$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 1, 84–87

Nelygybės

A. Andžanas, I. Bozė, P. Vaderlindas

Nuo šio numerio pradėsime spausdinti medžiagą, kuri pravers vyresniųjų klasių moksleiviams ruošiantis matematikos olimpiadoms. Kiekviename numeryje spausdinsime vienos rūšies uždavinių rinkinį. Žymus latvių matematikas, profesorius Agnis Andžanas mielai sutiko, kad jo ir kolegų knygelės „Matemaatikas olimpiadu minimums" (1995) skyrių apie nelygybes išverstume Lietuvos matematikos mėgėjams. Straipsnio pradžioje pateiktas visas nelygybių sąrašas, o po juo ir įrodymai. Verta iš pradžių pabandyti įrodyti nelygybes savarankiškai, o jeigu nesiseka — žvilgterti į sprendimus. Iš latvių kalbos vertė L. Narkevičius.

Įrodykite nelygybes

1. Įrodykite, kad
   a) $1 + x \geqslant 2\sqrt{x}$, jei $x > 0$; b) $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, jei $a > 0$;
   c) $\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$, su bet kuriais x ir y; d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y}$, jei $x, y > 0$;
   e) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$, su bet kuriais x, y, z;
   f) $(a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 8abc$, jei $a, b, c \geqslant 0$.
2. Įrodykite, kad $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$.
3. Išspręskite lygtį $2^x + 2^{-x} + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$.
4. Tegu $a_1a_2 \cdots a_n = 1$; čia $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
   Įrodykite, kad $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geqslant 2^n$.
5. Tarkime, $a, b, c > 0$ ir $a+b+c = 1$. Įrodykite, kad $(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c)$.
6. Įrodykite, kad $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$, jei $x > 0$.
7. Įrodykite, kad visiems natūraliesiems m ir n yra teisinga nelygybė $|36^n - 5^m| \geqslant 11$.
8. Raskite didžiausią m ir mažiausią M, kad su visais teigiamais a_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$, būtų tenkinama nelygybė
   $m < \frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_9}{a_9+a_{10}} + \frac{a_{10}}{a_{10}+a_1} < M$.
9. Įrodykite, kad teigiamiems a_i ir b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, yra teisinga nelygybė
   $$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + \cdots + b_n)^2}.$$
10. Įrodykite, kad $\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - z)^2} + \sqrt{z^2 + (1 - t)^2} + \sqrt{t^2 + (1 - x)^2} \geqslant 2\sqrt{2}$, jei $0 < x, y, z, t < 1$.
11. Įrodykite, kad natūraliesiems n
    $$\frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2} < \frac{\pi}{4}.$$
12. Tegu $a + b = 1$. Įrodykite, kad $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{2^3}$.

13. Tegu $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Įrodykite, kad $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$.
14. Įrodykite, kad $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant a(b + c + d + e)$.

Įrodymai

1. a) $1 - 2\sqrt{x} + x = (1 - \sqrt{x})^2 \geqslant 0$.
   b) $a - 2 + \frac{1}{a} = (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 \geqslant 0$. Nelygybė teigia, kad teigiamo skaičiaus ir jam atvirkštinio suma visada yra ne mažesnė už 2.
   c) Nagrinėjamoji nelygybė yra ekvivalenti nelygybėms: $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$; $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geqslant 0$.
   d) Subendravardikliname kairiąją pusę: $\frac{x+y}{xy} \geqslant \frac{4}{x+y}$. Kadangi x ir y teigiami, abi puses galima padauginti iš $xy(x + y)$. Tada $(x + y)^2 \geqslant 4xy$, $x^2 + 2xy + y^2 \geqslant 4xy$, $x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$, $(x - y)^2 \geqslant 0$.
   e) Nelygybę dauginame iš 2:
   $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geqslant 2xy + 2xz + 2yz$;
   $(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (z^2 - 2zy + y^2) \geqslant 0$;
   $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (z - y)^2 \geqslant 0$.
   f) Jei bent vienas iš skaičių a, b, c lygus 0, tai nelygybė akivaizdi. Jei $a, b, c \neq 0$, tuomet nelygybę $(a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 8abc$ padaliję iš abc ir pertvarkę kairiąją jos pusę, gauname:
   $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+c}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = (1 + \frac{b}{a})(1 + \frac{a}{c})(1 + \frac{c}{b}) = 2 + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + (\frac{a}{c} + \frac{c}{a}) + (\frac{b}{c} + \frac{c}{b}) \geqslant 8$.
   Pasinaudojame tuo, kad skliaustuose yra teigiamų skaičių ir jam atvirkštinių sumos, todėl jos yra ne mažesnės už 2.
2. $2^x - 2 + 2^{-x} = (2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}})^2 \geqslant 0$.
3. Kadangi 2^x bei 2^{-x} ir $\operatorname{tg}^2 x$ bei $\operatorname{ctg}^2 x$ yra vienas kitam atvirkštiniai teigiami dydžiai, tai jų sumos visuomet yra ne mažesnės už 2. Kadangi $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$ ir $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 2$, tai lygybė galima tik tada, kai kiekviena iš šių sumų yra lygi 2. Iš $2^x + 2^{-x} = 2$, $2^{\frac{x}{2}} = 2^{-\frac{x}{2}}$, gauname $x = 0$. Jei $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$, tai $|\operatorname{tg} x| = |\operatorname{ctg} x| = 1$ ir $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$.

