$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 1, 75–80

Ar įkandami pasaulinės olimpiados uždaviniai?

Juozas Mačys
conf@ktl.mii.lt

Lietuvos jaunųjų matematikų rinktinės vadovas analizuoja 41 pasaulinės olimpiados uždavinį: įrodykite, kad teigiamiems skaičiams a, b, c, $abc = 1$, teisinga nelygybė $(a - 1 + 1/b)(b - 1 + 1/c)(c - 1 + 1/a) \leqslant 1$.

Įspūdžiai iš 41 pasaulinės olimpiados (IMO) aprašyti šio žurnalo praeitame numeryje[1].

Olimpiadoje už kiekvieną uždavinį skiriami 7 taškai. Labai svarbu be klaidelės išspręsti bent vieną uždavinį — jau vien už tai dalyvis apdovanojamas garbės raštu. Bet svarbiausia tai, kad už vieną uždavinį 7 taškus gavęs dalyvis rimtai pretenduoja į bronzos medalį (užtenka pakrapštyti dar vieną kitą uždavinį — pavyzdžiui, nurodyti teisingus atsakymus). Atitinkamai iki galo įveikęs du uždavinius dalyvis pretenduoja į sidabro apdovanojimą (sunkiau su auksu — tam reikia maždaug keturių uždavinių). Todėl labai svarbu pasirinkti uždavinius, kuriuos galima įveikti.

Čia aptarsime tik 2-ąjį olimpiados uždavinį.

Tegul a, b, c — teigiamieji skaičiai, $abc = 1$. Įrodykite, kad

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1. \tag{1}$$

Įdomu buvo suvokti, kodėl jį taip sunkiai sprendė daugelis net ir stipriųjų komandų dalyvių. Tiesa, ir uždavinių komiteto (yra ir toks — o kaipgi: olimpiadai kiekvienos šalies siūlomus uždavinius reikia perspręsti, atrinkti 20 tinkamesnių galutiniam balsavimui) pateikti trys sprendimai neatrodo labai lengvi (žr. priedą straipsnio pabaigoje).

Priežastys čia buvo greičiau psichologinės — pastaraisiais metais iš šešių uždavinių nelygybė būdavo sprendžiama sunkiausiai. Atspėti, kuris uždavinys lengvas, o kuris sunkus, ne taip jau paprasta. O spręsti uždavinį manant, kad jis sunkus, tikrai gerokai sunkiau.

Garsus anglų matematikas Dž. Litlvudas (John Edensor Littlewood, 1885–1977) pasakoja tokį nutikimą iš savo gyvenimo. Studijų metais laikydamas egzaminą (1905 m.) jis išsprendė visus uždavinius, išskyrus vieną, kurio niekaip negalėjo įveikti. Bet pamatęs, kad kaimynas — vidutinis studentas prie to uždavinio padėjo pliusiuką, jis suprato, kad uždavinys lengvas. Tada jau sprendimui užteko vos kelių minučių.

Beje, toliau jis rašo: „Pavyzdingas žmogus nebebūtų sprendęs to uždavinio; aš truputį gailiuosi, kad taip nepadariau, bet, ačiū Dievui, sąžinė vėliau manęs nekankino.“ Ką čia bepridursi: „*Tempora mutantur et nos mutamur in illis*“[2].

[1] R. Kašuba, Jaunųjų matematikų varžybos, *Alfa plius omega*, 2000, **2**, 16–19.

[2] Laikai keičiasi, ir mes keičiamės kartu (lot.).

Panagrinėkime primityviausią sprendimo būdą. Vargu ar yra sistemų su trimis nežinomaisiais, kurių nebūtų galima paprastai išspręsti eliminavus vieną kintamąjį. Tad išsireikškime $c = 1/(ab)$:

$$\Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big)\Big(b - 1 + ab\Big)\Big(\frac{1}{ab} - 1 + \frac{1}{a}\Big) \leqslant 1. \tag{2}$$

Gautą nelygybę turime įrodyti su visais $a \neq 0$, $b \neq 0$. Sudauginkime pirmuose dvejuose skliaustuose esančius reiškinius:

$$\Big(ab - a + a^2b - b + 1 - ab + 1 - \frac{1}{b} + a\Big)\Big(\frac{1}{ab} - 1 + \frac{1}{a}\Big) \leqslant 1,$$

$$\Big(a^2b - b + 2 - \frac{1}{b}\Big)\Big(\frac{1}{ab} - 1 + \frac{1}{a}\Big) \leqslant 1. \tag{3}$$

Jeigu dabar atskliaustume, tai per gausybę narių nieko ir nebepamatytume (šitaip „žuvo“ daugelis, taip pat ir visi mūsų komandos nariai). O iš tikrųjų reikia gerai įsižiūrėti į gautą sandaugą. Joje nesunku pastebėti reiškinį $b + 1/b - 2$. Bet juk tai pilnasis kvadratas $(\sqrt{b} - 1/\sqrt{b})^2$ (o ir šiaip visi puikiai prisimename nelygybę $b + 1/b \geqslant 2$). Vadinasi, reiškinys pirmuosiuose skliausteliuose mažesnis už a^2b!

