$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 1, 71–74

Kombinatorika be formulių

Leonas Narkevičius
leonasn@gim.ktu.lt

Straipsnyje pateikiami kombinatorikos uždaviniai ir jų sprendimai nesinaudojant jokiomis formulėmis. Tokius uždavinius gali spręsti ir žemesnių, ir aukštesnių klasių moksleiviai.

Ne vienas moksleivis, vien išgirdęs žodį „kombinatorika“, susiraukia, nes jam ši matematikos sritis atrodo baisi ir sunkiai suvokiama. Žinoma, mokykloje aiškinami gretiniai, deriniai, o dar ir su pasikartojimais, ne kiekvienam lengvai suvokiami. Tačiau daug kur kombinatorikoje nereikia jokių formulių, viską galima suskaičiuoti „ant pirštų“ arba, jų pritrūkus, tiesiog išrašyti visus galimus variantus. Šiame skyrelyje išspręsime keletą kombinatorikos uždavinių, lengvų ir sunkesnių, nesinaudodami formulėmis. Pasistengsime, kiek įmanoma tokios apimties straipsnyje, atskleisti kombinatorikos uždavinių įvairovę.

1. *Vazoje yra trys apelsinai, penkios kriaušės ir keturi obuoliai. Keliais būdais Rasa gali pasirinkti vieną vaisių?*

Vieną apelsiną Rasa gali pasirinkti trimis skirtingais būdais, vieną kriaušę — penkiais, o vieną obuolį — keturiais būdais. Kadangi ji gali rinktis arba vieną apelsiną, arba vieną kriaušę, arba vieną obuolį, tai iš viso ji turi 3+5+4, t. y. 12, skirtingų pasirinkimo variantų. Tai tolygu pasakymui, kad yra dvylika vaisių, iš kurių galima pasirinkti vieną. Čia galime pastebėti *sudėties* taisyklę: kadangi Rasa gali rinktis tą arba kitą, tai variantų skaičius sudedame.

2. *Valgykloje yra dviejų rūšių sriubų ir trijų rūšių antrųjų patiekalų. Keliais būdais galime pasirinkti pietus iš vienos sriubos ir vieno antrojo patiekalo?*

Galime rinktis vieną sriubą ir bet kurį antrąjį patiekalą; tai būtų trys pietų variantai. Taip pat galime imti kitą sriubą ir bet kurį iš antrųjų patiekalų; tai dar trys variantai. Iš viso turime šešis pietų variantus. Nesunku suprasti, kad rezultatas gaunamas sudauginus du (sriubų skaičius) su trimis (antrųjų patiekalų skaičius). Šiuo pavyzdžiu suvokiame *daugybos* taisyklę: kadangi renkamės sriubą ir antrąjį patiekalą, tai variantų skaičius sudauginame.

3. *Į sargybą reikia pasiųsti vieną iš penkių karininkų, vieną iš dešimties puskarininkių ir vieną iš keturiasdešimties kareivių. Keliais skirtingais būdais galima parinkti sargybinių grupę?*

Kadangi reikia pasiųsti ir karininką, ir puskarininkį, ir kareivį, tai naudojamės daugybos taisykle: $5 \cdot 10 \cdot 40 = 2000$ skirtingų būdų.

Dabar patyrinėkime rinkinius, kurių elementus reikia išrikiuoti į eilę.

4. *Kiek iš skaitmenų* 1, 3, 5, 7, 9 *galima sudaryti skirtingų keturženklių skaičių, jei nė vienas skaitmuo skaičiuje negali kartotis?*

Pirmą skaičiaus skaitmenį galime pasirinkti penkiais būdais. Jį užrašę, antrą skaitmenį galėsim rinktis iš likusių keturių, trečiąjį iš likusių trijų, galiausiai, iš paskutinių dviejų skaitmenų išsirinksime ketvirtąjį. Sudauginę skaičius 5, 4, 3, 2, gausime, kad galima sudaryti 120 skirtingų skaičių.

Pabandykime išspręsti šiek tiek sunkesnius uždavinius.

