$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 1, 57–60

Fraktalų dimensija

Alan F. Beardon

Visi žino, kad tiesė yra vieno matavimo, paviršius — dviejų, o mes gyvename trimatėje erdvėje. Mintis, jog dimensija gali būti ne sveikasis skaičius, atrodo, prieštarauja kasdienei patirčiai. Perskaitę straipsnį sužinosite, kad tokia gali būti fraktalų dimensija. Šis straipsnis paskelbtas elektroniniame matematikos žurnale „Mathematics Enrichment" (http://www.nrich.math.org.uk) ir jo leidėjams sutikus išverstas mūsų skaitytojams.

Objekto dimensija

Geriausias būdas nagrinėti aibės (tiesės intervalo, stačiakampio, dėžės ir pan.) dimensiją — patyrinėti, kaip keičiasi aibės didumas, kai mes ją vienodai visomis kryptimis išplečiame. Apskritai, kuo didesnė objekto dimensija, tuo labiau objektas didėja, kai visomis kryptimis tuo pačiu santykiu jis yra plečiamas. Pavyzdžiui, kvadrato, kurio kraštinės ilgis yra a, visas kraštines padidinę tuo pačiu daugikliu k, gausime kvadratą, kurio kraštinė lygi ka. Senojo ir naujojo kvadratų plotus atitinkamai pažymėję S_s ir S_n, gauname

$$S_s = a^2 \quad \text{ir} \quad S_n = (ka)^2 = k^2a^2,$$

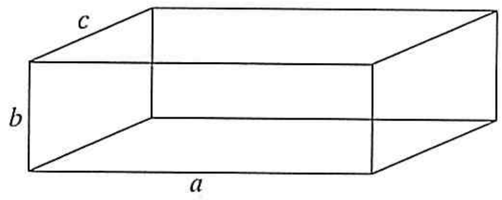
taigi

$$\frac{S_n}{S_s} = \frac{ka^2}{a^2} = k^2.$$

Atkreipkime dėmesį, kad santykis lygus k^2, t. y. ne k ir ne k^3, bet būtent k^2. Laipsnio rodiklis yra lygus objekto dimensijai (šiuo atveju kvadrato dimensija lygi 2). Patikrinkime šį dimensijos skaičiavimo būdą taikydami jį stačiakampiui. Jeigu stačiakampio kraštinių ilgiai yra a, b, a, b ir visomis kryptimis mes jas padididiname (arba sumažiname) daugikliu k, tai gauname stačiakampį, kurio kraštinės lygios ka, kb, ka, kb. Bet tada ir vėl gauname

$$\frac{S_n}{S_s} = \frac{(ka)(kb)}{ab} = k^2.$$

Tai rodo, kad stačiakampio dimensija irgi lygi dviems. Suprantama, mes visada tai žinojome, tačiau svarbu, kad radome būdą, kaip tai matematiškai įrodyti. Apsimeskime kuriam laikui, kad nežinome, kiek matavimų turi plyta, ir pažiūrėkime, ką gausime mūsų metodu. Tarkime, mūsų plytos kraštinių ilgiai yra a, a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, c. Štai kaip ta plyta atrodo:



Padidinę visas plytos kraštines tuo pačiu daugikliu k, gauname plytą, kurios kraštinių ilgiai yra ka, kb, kc. Šiuo atveju naujos plytos tūrį pažymėję V_n, o senosios — V_s, gauname:

$$\frac{V_n}{V_s} = \frac{(ka)(kb)(kc)}{abc} = k^3.$$

Iš šios formulės matyti, kad plytos dimensija lygi trims. Žinoma, tikros plytos mes negalime ištempti, tačiau galime įsivaizduoti, kad padarėme tai matematiškai. Yra daug veiksmų, kurių negalima atlikti tikrovėje, tačiau galima padaryti matematiškai. Pavyzdžiui, nors mes ir galime matyti kieto kūno atspindį veidrodyje, netgi galime parašyti matematinę atspindžio formulę, tačiau fiziškai juk negalime padaryti, kad kūno taškai sutaptų su atspindžio taškais. Atspindžio (x, y) plokštumos atžvilgiu taisyklę trimatėje erdvėje galime užrašyti taip: $(x, y, z) \to (x, y, -z)$.

