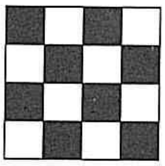
$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 1, 114–118

Sprendimai

Languota lenta ir truputėlis algebros

ε. 83

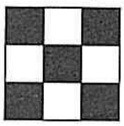


Lenta padalyta į 16 langelių, kaip parodyta paveiksle. Vienu ėjimu galima pakeisti pasirinktos eilutės (arba) stulpelio langelių spalvą: juodi langeliai tampa baltais, balti — juodais. Ar įmanoma po baigtinio skaičiaus langelių pasiekti tokią padėtį, kad tik vienas lentos langelis būtų juodas?

Pirmuoju ėjimu baltųjų ir juodųjų langelių skaičiaus nepakeisime: $8+8=8+8$. Tačiau po antrojo ėjimo jau gali būti $6+10$ arba $10+6$. Sprendimo rakto ilgai ieškoti nereikia: po bet kokio ėjimo baltųjų ir juodųjų langelių skaičiai išlieka lyginiai, taigi neįmanoma pasiekti, kad liktų tik vienas juodas langelis.

O kaip būtų su 3×3 juodų ir baltų langelių lenta? Patyrinėję galime greitai gauti derinius $4+5, 5+4, 3+6, 6+3, 9+0, 0+9$, tačiau deriniai $1+8$, $8+1$ vis nepasirodo. Ar tikrai tokių derinių negalima gauti?

1	2	3
4	5	6
7	8	9



$l=(1,0,1,0,1,0,1,0,1)$

1 pav.

Kai kalbama apie juoda ir balta, matematikai dažniausiai pagalvoja apie vienetą ir nulį. Sunumeravę langelius ir susitarę žymėti juodą langelį vienetu, o baltą nuliu, galėsime 3×3 lentą nusakyti devynių skaičių rinkiniu (vektoriumi) $l_0=(1,0,1,0,1,0,1,0,1)$ (1 pav.).

Kaip keičiasi šis vektorius, kai atliekame ėjimą su eilute arba stulpeliu? Matematikoje dažnai naudojama sudėtis moduliu 2, t. y. $0\oplus 0=0, 0\oplus 1=1\oplus 0=1, 1\oplus 1=0$. Naudodami šią operaciją, ėjimą su pirmąja eilute galime nusakyti taip: prie lentą nusakančio vektoriaus l komponenčių reikia pridėti (moduliu 2) atitinkamas rinkinio $e_1=(1,1,1,0,0,0,0,0,0)$ komponentes. Dabar jau galime žengti dar vieną žingsnį ir ėjimus apibūdinti taip: atlikdami ėjimą su i-ąja eilute prie lentą nusakančio vektoriaus l komponenčių turime pridėti (naudodami sudėtį moduliu 2) atitinkamas vektoriaus e_i komponentes; atlikdami ėjimą su j-uoju stulpeliu — pridedame vektoriaus s_j komponentes. Šie vektoriai atrodo taip:

$$\begin{aligned} e_1&=(1,1,1,0,0,0,0,0,0), & s_1&=(1,0,0,1,0,0,1,0,0),\\ e_2&=(0,0,0,1,1,1,0,0,0), & s_2&=(0,1,0,0,1,0,0,1,0),\\ e_3&=(0,0,0,0,0,0,1,1,1), & s_3&=(0,0,1,0,0,1,0,0,1). \end{aligned}$$

Dabar jau galime suformuluoti tokį teiginį: iš pradinės lentos, aprašomos vektoriumi l_0, galime gauti lentą, aprašomą vektoriumi u, tada ir tik tada, kai atsiras tokie skaičiai $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ (nuliai arba vienetai), kad

$$l_0 \oplus x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus x_3 e_3 \oplus y_1 s_1 \oplus y_2 s_2 \oplus y_3 s_3 = u,$$

arba

$$x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus x_3 e_3 \oplus y_1 s_1 \oplus y_2 s_2 \oplus y_3 s_3 = u \oplus l_0; \qquad (1)$$

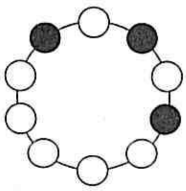
čia $\oplus$ žymime vektorių sudėtį, kai moduliu 2 sudedamos atitinkamos komponentės, o $x_i e_i$ (arba $y_j s_j$) reiškia, kad visos e_i (s_j) komponentės dauginamos iš x_i (y_j).