5. *Kiek iš skaitmenų* 1, 2, 5, 7, 8 *galima sudaryti skirtingų lyginių keturženklių skaičių, jei nė vienas skaitmuo skaičiuje negali pasikartoti?*

Šį uždavinį sunkina papildoma sąlyga, kad skaičiai būtų lyginiai. Čia negalima samprotauti visiškai taip pat, kaip ir sprendžiant 4 uždavinį, nes geriausiu atveju abu lyginiai skaitmenys liks paskutiniam pasirinkimui, o blogiausiu — jų nebeliks jau po antrojo pasirinkimo. Taigi šitaip variantų nesuskaičiuosime. Todėl pirmiausia ieškokime, keliais būdais galima parinkti skaitmenį į paskutinę vietą, kuri lemia, kad skaičius būtų lyginis. Kadangi turime du lyginius skaitmenis, tai į paskutinę — ketvirtą vietą turime dvi pasirinkimo galimybes. Tuomet į trečią poziciją galėsime rinktis vieną iš keturių likusiųjų, į antrąją — vieną iš trijų likusiųjų ir galiausiai į pirmąją — vieną iš dviejų likusių skaitmenų. Taigi iš viso variantų yra $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$.

6. *Kiek iš skaitmenų* 1, 3, 5, 7, 0 *galima sudaryti skirtingų keturženklių skaičių, jei nė vienas skaitmuo skaičiuje negali pasikartoti?*

Šiuo atveju pirmo skaitmens negalima rinktis bet kaip, nes netinka 0. Taigi į pirmą vietą renkamės vieną iš keturių (nenulinių) skaitmenų. Bet kurioje iš likusių vietų jau gali būti ir 0, todėl į antrą vietą renkamės bet kurį iš likusių 4, į trečiąją — iš 3, į ketvirtąją — iš 2. Sudauginę gauname: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$.

7. 26 *abiturientai pasikeitė nuotraukomis, kiekvienas iš jų padovanojo savo nuotrauką kiekvienam draugui. Kiek nuotraukų padovanota?*

Šį uždavinį galima spręsti ir grynai kombinatoriškai, tačiau daug paprasčiau samprotauti taip. Kiekvienas moksleivis likusiems draugams įteikė 25 nuotraukas. Kadangi moksleivių buvo 26, tai iš viso padovanota $25 \cdot 26 = 650$ nuotraukų.

8. *Šachmatų turnyre dalyvauja* 12 *žaidėjų, kiekvienas su kiekvienu žaidžia po vieną partiją. Kiek partijų sužaista?*

Iš pradžių galėtume galvoti panašiai, kaip ir spręsdami uždavinį: kiekvienas žaidėjas sužais 11 partijų, iš viso žaidėjų yra 12, tai partijų, kaip ir nuotraukų, lyg ir turėtų būti $11 \cdot 12 = 132$. Keisdamiesi nuotraukomis, moksleivis A duoda nuotrauką moksleiviui B, o B duoda nuotrauką moksleiviui A, t. y. moksleivius A ir B sieja du elementai — nuotraukos. Žaisdami šachmatais, žaidėjas A su žaidėju B žaidžia tą pačią partiją kaip ir žaidėjas B su A, kitaip sakant, juos sieja tik vienas elementas — šachmatų partija. Todėl skaičių 11 ir 12 sandaugą turime dalyti iš dviejų ir gauname 66 partijas.

9. *Kiek skirtingų žodžių, nebūtinai prasmingų, galima sudaryti perstatinėjant žodžio „medus" raides?*

Iš viso yra penkios raidės. Į pirmą vietą galime pasirinkti vieną iš penkių raidžių, į antrąją — vieną iš keturių, po to iš trijų, dviejų ir vienos. Panašiai kaip ir 4 uždavinyje, sudauginame 5, 4, 3, 2, 1 ir gauname 120. Skirtumas tas, kad šiuo atveju naudojame visus elementus. Pastebėkime, kad turėdami penkis elementus ir sudarydami rinkinius iš keturių elementų bei rinkinius iš penkių elementų gauname tą patį rezultatą. Taip yra dėl to, kad variantų skaičių lemia pirmųjų keturių narių parinkimas. O penktąjį elementą ir paliekant nepanaudotą ar pastatant į paskutinę vietą, variantų skaičius nesikeičia. Daugindami visus skaičius, šiuo atveju nuo penkių iki vieno, galime naudoti faktorialo simbolį: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