Apžvelkime, ką jau sužinojome apie dimensiją. Tarkime, kad mokame matuoti objekto didumą (pavyzdžiui, ilgį, plotą arba tūrį). Matuojame prieš keisdami objekto matmenis ir juos pakeitę visomis kryptimis tuo pačiu daugikliu k. Senojo ir naujojo objektų didumus pažymėję atitinkamai D_s ir D_n, objekto dimensiją d gauname iš formulės

$$\frac{D_n}{D_s} = k^d. \tag{1}$$

Žinoma, šiuo požiūriu galime nagrinėti įvairius objektus, pavyzdžiui, spindulio r skritulį. Naujojo skritulio spindulys bus lygus kr. Pritaikę skritulio ploto formulę, gauname

$$\frac{S_n}{S_s} = \frac{\pi(kr)^2}{(\pi r^2)} = k^2,$$

čia S_n — naujojo skritulio plotas, S_s — senojo skritulio plotas, taigi skritulio dimensija lygi 2.

Štai dar vienas pavyzdys. Nagrinėkime spindulio sferą, prieš ją ištempiant:

- sferos spindulys lygus r,
- sferos paviršiaus plotas lygus $4\pi r^2$,
- rutulio, kurį riboja sfera, tūris yra $(4/3)\pi r^3$.

Po ištempimo spindulys, plotas ir tūris atitinkamai lygūs kr, $\pi k^2 r^2$ ir $(4/3)\pi k^3 r^3$. Taigi matome, kad sferos spindulio dimensija lygi 1, sferos paviršiaus lygi 2, rutulio — lygi 3. Mūsų matematinė dimensijos idėja gerai derinasi su intuityvia dimensijos samprata.

Objekto didumas

Norėdami rasti dimensiją, turime mokėti matuoti objekto didumą. Jeigu tempiant koeficientu k objektą jo didumas padidėtų daugikliu $k^{3/2}$, tai tokio objekto dimensija būtų 3/2. Ar yra tokių objektų? Taip, yra, bet prieš pradėdami juos tyrinėti, aptarkime detaliau, ką reiškia sąvoka „objekto didumas". Mes visi manome, kad suprantame, kas yra ilgis, plotas ir tūris, tačiau iš tiesų šios sąvokos yra daug sudėtingesnės negu mums gali atrodyti.

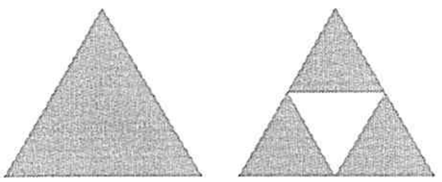
Norėdami šias idėjas nagrinėti matematiškai, turime aptarti, pavyzdžiui, kas yra bet kokios figūros plotas. Jei ši figūra (objektas) yra plokštumoje ir taisyklingos formos, tai figūrą galime padengti kvadratais (galbūt skirtingais), sudėti šių kvadratų plotus ir teigti, kad ši suma ir yra mūsų figūros plotas. Šis metodas gerai tinka paprastoms figūroms, tačiau norėdami išplėtoti tikrą matematinę teoriją, turėtume išmokti rasti įvairių aibių plotus, kad ir kaip jos atrodytų sudėtingos ir keistos. Iš tikrųjų tiksliai apibrėžti, kas yra plotas (ilgis ir tūris), gana sudėtinga, daugumai žmonių visam gyvenimui užtenka iš patirties įgytų žinių apie tai. Tačiau matematiko darbas yra padėti šioms (ir daugeliui kitų) idėjoms tvirtą pagrindą. Pasirodo, kad tyrinėdami ilgį, plotą ar tūrį mes kartu mokomės matuoti bet kokios dimensijos objektus. Kitais žodžiais tariant, tam tikra (gana sudėtinga) matematikos sritis mums tiksliai nurodo, kas yra bet kokios dimensijos objekto „didumas"! Kadangi ši matematinė teorija nagrinėja, kaip matuoti daiktus, tai ji taip ir vadinasi — *mato teorija*.

Žinoma, šios teorijos čia neįmanoma išdėstyti, todėl tenka patikėti, kad įmanoma matuoti bet kokios dimensijos objektų didumą. Tuo patikėjus, skaičiuoti fraktalų dimensijas gana paprasta. Tai mes dabar ir darysime.

Keleto fraktalų dimensija

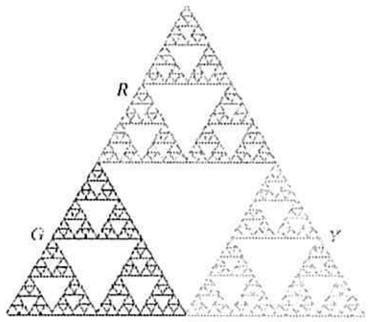
Mes apskaičiuosime dviejų fraktalų — Sierpinskio nėrinio ir Kantoro aibės dimensijas. Kelių fraktalų dimensijas jūs galėsite rasti patys ir pasitikrinti savo atsakymus.