Tad dabar dar kartą galime pasakyti sau „stop“. Jeigu paprasta įvertinti pirmųjų dviejų skliaustelių sandaugą, tai gal net keisti $c = 1/(ab)$ nereikia?

Pirmas būdas. Bandome iš naujo (ženklas $\doteq$ reiškia „pažymėkime“; pvz., užrašas $X \doteq y + z$ atitinka „reiškinį $y + z$ pažymėkime X“):

$$A \doteq \Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big)\Big(b - 1 + \frac{1}{c}\Big) = ab - a + \frac{a}{c} - b + 1 - \frac{1}{c} + 1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}.$$

Bet $ab = 1/c$, $a = 1/(bc)$, todėl $A = a/c - b + 2 - 1/b$.

Taip ir yra! Įrodėme, kad $A \leqslant a/c$.

O dabar prisiminkime seną mokyklinį uždavinį:

Įrodykite nelygybę

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

Vienas iš galimų jos įrodymo būdų gerai žinomas: kadangi $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, $c^2 + a^2 \geqslant 2ca$, tai sudėję visas tris nelygybes gauname reikiamą. Mūsų atveju viskas labai panašu, tik tris nelygybes reikia ne sudėti, o sudauginti.

Iš tikrųjų, kadangi

$$A = \Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big)\Big(b - 1 + \frac{1}{c}\Big) \leqslant \frac{a}{c},$$

tai

$$B \doteq \Big(b - 1 + \frac{1}{c}\Big)\Big(c - 1 + \frac{1}{a}\Big) \leqslant b/a, \qquad C \doteq \Big(c - 1 + \frac{1}{a}\Big)\Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big) \leqslant \frac{c}{b}$$

ir sudauginę visas tris nelygybes gauname

$$\Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big)^2\Big(b - 1 + \frac{1}{c}\Big)^2\Big(c - 1 + \frac{1}{a}\Big)^2 \leqslant 1, \tag{4}$$

todėl

$$\Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big)\Big(b - 1 + \frac{1}{a}\Big)\Big(c - 1 + \frac{1}{a}\Big) \leqslant 1.$$

Beje, už tokį sprendimą 7 taškų negautume: čia yra du trūkumai. Pirmasis — mes tyliai „ištraukėme šaknį“: iš nelygybės $x^2 \leqslant 1$ padarėme išvadą $x \leqslant 1$, niekaip to nepagrindę. Dėl teisybės reikia pasakyti, kad pagrįsti tai nesunku: nelygybė $x^2 \leqslant 1$ ekvivalenti nelygybei $-1 \leqslant x \leqslant 1$, taigi tikrai $x \leqslant 1$. Už šį trūkumą greičiausiai dovanotų ir komisija (ir neatimtų 1 taško). Kur kas didesnis trūkumas — beatodairiškai dauginti nelygybes: jas galima dauginti, kai visi nariai teigiami, ir negalima, jeigu nariai neigiami. Pavyzdžiui, $-2 < 1$ ir $-3 < 1$, bet nelygybė $(-2)(-3) < 1$ neteisinga. Už šitą trūkumą komisija garantuotai nubaustų, ir gal net 2 taškais. Šį sunkumą apeiti paprasta (žr. priedo sprendimo būdus): jei pradinės nelygybės vienuose skliausteliuose reiškinys neigiamas, tai įrodinėti nėra ko — kairioji pusė neigiama. O daugiau kaip vienuose skliausteliuose reiškinys neigiamas negali būti. Pavyzdžiui, jei

$$a - 1 + \frac{1}{b} < 0, \qquad b - 1 + \frac{1}{c} < 0,$$

tai sudėję nelygybes (sudėti vienaprasmes nelygybes visada galima!) gautume

$$a + b + \frac{1}{b} - 2 + \frac{1}{c} < 0.$$

Kadangi $b + 1/b \geqslant 2$, gautume prieštarą. (Galima tik nusistebėti — vėl ta pati gerai pažįstama mokyklinė nelygybė!)