Tačiau kaip nustatyti, kada (1) lygybė įmanoma, kada ne? Sulyginę kairiosios ir dešiniosios pusių vektorių komponentes, gauname devynių lygčių sistemą su šešiais nežinomaisiais $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, kurie gali būti lygūs vienetui arba nuliui. Sistemą galima spręsti, pavyzdžiui, nežinomųjų eliminavimo būdu ir rasti sprendinį arba nustatyti, kad jo nėra. Šitaip galima parodyti, kad deriniai $1+8, 8+1$ iš tiesų neįmanomi. Galima ir tiesiog išnagrinėti visus 2^6 galimus skaičių x_i ir y_j parinkimo atvejus.

Galbūt tai perdaug sudėtinga paprastai 3×3 dydžio lentai? Tikriausiai. Tačiau skaitytojas turbūt pastebėjo, kad taip tyrinėti galime bet kokias juodų ir baltų langelių lentas, nebūtinai kvadratines.

V. Gylys

Juodi ir balti karoliukai

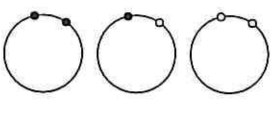


ε. 84

Piešinyje pavaizduotas apskritimas, ant kurio suverti karoliukai. Viena karoliukų pusė balta, kita juoda. Galima pašalinti bet kurį juodą karoliuką, tačiau tada gretimi du (vienas, jei daugiau nėra) atverčiami kita puse (keičia spalvą). Ar galima laikantis šios taisyklės pašalinti visus karoliukus?

Kas pabandė, tas tikriausiai ir pašalino. O kaip būtų tuomet, kai karoliukų skaičius ir išsidėstymas būtų kitas?

Panagrinėkime dviejų karoliukų vėrinį. Štai visi galimi atvejai (2 pav.). Akivaizdu, kad karoliukus galima pašalinti tik vienu atveju — kai tik vienas iš dviejų karoliukų yra baltas.



2 pav.

Kaip kinta baltų karoliukų skaičius, kai šaliname juoduosius? Arba dvejetu sumažėja, arba dvejetu padidėja, arba lieka tiek pat. Taigi jei pradiniame vėrinyje baltų karoliukų skaičius yra nelyginis, tai toks liks ir po kiekvieno žingsnio. Todėl galime suformuluoti tokį teiginį:

Jeigu galima karoliukų skaičių vėrinyje sumažinti iki dviejų, tai visus karoliukus galima pašalinti tada ir tik tada, kai baltųjų karoliukų skaičius pradiniame vėrinyje yra nelyginis.

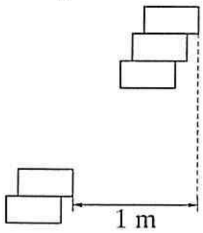
Įsitikinsime, kad vėrinio su nelyginiu baltų karoliukų skaičiumi karoliukų skaičių galima sumažinti iki dviejų visada, kai tik galima pradėti, t. y. pradiniame vėrinyje yra nors vienas juodas.

Pasitelkime matematinę indukciją. Tegu karoliukų skaičius $n = 3$ ir bent vienas iš jų yra juodas. Tada juodų turi būti tik du. Pašalinę bet kurį iš jų, gausime vėrinį iš dviejų karoliukų. Tegu teiginys teisingas, kai $n = m$. Nagrinėkime vėrinį iš $n = m + 1$ karoliukų, bent vienas iš jų yra juodas ($n > 3$). Šalindami juodąjį karoliuką, gausime vėrinį iš m karoliukų. Juodų karoliukų jame gali nelikti tik vienu atveju — kai jų yra tik trys ir šaliname vidurinįjį. Tad taip nedarykime! Šalinkime vieną iš kraštinių, ir viskas bus gerai — gausime m karoliukų vėrinį, kuriame nors vienas karoliukas yra juodas, o baltų — nelyginis skaičius.

