$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 1, 66–70

Talio teorema

Juozas Šinkūnas
sinkunas@vpu.lt

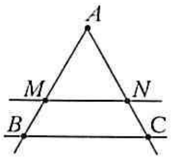
Talio teorema — svarbus elementariosios geometrijos teiginys. Straipsnyje parodyta, kaip šia teorema naudojamasi sprendžiant uždavinius. Vienas iš tokių uždavinių — rasti, kokiu santykiu dalijasi susikirsdamos trikampio pusiaukampinės.

Talis ir jo teorema

Talis (625–547 m. pr. m. e.) — graikų matematikas, astronomas, filosofas. Jis numatė Saulės užtemimą, sugalvojo būdą piramidžių aukščiui pagal jų šešėlį nustatyti. Be kitų, Taliui priskiriamos šios teoremos:

- Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs;
- Jei vienoje tiesėje nuosekliai atidėsime lygias atkarpas, o per jų galus nubrėšime lygiagrečias tieses, tai jos susikirsdamos su bet kokia tiese iškirs joje tarpusavyje lygias atkarpas.

Įvairių šalių mokyklinių matematikos vadovėlių autoriai Talio teorema laikė skirtingus teiginius. Šiame straipsnelyje laikomasi Lenkijos, Prancūzijos ir dabartiniame Lietuvos IX klasės matematikos [1] vadovėlyje išdėstyto požiūrio. Talio teorema vadinamas toks teiginys:

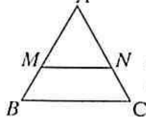


$$MN \parallel BC \;\Downarrow\; \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Jeigu dvi lygiagrečios tiesės kerta kampo kraštines, tai kampo kraštinėse atkirstos atkarpos, imant nuo kampo viršūnės, yra proporcingos.

Talio teorema nėra tokia visiems žinoma kaip Pitagoro. Ja remiantis, įrodinėjami trikampio panašumo požymiai, trikampio ir trapecijos vidurinių linijų savybės, sprendžiami įvairūs uždaviniai.

Iš Talio teoremos išplaukia tokios išvados:



$$MN \parallel BC \;\Downarrow\; \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

1 *išvada.* Tiesė, lygiagreti su trikampio kraštine ir kertanti kitas dvi kraštines, atkerta trikampį, kurio kraštinės proporcingos duotojo trikampio kraštinėms.

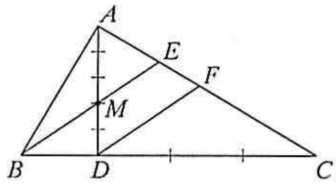
2 *išvada.* Jei tiesė MN, lygiagreti su trikampio ABC kraštine BC, kerta kitas dvi kraštines, tai $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

Talio teoremos, jai atvirkštinės teoremos ir 1-osios išvados įrodymus galima rasti [1] vadovėlyje, 2-ąją išvadą nesunku įrodyti savarankiškai.

Talio teoremos taikymai

Talio teorema ir jos išvados praverčia sprendžiant įvairius geometrijos uždavinius. Panagrinėsime keletą pavyzdžių.

1 uždavinys. *Trikampio ABC kraštinę BC taškas D dalija santykiu $BD:DC = 1:3$, o taškas M atkarpą AD dalija santykiu $AM:MD = 3:2$. Tiesė BM kerta trikampio kraštinę AC taške E. Apskaičiuokite santykį $S_{BEA}:S_{BEC}$.*



Sprendimas. Kadangi trikampių BEA ir BEC aukštinė, nubrėžta iš viršūnės B, yra bendra, tai šių trikampių plotų santykis lygus pagrindų ilgių santykiui:

$$\frac{S_{BEA}}{S_{BEC}} = \frac{AE}{EC}.$$

Taigi reikia rasti, kokiu santykiu taškas E dalija kraštinę AC. Per tašką D nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese BE. Jos ir kraštinės AC sankirtos tašką pažymėkime raide F. Lygiagrečios tiesės BE ir DF kerta kampų DAC ir ACB kraštines. Pagal Talio teoremos 2-ąją išvadą:

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AM}{MD} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{CF}{EF} = \frac{CD}{BD} = \frac{3}{1}.$$

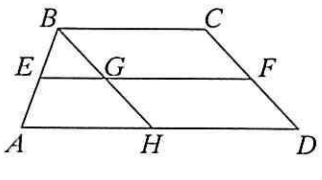
Iš šių lygybių išplaukia, kad $EF = \frac{1}{4}CE$. Taigi

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AE}{\frac{1}{4}CE} = \frac{4AE}{CE} \quad \text{ir} \quad \frac{4AE}{CE} = \frac{3}{2}, \text{ t. y. } \frac{AE}{EC} = \frac{3}{8}.$$

Vadinasi,

$$\frac{S_{BEA}}{S_{BEC}} = \frac{3}{8}.$$

2 uždavinys. *Atkarpos EF galai yra trapecijos $ABCD$ šoninėse kraštinėse AB ir CD. Apskaičiuokite atkarpos EF ilgį, jeigu ji lygiagreti su pagrindais $AD = a$ ir $BC = b$ ($a > b$); be to, $BE:EA = \alpha$.*