Ir dar viena pastaba: (4) nelygybė iš viso gali būti neteisinga (vadinasi, jos ir įrodyti neįmanoma!). Iš tikrųjų, imkime $a = 1/2$, $b = 4$, $c = 1/2$. Tada $abc = 1$, bet kairioji (4) nelygybės pusė lygi $(-1/4)^2 \cdot (5)^2 \cdot (3/2)^2 = 15^2/8^2$.

Antras būdas. Grįžkime prie (3) nelygybės ir pabandykime užbaigti sprendimą „su dviem kintamaisiais“.

Kadangi $b + 1/b \geqslant 2$, tai užtenka įrodyti nelygybę

$$a^2 b\Big(\frac{1}{ab} - 1 + \frac{1}{a}\Big) \leqslant 1, \tag{5}$$

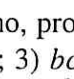
$$a - a^2 b + ab \leqslant 1, \qquad (a-1) - ab(a-1) \leqslant 0,$$

$$(a-1)(1-ab) \leqslant 0. \tag{6}$$

Ar ši nelygybė teisinga? Žinoma, ne visada. Bet štai jeigu būtų $ab \geqslant 1$, $a \geqslant 1$, tai ji būtų tikrai teisinga.

Grįžkime prie pradinės nelygybės. Ar ją įrodinėjant galima laikyti $ab \geqslant 1$? Pasirodo — galima. Iš tikrųjų, kadangi remiantis sąlyga $ab \cdot bc \cdot ca = 1$, tai bent viena sandauga ne mažesnė už 1 (jei visos sandaugos būtų mažesnės už 1, tai ir jų sandauga būtų mažesnė už 1). Kadangi kintamuosius galima „pervardyti“, tai galime laikyti $ab \geqslant 1$.

Paaiškinsime pervardijimo, arba pernumeravimo, procedūrą smulkiau. Jau matėme, kad galimi 3 atvejai: 1) $ab \geqslant 1$ (jis mums tinka); 2) $ca \geqslant 1$; 3) $bc \geqslant 1$.

Antru atveju pastumkime kintamuosius cikliškai:  a pervardykime į b, b pervardykime į c, c pervardykime į a. Nuo to mūsų nelygybė nepasikeičia (būtent todėl tokios nelygybės vadinamos ciklinėmis), o štai sąlyga $ca \geqslant 1$ virsta $ab \geqslant 1$. Jeigu su šia sąlyga nelygybę įrodysime, tai grįžę prie senųjų vardų įrodysime ir pradinę nelygybę.

Trečiu atveju eikime prieš laikrodžio rodyklę: a pervardykime į c, b — į a, c — į b (žinoma, galima eiti du žingsnius pagal laikrodžio rodyklę). Tada sąlyga $bc \geqslant 1$ virsta sąlyga $ab \geqslant 1$.

Taigi įsitikinome, kad galima laikyti $ab \geqslant 1$. Liko išsiaiškinti, ar galima dabar laikyti $a \geqslant 1$. Kadangi $ab \geqslant 1$, tai tikrai arba $a \geqslant 1$, arba $b \geqslant 1$ (žinoma, gali atsitikti, kad ir $a \geqslant 1$, ir $b \geqslant 1$). Jeigu $a \geqslant 1$, viskas gerai (atvejis mums patinka). O jeigu $b \geqslant 1$? Ar galima b pervardyti į a, o a — į b? Pasižiūrėkime, kas tada atsitiktų su pradine nelygybe. Ji virstų

$$\left(b - a + \frac{1}{a}\right)\left(a - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1,$$

taigi nebesutaptų su pradine (sakome, kad nelygybė nėra simetrinė, o tik „ciklinė“; už šitą ir panašias klaidas vertinimo komisija atiminėjo po 3 balus (beje, apie ciklinius ir simetrinius reiškinius bei sistemas ne kartą buvo kalbėta ir rengimosi olimpiadoms stovyklose).

Ir vis dėlto išsisukti iš padėties galima: pakanka pasinaudoti tuo, kad (6) nelygybė taip pat teisinga, kai $a \leqslant 1$, $ab \leqslant 1$.

Jeigu yra du kintamieji, ne mažesni už 1, tai juos cikliškai perstūmę paverčiame a ir b, ir (6) nelygybė teisinga. Jei nėra dviejų kintamųjų, ne mažesnių už 1, tai yra du kintamieji, mažesni už 1, ir juos cikliškai perstūmę gauname $a < 1$, $b < 1$, $ab < 1$, ir vėl (6) nelygybė teisinga.