Taigi įrodėme tokį teiginį: jeigu pradiniame vėrinyje yra juodų karoliukų, o baltųjų karoliukų skaičius yra nelyginis, tai po baigtinio ėjimų skaičiaus galime gauti vien tik vėrinio virvelę.

V. Gylys

Statyba be skiedinio

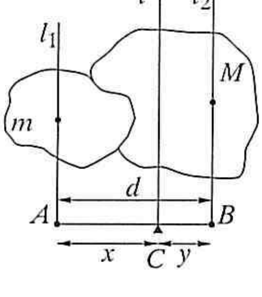


ε. 87

Plytos yra 20 cm ilgio ir 10 cm aukščio. Jos dedamos viena ant kitos, nenaudojant skiedinio. Kokio mažiausio aukščio bokštą galėtume pastatyti, kad jo viršūnė būtų pasislinkusi pagrindo atžvilgiu 1 m?

Nors matematikos šiam uždaviniui išspręsti reikia nedaug, tačiau reikia šį tą išmanyti apie svorių centrus.

Tarkime, masės m kūno svorio centras yra tiesėje l_1, o masės M kūno — su šia tiese lygiagrečioje tiesėje l_2 (3 pav.). Raskime su šiomis tiesėmis lygiagrečią tiesę l, kurioje yra iš abiejų kūnų sudarytos sistemos svorio centras. Įsivaizduokime svertą AB, tašką A spaudžia išilgai l_1 masės m kūnas, tašką B — masės M kūnas. Kad svertas būtų pusiausvyroje, reikia įtaisyti atramą taške C. Šio taško atstumus iki A, B pažymėkime atitinkamai x ir y. Pusiausvyros lygtis $xm = yM$; $x + y = d$ yra atstumas tarp tiesių l_1 ir l_2. Tad nesunkiai gauname:

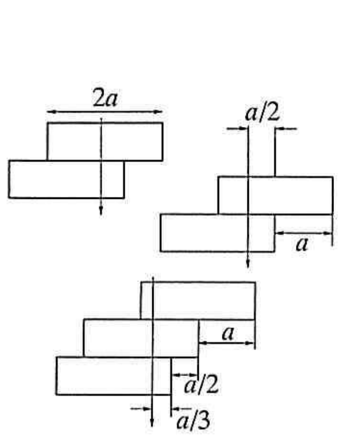


3 pav.

$$x = d\frac{M}{m + M}, \qquad y = d\frac{m}{m + M}.$$

Taigi tiesę l turime nubrėžti taip, kad jos atstumų iki l_1 ir l_2 santykis būtų $M : m$.

Dabar jau imkimės uždavinio (4 pav.). Pažymėkime plytos aukštį a ($a = 10$), tada plytos ilgis yra $2a$. Statinys iš dviejų plytų nesugrius, jei tiesė, einanti per viršutinės plytos svorio centrą statmenai paviršiui, pataikys į apatinės plytos pagrindą. Aišku, kad viršutinę plytą apatinės atžvilgiu daugiausiai galime paslinkti per a. Tiesė, einanti per šitaip sudėtų dviejų plytų bendrą svorio centrą statmenai paviršiui. Taigi statydami statinį iš trijų plytų daugiausiai galime paslinkti trečiąją plytą antrosios atžvilgiu per $a/2$. Tada viršutinė plyta bus pasislinkusi apatinės atžvilgiu per $a + a/2$. Suradę tiesę, kurioje yra bendras trijų plytų statinio svorio centras, nustatysime, kur šioje keistoje statyboje „nuo viršaus“ padėti apatinę ketvirtąją plytą.