   Kadangi 0 nėra šios trigonometrinės lygties sprendinys, tai nagrinėjamoji lygtis sprendinių neturi.
4. Kadangi $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, tai ir $\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1$. Padalijame nelygybę iš $\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}$:
   $\frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}{\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}} \geqslant 2^n$.
   Kairiąją pusę pertvarkome:
   $\frac{1+a_1}{\sqrt{a_1}} \cdots \frac{1+a_2}{\sqrt{a_2}} \cdots \frac{1+a_n}{\sqrt{a_n}} = \left(\sqrt{a_1} + \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right) \cdots \left(\sqrt{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$.
   Teigiamojo skaičiaus ir jam atvirkštinio suma ne mažesnė už 2, todėl visos sandaugos reikšmė visuomet ne mažesnė už 2^n.
5. Sąlygą $a + b + c = 1$ perrašykime trejopai:
   $1 + c = (1 - a) + (1 - b)$, $\quad 1 + b = (1 - a) + (1 - c)$, $\quad 1 + a = (1 - b) + (1 - c)$.
   Pažymėkime $1 - a = x$, $1 - b = y$, $1 - c = z$. Pastebėkime, kad $x, y, z > 0$, o uždavinio nelygybę galime užrašyti taip:
   $(y + z)(x + z)(x + y) \geqslant 8xyz$.
   Gavome 1 uždavinio f) dalies nelygybę, kurią jau įrodėme.

6. Pasinaudokime aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

$$A = 2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot \sqrt{2^{\sqrt[12]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{x}}} = 2\sqrt{2^{\sqrt[12]{x}+\sqrt[4]{x}}} \tag{1}$$

Dar kartą pasinaudokime šia nelygybe:
$\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x} \geqslant 2\sqrt{\sqrt[12]{x} \cdot \sqrt[4]{x}} = 2\sqrt{x^{1/12+1/4}} = 2 \cdot x^{1/6}$.
Pasinaudoję šia nelygybe, iš (1) gauname
$A \geqslant 2\sqrt{2^{2 \cdot x^{1/6}}} = 2 \cdot 2^{x^{1/6}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

7. Kadangi 36^n paskutinis skaitmuo yra 6, o 5^m paskutinis skaitmuo lygus 5, tai $|36^n - 5^m|$ paskutinis skaitmuo yra 1 arba 9. Įrodykime, kad skirtumas $36^n - 5^m$ nelygus nei ± 1, nei ± 9, tuomet jis bus ne mažesnis už 11.

Lygybę $36^n - 5^m = \pm 9$ galime perrašyti taip: $36^n \mp 9 = 5^m$. Tačiau ši lygybė negali būti teisinga, nes kairioji pusė dalijasi iš 9, o dešinioji — ne.

Lygybė $36^n - 5^m = -1$ taip pat negalima, nes iš jos išplauktų lygybė $36^n + 1 = 5^m$, kuri yra neteisinga, nes kairiosios pusės paskutinis skaitmuo lygus 7, o dešiniosios lygus 5.

Lygybę $36^n - 5^m = 1$ galime pakeisti $36^n - 1 = 5^m$, o po to $(6^n - 1)(6^n + 1) = 5^m$. Dešinioji pusė dalijasi tik iš skaičiaus 5 laipsnių; tuomet ir $6^n - 1$, ir $6^n + 1$ turi dalytis iš 5, bet taip būti negali, nes jų skirtumas lygus 2.

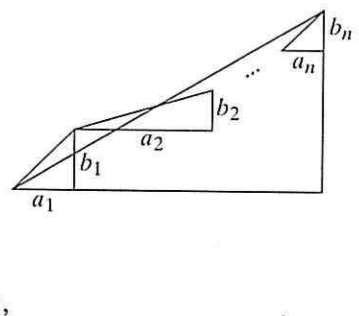
8. Pažymėkime dvigubos nelygybės sumą S. Jei visų dėmenų vardiklius pakeistume į $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$, tai sumą S sumažintume. Naujoji suma būtų lygi 1. Taigi suma S yra didesnė už 1 ir $m \geqslant 1$. Nagrinėkime sumą $S_1 = \frac{a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_{10}}{a_9+a_{10}} + \frac{a_1}{a_1+a_{10}}$.

Kaip ir sumai S, galime parodyti, kad $S_1 > 1$. Nesunku įsitikinti, kad $S + S_1 = 10$, todėl $S < 9$, $M \leqslant 9$.