Bet čia niekur nepabėgome nuo „neigiamojo“ atvejo: iš (5) nelygybės neišplaukia (3), kai abejuose pastarosios nelygybės skliaustuose reiškiniai neigiami. Taigi, kaip ir anksčiau, tą atvejį reikia aptarti papildomai. Bet jeigu $1/(ab) - 1 + 1/a < 0$, tai $1/(ab) + 1/a < 1$, $1/(ab) < 1$ ir $1/a < 1$, taigi $ab > 1$, $a > 1$, ir (2) nelygybės kairiosios pusės pirmuose ir antruose skliausteliuose reiškiniai teigiami. Sprendimas baigtas.

Pastaba. Šiuo būdu (taip pat ir kitais) sprendžiant cikliškai pervardyti kintamųjų nėra būtina – – užtenka uždavinį suskaidyti į atskirus atvejus. Tada sprendimas galėtų atrodyti taip.

Pirmųjų dviejų reiškinių skliausteliuose sandauga ne didesnė kaip a/c, todėl užtektų įrodyti nelygybę

$$\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{a}{c} \leqslant 1, \qquad ac - a + 1 \leqslant c, \qquad (a-1)(c-1) \leqslant 0.$$

Kadangi $abc = 1$, tai yra skaičius, ne mažesnis už 1, ir skaičius, ne didesnis už 1. Vadinasi, galimi atvejai:

1) $a \geqslant 1$, $b \leqslant 1$; 2) $a \geqslant 1$, $c \leqslant 1$; 3) $b \geqslant 1$, $a \leqslant 1$;
4) $b \geqslant 1$, $c \leqslant 1$; 5) $c \geqslant 1$, $a \leqslant 1$; 6) $c \geqslant 1$, $b \leqslant 1$.

Kai 1) ir 3) atvejais sudauginame antruose ir trečiuose skliausteliuose esančius reiškinius, matome, kad sandauga ne didesnė kaip b/a, todėl užtenka įrodyti nelygybę

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{b}{a} \leqslant 1, \qquad ab - b + 1 \leqslant a, \qquad (a-1)(b-1) \leqslant 0,$$

kuri akivaizdi.

Atvejai 2) ir 5) jau išnagrinėti, o 4) ir 6) nagrinėjami analogiškai — dauginami reiškiniai pirmuose ir trečiuose skliausteliuose.

Natūraliai kyla tokie du klausimai: kaip kuo trumpiau surašyti sprendimą ir kaip išvengti „neigiamųjų“ atvejų nagrinėjimo.

Į šiuos klausimus neblogai atsako toks kartu su Latvijos komandos vadovais nugludintas sprendimo būdas.

Trečias būdas. Kadangi $abc = 1$, tai iš a, b ir c yra bent vienas skaičius, ne didesnis už 1, ir bent vienas skaičius, ne mažesnis už 1. Galima laikyti $a \leqslant 1$ (kitaip cikliškai pervardijame skaičius, o kairioji nelygybės pusė nuo to nesikeičia). Dabar galima laikyti $c \geqslant 1$ (jeigu $c < 1$, tai $b > 1$, ir pervardiję a į b, b į c, c į a gausime $a < 1$, $c > 1$). Reikia įrodyti, kad

$$L \doteq \Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big)\Big(b - 1 + \frac{1}{c}\Big)\Big(c - 1 + \frac{1}{a}\Big) \leqslant 1.$$

Kadangi $ab = 1/c$, $a = 1/(bc)$, tai pirmų dviejų L dauginamųjų sandauga

$$ab - a + \frac{a}{c} - b + 1 - \frac{1}{c} + 1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} = \frac{a}{c} - b + 2 - \frac{1}{b} = \frac{a}{c} - \Big(\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}}\Big)^2 \leqslant \frac{a}{c}.$$

Bet trečias L dauginamasis teigiamas ($c \geqslant 1$!), todėl

$$L \leqslant \frac{a}{c} \cdot \Big(c - 1 + \frac{1}{a}\Big) = a - \frac{a}{c} + \frac{1}{c} = a + \frac{1-a}{c} \leqslant a + (1-a) = 1.$$

Sprendimas baigtas. Ir paskutinis klausimas skaitytojui. Kur pasinaudojome sąlyga $a \leqslant 1$?

