos pagrindais.

   Įrodykite, kad harmoninis vidurkis $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ yra lygus atkarpos H_1H_2 ilgiui. Čia a ir b yra trapecijos pagrindų ilgiai.

3. Raskite mažiausią dviejų teigiamų kintamųjų sumą, jeigu jų sandauga yra pastovi.

4. Iš granito reikia iškirsti stačiakampio gretasienio formos postamentą, kurio aukštis lygus pagrindo įstrižainei, o pagrindo plotas yra $4\,\mathrm{m}^2$. Koks turi būti pagrindo ilgis ir plotis, kad postamento visas paviršius būtų mažiausias?

5. Išspręskite lygtį

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 120.$$

6. Pirmą viso kelio trečdalį automobilis važiavo 54 km/h greičiu, antrąjį įveikė 45 km/h greičiu, o trečiąjį važiavo 60 km/h greičiu. Raskite vidutinį automobilio greitį. (Atsakymą pateikite 0,1 km/h tikslumu.)

7. Įrodykite nelygybę $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, kai $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

8. Įrodykite, kad trijų neneigiamų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį, t. y. $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$. Kada galioja lygybė? (Pasinaudokite 3 pavyzdyje įrodyta nelygybe ir imkite $d = \frac{a+b+c}{3}$.)

9. Įrodykite, kad bet kurių aštuonių neneigiamų skaičių $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_7, b_8$ aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį.

10. Įrodykite nelygybę

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a+b+c).$$