Jei $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ yra labai greitai didėjanti seka, tai S yra artima 1, nes tuomet visi pirmieji 9 dėmenys yra „beveik 0“, o paskutinis — „beveik 1“. Jei ši seka yra labai greitai mažėjanti, tai visi pirmieji 9 dėmenys yra „beveik 1“, o paskutinis — „beveik 0“. Tuomet S gali būti labai artima skaičiui 9.

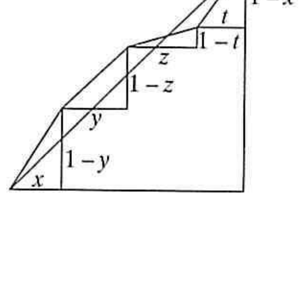
Taigi didžiausia m reikšmė lygi 1, o mažiausia M reikšmė lygi 9.

9. Nelygybę įrodinėsime geometriškai. Tegu a_i yra stačiojo trikampio vienas statinis, o b_i — kitas statinis, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tuomet kvadratinės šaknys kairiojoje pusėje reiškia trikampių įžambinių ilgius. Kita vertus, dešinioji pusė yra įžambinė tokio trikampio, kurio vienas statinis lygus $\sum a_i$, o kitas lygus $\sum b_i$. Atkarpos ilgis yra ne didesnis už laužtės, jungiančios tos atkarpos galus, ilgį, todėl uždavinio nelygybė teisinga.

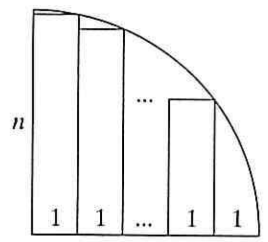


10. Šią nelygybę, kaip ir 9-ąją, įrodysime geometriškai.

Sudarysime stačiuosius trikampius, kurių statiniai yra x ir $1-y$, y ir $1-z$, z ir $1-t$, t ir $1-x$. Tuomet kairioji nelygybės pusė yra visų šių keturių trikampių įžambinių ilgių suma.
Dabar nagrinėkime didįjį statųjį trikampį: jo vienas statinis lygus $x+y+z+t = a$, o antrasis yra $(1-y)+(1-z)+(1-t)+(1-x) = 4 - a$. Tuomet įžambinės kvadratas lygus $a^2 + (4-a)^2 = 2a^2 - 8a + 16 = 2((a-2)^2 + 4) \geqslant 8$, o pati įžambinė yra $\geqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Tai ir reikėjo įrodyti.



11. Šį uždavinį taip pat spręsime geometriškai. Nagrinėsime skritulio, kurio spindulys lygus n, ketvirtąją dalį. Išpjovos vieną kraštinę padalysime į n lygių dalių ir sudarysime $n-1$ stačiakampių. Pirmojo stačiakampio viena kraštinė lygi 1, įstrižainė lygi n, o kita kraštinė yra $\sqrt{n^2-1}$; toks pat yra ir šio stačiakampio plotas. Antrojo stačiakampio viena kraštinė lygi 1, antroji yra $\sqrt{n^2-2^2}$; toks pat yra ir jo plotas ir t. t. Visų šių stačiakampių plotų suma yra mažesnė už išpjovos plotą $\frac{\pi n^2}{4}$. Iš čia išplaukia nelygybė.



12. Pažymėkime $a = \frac{1}{2} + \alpha$, $b = \frac{1}{2} - \alpha$. Tuomet $a^4 + b^4 = (\frac{1}{2} + \alpha)^4 + (\frac{1}{2} - \alpha)^4 = 2 \cdot (\frac{1}{2})^4 + 12 \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot \alpha^2 + \alpha^4$. Iš čia $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{2^3}$. Tai ir reikėjo įrodyti.
13. Pažymėkime $a_i = \frac{1}{n} + \alpha_i$. Nesunku pastebėti, kad $\sum \alpha_i = 0$, o $a_i^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \cdot \alpha_i + \alpha_i^2$. Tuomet $\sum a_i^2 = n \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \cdot \sum \alpha_i + \sum \alpha_i^2 = \frac{1}{n} + \sum \alpha_i^2 \geqslant \frac{1}{n}$.
14. Pirmiausia išskaidykime $a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$. Perkelkime viską į kairiąją pusę ir sugrupuokime:

$$\Big(b^2 - ba + \frac{a^2}{4}\Big) + \Big(c^2 - ca + \frac{a^2}{4}\Big) + \Big(d^2 - da + \frac{a^2}{4}\Big) + \Big(e^2 - ea + \frac{a^2}{4}\Big) =$$
$$= \Big(b - \frac{a}{2}\Big)^2 + \Big(c - \frac{a}{2}\Big)^2 + \Big(d - \frac{a}{2}\Big)^2 + \Big(e - \frac{a}{2}\Big)^2 \geqslant 0.$$

Gavome akivaizdžią nelygybę, iš kurios išplaukia ir uždavinio nelygybė.