Sprendimas. Per trapecijos viršūnę B nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su kraštine CD. Jos ir atkarpų EF ir AD sankirtos taškus pažymėkime atitinkamai G bei H. Akivaizdu, kad $BC = GF = HD$ ir $AH = a - b$. Pagal Talio teoremos 1-ąją išvadą $\frac{EG}{AH} = \frac{BE}{AB}$, t. y.

$$\frac{EG}{b-a} = \frac{BE}{BE+EA} = \frac{BE}{BE+\frac{1}{\alpha}BE} = \frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

Taigi

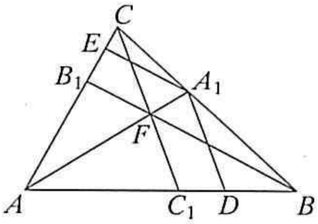
$$EG = \frac{\alpha}{\alpha+1}(a-b),$$

$$EF = EG + GF = \frac{\alpha}{\alpha+1}(a-b) + b = \frac{b+\alpha\cdot a}{1+\alpha}.$$

3 uždavinys. *Per trikampio ABC vidaus tašką F nubrėžtos tiesės AF, BF ir CF kerta kraštines BC, CA ir AB taškuose A_1, B_1 ir C_1; be to, $BA_1 : A_1C = \alpha$, $CB_1 : B_1A = \beta$, $AC_1 : C_1B = \gamma$.*

1) *Apskaičiuokite santykius:* $AF : FA_1$, $BF : FB_1$, $CF : FC_1$;

2) *Įrodykite, kad* $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$.



Sprendimas. 1) Per tašką A_1 nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese CC_1. Jos ir kraštinės AB sankirtos tašką pažymėkime raide D. Lygiagrečios tiesės CC_1 ir A_1D kerta kampų A_1AB ir ABC kraštines. Remdamiesi Talio teoremos 2-ąja išvada, gauname:

$$\frac{AF}{FA_1} = \frac{AC_1}{C_1D} \quad \text{ir} \quad \frac{BD}{DC_1} = \frac{BA_1}{A_1C} = \alpha.$$

Kadangi

$$\frac{BC_1}{DC_1} = \frac{BD + DC_1}{DC_1} = \frac{BD}{DC_1} + 1 = \alpha + 1,$$

tai

$$\frac{AF}{FA_1} = \frac{AC_1}{C_1D} = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{C_1B}{C_1D} = \gamma(\alpha + 1).$$

Analogiškai įrodoma, kad

$$BF : FB_1 = \alpha(1 + \beta), \qquad CF : FC_1 = \beta(1 + \gamma).$$

2) Per tašką A_1 nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese BB_1, ir jos bei kraštinės AC sankirtos tašką pažymėkime raide E. Lygiagrečios tiesės BB_1 ir A_1E kerta kampų ACB ir CAA_1 kraštines. Pagal Talio teoremos 1-ąją išvadą:

$$\frac{CE}{EB_1} = \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{EB_1}{B_1A} = \frac{A_1F}{FA} = \frac{1}{\gamma(1 + \alpha)}.$$

Kadangi

$$CB_1 = CE + EB_1 = \frac{1}{\alpha}EB_1 + EB_1 = \frac{\alpha + 1}{\alpha}EB_1,$$

tai

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB_1}{EB_1} \cdot \frac{EB_1}{B_1A} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\gamma(\alpha + 1)} = \frac{1}{\alpha \cdot \gamma}.$$

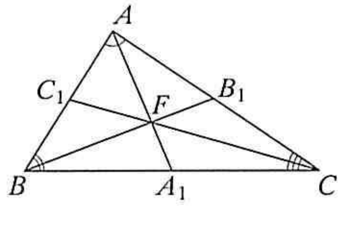
Kita vertus, $\frac{CB_1}{B_1A} = \beta$, todėl $\beta = \frac{1}{\alpha \cdot \gamma}$. Vadinasi, $\alpha\beta\gamma = 1$.

4 uždavinys (Čevos teorema). *Jeigu taškai A_1, B_1 ir C_1 yra trikampio ABC kraštinėse BC, CA ir AB, tai tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 (jos vadinamos čevianomis) kertasi viename taške tik tada, kai*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Šios teoremos būtinumas išplaukia iš 3-ojo uždavinio 2) dalies. Remdamiesi prieštaros metodu, pakankamumą įrodykite savarankiškai.