Sierpinskio nėrinys. Norėdami šį fraktalą sukonstruoti, pradėkime nuo lygiakraščio trikampio. Padalykime jį į keturis lygius ir lygiakraščius trikampius ir išpjaukime vidurinįjį. Kartokime tą pačią procedūrą su visais likusiais trikampiais, po to su likusiais trikampiais vėl ir vėl.



Išpjaudami trikampius pašaliname tik jų vidų, *trikampio kraštinės pasilieka*! Sierpinskio nėrinys, kurį žymėsime S, yra aibė, likusi iš pirmojo trikampio po be galo daugelio žingsnių skaičiaus.

Padalykime aibę S į tris dalis, kurias žymėkime R, G ir Y. Čia R — tai toji fraktalo S dalis, kuri yra viršutiniame lygiakraščiame trikampyje, gautame po pirmojo žingsnio. Visos trys dalys nurodytos brėžinyje. Įsidėmėkite, kad R nėra viršutinis lygiakraštis trikampis, bet S dalis, esanti šiame trikampyje.



Iš brėžinio aiškiai matyti, kad kiekviena iš aibių R, Y ir G yra du kartus sumažintos viso fraktalo S kopijos, taigi daugiklis $k = \frac{1}{2}$. Objekto didumą pažymėkime D. Vadinasi, jeigu d yra šio fraktalo dimensija (kol kas nežinome, kam lygu d, kaip tik tai mes ir norime rasti), tai turi būti

$$D(R) = \left(\frac{1}{2}\right)^d D(S), \qquad D(Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^d D(S),$$
$$D(G) = \left(\frac{1}{2}\right)^d D(S).$$

Kadangi turi būti

$$D(S) = D(R) + D(Y) + D(G),$$

tai gauname

$$D(S) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^d D(S).$$

Jeigu dydis $D(S) \neq 0$ (tuo irgi teks patikėti be įrodymo), tai padaliję iš šio skaičiaus abi lygybės puses gautume

$$1 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^d, \quad \text{arba} \quad 2^d = 3. \qquad (2)$$

Taigi parodėme, kad Sierpinskio nėrinio dimensija d yra (2) lygties sprendinys. Tačiau kaip rasti d reikšmę? Galima ieškoti apytikslės reikšmės bandymų būdu arba pasinaudoti logaritmais. Išlogoritmavę abi (2) lygybės puses, gauname

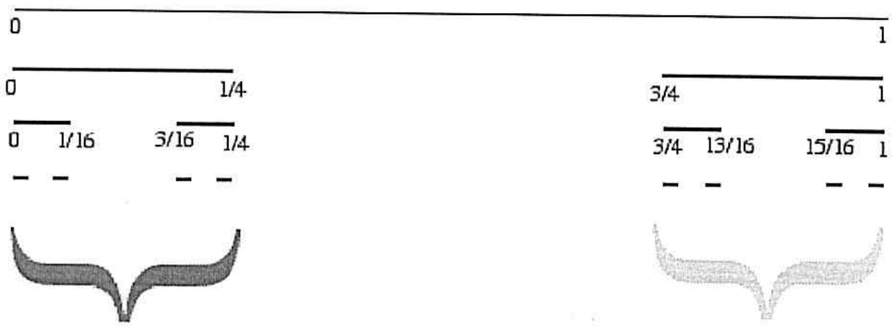
$$d \lg 2 = \lg 3,$$

arba

$$d = \frac{\lg 3}{\lg 2} = 1{,}5849\ldots.$$

Kantoro aibė. Šis fraktalas atrodo tarsi dulkės tiesėje, jo dimensija yra tarp 0 ir 1. Pradėkime nuo intervalo, kurio galai sutampa su taškais 0 ir 1 (jie priklauso intervalui). Iš paties vidurio išpjaukime pusę intervalo, kad liktų du intervalai: vieno galai taškuose 0 ir $\frac{1}{4}$, kito intervalo galai taškuose $\frac{3}{4}$ ir 1. Intervalų galai lieka neišpjauti. Pakartokime tą pačią pjovimo procedūrą su likusiais dviem intervalais, po to — su likusiais keturiais ir taip toliau. Atlikus be galo daug tokių žingsnių, vis tiek kai kurie taškai liktų (pavyzdžiui, mes niekada neišpjautume taškų $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, ...), jie atrodytų tarsi dulkės ant tiesės. Pažymėkime šią aibę C (vok. *Cantor*; Kantoras sukūrė aibių teoriją, taip pat nagrinėjo ir šią aibę).