10. *Kiek skirtingų žodžių galima sudaryti perstatinėjant žodžio „ananasas" raides?*

Kadangi žodyje yra 8 raidės, tai jas kaitalioti galime 8! būdų. Tačiau nesunku pastebėti, kad sukeitus, pavyzdžiui, raides s vietomis žodis išlieka tas pats. Jau vien dėl to šiuo atveju galimų žodžių bus du kartus mažiau, negu esant skirtingoms raidėms. Taip pat ir su raide n. O raidės a yra net keturios. Nesunku pastebėti, kad keturias a raides galime keisti tarpusavyje 4! būdų. Taigi iš viso dėl raidžių pasikartojimo žodžių skaičius sumažės $4!\cdot2!\cdot2!$ kartų. Vadinasi, galima sudaryti $\frac{8!}{4!\cdot2!\cdot2!} = 420$ skirtingų žodžių.

11. *Iš eilės surašyti visi natūralieji skaičiai nuo* 1 *iki* 2001. *Kiek skaitmenų užrašyta?*

Vienženklių skaičių yra 9, dviženklių yra 90, triženklių — net 900. Jų skaitmenis suskaičiuoti nesunku. Belieka rasti, kiek yra keturženklių skaičių. Mažiausias iš jų yra 1000, o didžiausias mūsų uždavinyje lygus 2001. Todėl ieškodami, kiek yra keturženklių skaičių, galime iš didžiausiojo — 2001 atimti 999, t. y. tiek, kiek yra neketurženklių skaičių (arba $2001 - 1000 + 1 = 1002$). Todėl skaitmenų iš viso yra

$$9\cdot1 + 2\cdot90 + 3\cdot900 + 4\cdot1002 =$$
$$= 9 + 180 + 2700 + 4008 = 6877.$$

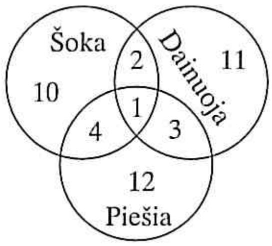
12. *Iš eilės surašyti natūralieji skaičiai:*
a) nuo 1 *iki* 100,
b) nuo 1 *iki* 2001.
Kiek kartų užrašytas skaitmuo 1?

a) Skaičius 1 paimtas 10 kartų kaip vienetų skaitmuo (1, 11, 21, ..., 91), 10 kartų kaip dešimčių skaitmuo (10, 11, 12, ..., 19) ir vieną kartą kaip šimtų skaitmuo (100). Iš viso jis panaudotas 21 kartą.

b) Skaitmuo 1 paimtas 201 kartą kaip vienetų skaitmuo, 200 kartų kaip dešimčių skaitmuo, 200 kartų kaip šimtų skaitmuo ir 1000 kartų (nuo 1000 iki 1999) kaip tūkstančių skaitmuo, t. y. iš viso: $201 + 200 + 200 + 1000 = 1601$.

13. *Mokykloje* 17 *penktokų lanko šokių ratelį,* 17 — *chorą,* 20 — *dailės būrelį. Tarp jų yra* 3 *moksleiviai, kurie ir šoka, ir dainuoja,* 4 *moksleiviai, kurie ir dainuoja, ir piešia,* 5 *moksleiviai, kurie ir šoka, ir piešia. Be to, vienas moksleivis lanko visus tris būrelius. Yra žinoma, kad visi penktokai domisi nors viena iš šių veiklų. Kiek klasėje yra moksleivių?*

Šį uždavinį patogu spręsti naudojantis piešiniu. Kiekviename skritulyje žymėsime atskiro būrelio narių skaičių, skritulių sankirtose — moksleivių, dalyvaujančių ne viename būrelyje, skaičių (1 pav.).



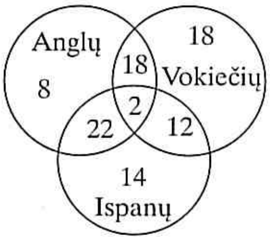
1 pav.