5 uždavinys. *Remdamiesi Čevos teorema ir 3 uždavinio 1) dalimi, įrodykite, kad trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške, ir raskite, kokiu santykiu šis taškas jas dalija pradedant nuo viršūnės.*



Sprendimas. Kraštinių ilgius pažymėkime $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, o pusiaukampines atitinkamai — AA_1, BB_1, CC_1. Pagal pusiaukampinių savybę gauname:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}, \qquad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c}.$$

Kadangi

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1,$$

tai pagal Čevos teoremą pusiaukampinės kertasi viename taške. Šį tašką pažymėkime raide F. Remdamiesi 3-ojo uždavinio 1) dalimi ($\gamma = \frac{b}{a}, \alpha = \frac{c}{b}, \beta = \frac{a}{c}$), gauname

$$\frac{AF}{FA_1} = \frac{b}{a}\left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{b+c}{a}.$$

Analogiškai įsitikiname, kad

$$\frac{BF}{FB_1} = \frac{a+c}{b}, \qquad \frac{CF}{FC_1} = \frac{a+b}{c}.$$

Pabandykite patys!

Sprendžiant šiuos uždavinius, Talio teorema labai pravers. Pamėginkite!

1. Trikampyje ABC taškas D kraštinę BC dalija santykiu $BD : DC = 1 : 2$, o taškas M atkarpą AD dalija santykiu $AM : MD = 3 : 2$. Per tašką M nubrėžta tiesė, kurios atstumai nuo trikampio viršūnių B ir C yra atitinkamai 5 cm ir 2 cm. Raskite šios tiesės atstumą nuo viršūnės A.

   Ats.: 6 cm.

2. Trapecijos pagrindų ilgiai yra a ir b ($a > b$). Atkarpos MN, lygiagrečios su pagrindais, galai yra trapecijos šoninėse kraštinėse, o jos ilgis lygus c. Įrodykite, kad:

   a) $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, kai MN dalija trapeciją į lygiaplotes dalis (atkarpos MN ilgis yra pagrindų ilgių kvadratinis vidurkis);

   b) $c = \frac{a+b}{2}$, kai MN — trapecijos vidurinė linija (MN ilgis yra pagrindų ilgių aritmetinis vidurkis);

   c) $c = \sqrt{ab}$, kai MN dalija trapeciją į dvi panašias trapecijas (MN ilgis yra pagrindų ilgių geometrinis vidurkis);

   d) $c = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, kai MN eina per įstrižainių susikirtimo tašką (MN ilgis yra pagrindų ilgių harmoninis vidurkis);

   e) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

3. Įrodykite, kad smailiojo trikampio ABC aukštinės susikerta viename taške F ir raskite, kokiu santykiu šis taškas jas dalija pradedant nuo viršūnės.

Ats.: $\frac{AF}{FA_1} = \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A}$, $\frac{BF}{FB_1} = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}$, $\frac{CF}{FC_1} = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}$.

4. Įrodykite, kad per trikampio ABC viršūnes nubrėžtos tiesės, dalijančios trikampio perimetrą pusiau, susikerta viename taške N (šis taškas vadinamas Nagelio tašku). Kokiu santykiu Nagelio taškas dalija minėtų tiesių atkarpas, esančias trikampyje?

Ats.: $\frac{AN}{NA_1} = \frac{2a}{b+c-a}$, $\frac{BN}{NB_1} = \frac{2b}{a+c-b}$, $\frac{CN}{NC_1} = \frac{2c}{a+b-c}$.

5. Trikampio ABC viduje yra taškas M. Tiesės AM, BM ir CM kerta trikampio kraštines atitinkamai taškuose A_1, B_1 ir C_1. Įrodykite, kad:

a) $\frac{CB_1}{B_1A} + \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CM}{MC_1}$ (Van Obelio teorema);

b) $\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1$;

c) $\frac{AM}{AA_1} + \frac{BM}{BB_1} + \frac{CM}{CC_1} = 2$.

6. Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas, kuris trikampio kraštines BC, AC ir AB liečia atitinkamai taškuose A_1, B_1 ir C_1. Įrodykite, kad atkarpos AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške G (tas taškas vadinamas Žergono tašku). Kokiu santykiu tas taškas dalija minėtas atkarpas?

Ats.: $\frac{AG}{GA_1} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}$, $\frac{BG}{GB_1} = \frac{b(p-b)}{(p-a)(p-c)}$, $\frac{CG}{GC_1} = \frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}$;
čia a, b, c — trikampio atitinkamų kraštinių ilgiai, p — trikampio pusperimetris.

7. Trikampio ABC $\angle A = 30°$, o $\angle B = 60°$. Trikampio pusiaukraštinė BD ir aukštinė CE kertasi taške O. Apskaičiuokite trikampių CDO ir BOE plotus, jei $S_{ABC} = 60\,\text{cm}^2$.

Ats.: $18\,\text{cm}^2$; $5\,\text{cm}^2$.

Besidomintys geometrija daugiau įdomių uždavinių gali rasti [2] ir [3] knygose.

1. *Matematika* 9. I *dalis*, TEV, Vilnius, 2000.
2. С.И. Зетель, *Новая геометрия треугольника*, УЧПЕДГИЗ, 1962.
3. Г.С.М. Кокстер, С.Л. Грейтцер, *Новые встречи с геометрией*, Наука, 1978.