Pirmieji aibės C konstrukcijos žingsniai parodyti paveiksle. Tą aibės C dalį, kuri yra tarp 0 ir $\frac{1}{4}$ (imtinai), pažymėkime R, o dalį tarp $\frac{3}{4}$ ir 1 pažymėkime Y. Pastebėkime, kad R ir Y yra sumažintos aibės C kopijos, mažinimo koeficientas $k = \frac{1}{4}$.



Samprotaudami kaip anksčiau, gauname

$$D(C) = D(R) + D(Y) =$$
$$= (\frac{1}{4})^d D(C) + (\frac{1}{4})^d D(C) =$$
$$= 2(\frac{1}{4})^d D(C).$$

Padarę prielaidą, kad $D(C) \neq 0$, gautume $4^d = 2$. Kadangi $4^d = (2^2)^d = 2^{2d}$, tai $2d = 1$, ir C dimensija lygi $\frac{1}{2}$.

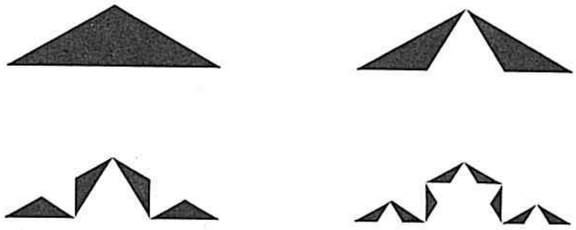
Dar keli pavyzdžiai

Pabandykite čia aprašomų fraktalų dimensijas rasti savarankiškai. Kad galėtumėte pasitikrinti, nurodyti ir atsakymai.

Sierpinskio kilimas. Pradėkime nuo vienetinio kvadrato. Padalykime jį į devynis vienodus kvadratėlius ir pašalinkime vidurinįjį (kvadratėlio sienų neišpjauname). Po to tą pačią operaciją pakartokime su likusiais aštuoniais kvadratėliais. Po be galo daug žingsnių gausime fraktalą, kuris vadinamas Sierpinskio kilimu.

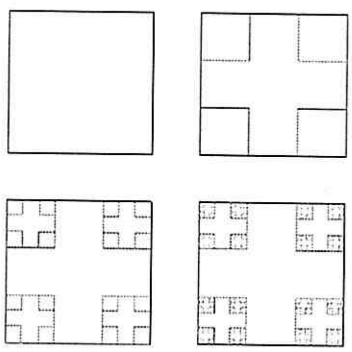
Sierpinskio kilimo dimensija lygi 1,8927... .

Kocho kreivė. Pradėkime nuo lygiašonio trikampio, kurio viršūnės kampas lygus 120 laipsnių. Išpjovę iš šio trikampio vidurio lygiakraštį trikampį, gauname dvi sumažintas pradinio trikampio kopijas. Kartokime veiksmą su gautaisiais trikampiais. Keli žingsniai parodyti paveikslėlyje. Po be galo daug žingsnių gauname fraktalą, kuris vadinamas Kocho kreive.



Kocho kreivės dimensija lygi 1,2619... .

Kvadrato-kryžiaus fraktalas. Pradėkime nuo vienetinio kvadrato. Iš jo išpjovus $\frac{1}{3}$ pločio „centrinį kryžių", liks keturi kvadratai, kurių kiekvieno kraštinė lygi $\frac{1}{3}$. Iš šių mažesniųjų kvadratų taip pat išpjaukime po kryžių ir pakartokime procedūrą su kiekvienu iš likusiųjų šešiolikos kvadratėlių. Tai, kas lieka po be galo daug žingsnių, pažymėkime F. Tai ir mūsų fraktalas. Ar sugebėsite rasti šio fraktalo dimensiją? Ji lygi 1,2619... .



Dar vienas Kantoro fraktalas. Šis fraktalas konstruojamas taip pat kaip ir Kantoro aibė, tačiau kiekvienu žingsniu iš intervalo vidurio išpjauname ne pusę, bet trečdalį. Po be galo daug žingsnių gaunamo fraktalo dimensija lygi 0,63093... .