Yra vienas moksleivis, lankantis visus būrelius, ir 5 moksleiviai, kurie ir šoka, ir piešia. Tuomet yra 4 moksleiviai, kurie šoka ir piešia, bet nedainuoja. Taip pat gauname, kad yra 3 moksleiviai, kurie dainuoja ir piešia, bet nešoka, bei 2 moksleiviai, kurie šoka ir dainuoja, bet nepiešia.

Iš 17 šokančių penktokų 4 dar ir piešia, 2 dar ir dainuoja, o 1 — ir piešia, ir dainuoja. Taigi moksleivių, kurie tiktai šoka, yra 10. Lygiai taip pat suskaičiuojame, kad yra 11 moksleivių, kurie tik dainuoja, ir 12 moksleivių, kurie tik piešia. Taigi iš viso yra 43 moksleiviai.

14. *Keliautojų klubo* 50 *narių kalba angliškai,* 50 — *vokiškai ir* 50 — *ispaniškai. Žinoma, kad* 18 *narių kalba tik vokiškai,* 14 *narių — tik ispaniškai,* 12 — *ir vokiškai, ir ispaniškai, bet nekalba angliškai,* 2 *nariai kalba visomis trimis kalbomis. Kiek klubo narių kalba tik angliškai?*

Kaip ir 13 uždavinį, šį spręsime naudodamiesi paveikslu (2 pav.).



2 pav.

Yra 18 narių, kalbančių tik vokiškai. Tuomet yra 32 nariai, mokantys ir vokiečių, ir kurią nors kitą kalbą. Kadangi yra 12 narių, kalbančių ir vokiškai, ir ispaniškai, bet nekalbančių angliškai, ir 2 nariai, mokantys visas tris kalbas, tai 18 narių, moka vokiečių ir anglų kalbas, bet nemoka ispanų. Analogiškai suskaičiuojame, kad yra 22 nariai, mokantys ir ispaniškai, ir angliškai, bet nemokantys vokiškai. Iš 50 mokančių anglų kalbą 18 moka ir vokiečių, 22 moka ir ispanų, o 2 moka visas tris kalbas. Tuomet yra 8 nariai, mokantys tik anglų kalbą.

15. *Kiek skirtingų išsidėstymų galima gauti suvėrus ant vielos žiedo 3 geltonus ir 7 žalius rutuliukus? Jei kuris nors išsidėstymas yra kurio nors veidrodinis atspindys arba jei jį galima gauti iš kito išsidėstymo pasukus žiedą, tai toks išsidėstymas nelaikomas kitokiu.*

Rutuliukų išsidėstymą vienareikšmiškai apibrėžia trys skaičiai, nusakantys kiek žalių rutuliukų yra įsiterpę tarp poros geltonųjų. Kadangi pagal sąlygą nė vienas išsidėstymas nėra kurio nors kito išsidėstymo atspindys, tai kiekvieną galimą rutuliukų išsidėstymą atitinka skirtingi skaičių trejetai. Tarp dviejų geltonų rutuliukų gali būti nuo 0 iki 7 žalių rutuliukų. Tuomet galimi tokie išsidėstymus atitinkantys skaičių trejetai: 007, 016, 025, 034, 115, 124, 133 ir 223. Taigi yra 8 skirtingi rutuliukų išsidėstymai.

16. *Keliais skirtingais būdais galima parinkti tokius natūraliuosius skaičius a ir b, kad $a + b = 1988$ ir sudedant a ir b stulpeliu nė vienoje skiltyje nebūtų perkėlimo („vienas minty").*

Skaitmenį 1 galima gauti dviem būdais: 1) jei skaičiaus a tūkstančių skaitmuo yra 1, o skaičiaus b skaitmuo yra 0, 2) jei skaičiaus a tūkstančių skaitmuo lygus 0, o skaičiaus b skaitmuo lygus 1. Analogiškai skaitmenį 9 galima gauti 10 skirtingų būdų, o skaitmenį 8 — 9 skirtingais būdais. Kadangi nėra perkėlimų ir kiekvienas skaitmuo parenkamas nepriklausomai nuo kitų, tai skaičius a ir b galima parinkti $2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 9$, t. y. 1620, skirtingų būdų.

Keliais būdais jis gali pasirinkti dvi lėkštes, butelį ir cigarų dėžutę?