Priedas

Sprendimas A. Kadangi $abc = 1$, šitą nehomogeninę nelygybę galima pertvarkyti į homogeninę atitinkamai pakeitus kintamuosius. Konkrečiai, a, b, c galima pakeisti taip:

$$a = \frac{x}{y}, \qquad b = \frac{y}{x}, \qquad c = \frac{z}{x}$$

su tam tikrais teigiamais skaičiais x, y ir z (pvz., $x = 1$, $y = 1/a$, $z = 1/(ab)$. Perėję prie kintamųjų x, y, z, gauname

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leqslant xyz.$$

Neigiamas gali būti daugiausiai vienas iš skaičių $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$, nes bet kurių dviejų iš jų suma teigiama. Jeigu yra vienas toks skaičius, tai $uvw \leqslant 0 < xyz$. Tarkime, kad $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$. Tada pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę

$$\sqrt{uv} = \sqrt{(x - y + z)(y - z + x)} \leqslant \frac{1}{2}[(x - y + z) + (y - z + x)] = x.$$

Panašiai $\sqrt{vw} \leqslant y$, $\sqrt{wu} \leqslant z$. Todėl $uvw \leqslant xyz$, o tai ir reikėjo įrodyti.

Sprendimas B. Pertvarkykime kairiąją pusę dviem skirtingais būdais ir sudauginkime. Kadangi $abc = 1$, tai

$$\Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big)\Big(b - 1 + \frac{1}{c}\Big)\Big(c - 1 + \frac{1}{a}\Big) = \frac{(ab - b + 1)(bc - c + 1)(ca - a + 1)}{abc} =$$
$$= (ab - b + 1)(bc - c + 1)(ca - a + 1).$$

Kadangi $1/b = ac$, $1/c = ab$, $1/a = bc$, tai

$$\Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big)\Big(b - 1 + \frac{1}{c}\Big)\Big(c - 1 + \frac{1}{a}\Big) = (a - 1 + ac)(b - 1 + ab)(c - 1 + bc).$$

Pažymėję kairiąją pusę raide L, gauname

$$L^2 = (ab - b + 1)(bc - c + 1)(ca - a + 1)(a - 1 + ac)(b - 1 + ab)(c - 1 + bc).$$

Jeigu $u = a - 1 + 1/b \leqslant 0$, tai $a < 1$ ir $b > 1$, todėl

$$v = b - 1 + \frac{1}{c} > 0 \quad \text{ir} \quad w = c - 1 + \frac{1}{a} > 0.$$

Vadinasi, $L = uvw \leqslant 0 < 1$, ir teiginys įrodytas. Panašiai, kai $v \leqslant 0$ ir $w \leqslant 0$, gaunamas tas pats rezultatas. Taigi laikykime $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$; tada visi L^2 išraiškos daugikliai teigiami. Remdamiesi aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelybybe, gauname:

$$\sqrt{(ab - b + 1)(b - 1 + ab)} \leqslant \frac{(ab - b + 1) + (b - 1 + ab)}{2} = ab,$$

$$\sqrt{(bc - c + 1)(c - 1 + bc)} \leqslant \frac{(bc - c + 1) + (c - 1 + bc)}{2} = bc,$$

$$\sqrt{(ca - a + 1)(a - 1 + ac)} \leqslant \frac{(ca - a + 1) + (a - 1 + ac)}{2} = ca.$$

Vadinasi, $L \leqslant (ab)(bc)(ca) = (abc)^2 = 1$.

Sprendimas C. Naudodamiesi sąlyga $abc = 1$, įsitikiname, kad teisingos lygybės:

$$\frac{a - 1 + \frac{1}{b}}{a} + c\Big(b - 1 + \frac{1}{c}\Big) = 2, \qquad \frac{b - 1 + \frac{1}{c}}{b} + a\Big(c - 1 + \frac{1}{a}\Big) = 2,$$

$$\frac{c - 1 + \frac{1}{a}}{c} + b\Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big) = 2.$$

Be kita ko, iš šių lygybių matyti, kad daugiausia vienas iš skaičių $u = a - 1 + 1/b$, $v = b - 1 + 1/c$, $w = c - 1 + 1/a$ yra neigiamas. Jeigu toks skaičius yra, įrodymas toks pat kaip ir ankstesni. O jeigu $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$, tai iš aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybės gauname:

$$2 = \frac{u}{a} + cv \geqslant 2\sqrt{\frac{cuv}{a}}, \qquad 2 = \frac{v}{b} + aw \geqslant 2\sqrt{\frac{avw}{b}}, \qquad 2 = \frac{w}{c} + bu \geqslant 2\sqrt{\frac{bwu}{c}}.$$

Vadinasi, $uv \leqslant a/c$, $uw < b/a$, $wu \leqslant c/b$, todėl $(uvw)^2 \leqslant (a/c)(b/a)(c/b) = 1$. Kadangi $uvw > 0$, tai įrodymas baigtas.

Pastaba. Iš kiekvieno sprendimo lengva matyti, kad lygybė teisinga tada ir tik tada, kai $a = b = c = 1$.