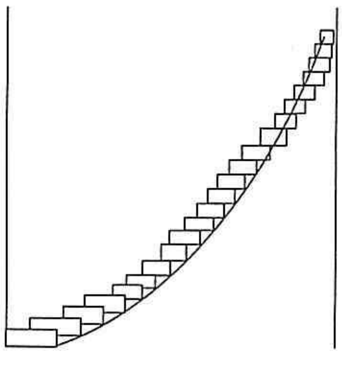
4 pav.

Jeigu šitaip „nuo viršaus“ statysime statinį iš n plytų, tai viršutinė plyta apatinės atžvilgiu daugiausiai galės būti paslinkta dydžiu

$$S(n) = a + \frac{a}{2} + \cdots + \frac{a}{n-1} = a\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\Big).$$

Atsakymą į uždavinio klausimą gausime radę mažiausią n, tenkinantį nelygybę

$$S(n) \geqslant 10a, \quad \text{arba} \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \geqslant 10.$$


5 pav.

Iš tiesų pabandžius tai padaryti, galima teisėtai pyktelėti, kad uždavinys pateiktas ϵ uždavinių skyriuje, nes n reikšmė yra labai jau didelė. Prisipažinsiu, kad radau jį, pasinaudojęs kompiuteriu: $n = 12367$. Taigi kad pasislinktume per metrą, turime pastatyti bokštą, aukštesnį nei 1 kilometras.

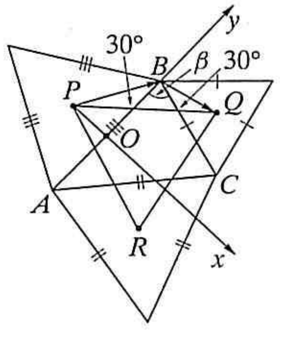
Beje, matematine indukcija galima nesunkiai įrodyti, kad $S(2^m) > m/2$. Tai reiškia, kad keistus laiptus tarp dviejų vertikalių sienų galima pastatyti visai be skiedinio, net jei tos sienos ir labai toli viena nuo kitos (5 pav.). Tiesa, tai būtų veikiau laiptai į dangų.

V. Stakėnas

Napoleono teorema ar tik kepurė?

α. 170
◊◊◊

Ant trikampio ABC kraštinių nubrėžti lygiakraščiai trikampiai, P, Q, R yra šių trikampių centrai. Pabandykite pastebėti ir įrodyti kokią nors trikampio PQR savybę.



6 pav.

Kas įdėmiau pasižiūrėjo į brėžinį, tas tikriausiai greitai atspėjo, ką reikia įrodyti: trikampis PQR yra lygiakraštis. Tačiau kažin ar kam pavyko tai paprastai įrodyti? Neradau itin paprasto būdo ir aš. Tada tiesiog nusprendžiau apskaičiuoti vienos iš trikampio PQR kraštinių ilgį. Bet kaip tai padaryti? Nusprendžiau įvesti plokštumoje koordinačių sistemą ir pasinaudoti vektoriais. Kiek pasvarstęs nukreipiau koordinačių sistemos ašis, kaip parodyta 6 paveiksle: taškas O dalija kraštinę AB pusiau, tiesė Ox statmena AB, o Oy eina išilgai AB.

Tegu $\vec{u} = \vec{PQ}$, $\vec{v} = \vec{PB}$, $\vec{w} = \vec{BQ}$. Tada $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$. Pažymėkime $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\beta = \angle ABC$ ir Ox bei Oy ašių vienetinius vektorius $\vec{i}$, $\vec{j}$.

Nesunkiai randame:

$$v = PB = \frac{(c/2)}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sqrt{3}}, \qquad w = BQ = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Taigi

$$\vec{v} = (v\cos 60^\circ)\vec{i} + (v\sin 60^\circ)\vec{j} = \frac{c}{2\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{c}{2}\vec{j}.$$

Vektorius $\vec{w} = \vec{BQ}$ sudaro su Oy ašimi kampą $\beta + 30^\circ$, todėl

$$\vec{w} = w\sin(\beta+30^\circ)\vec{i} - w\cos(\beta+30^\circ)\vec{j} = \\ = \frac{a}{\sqrt{3}}\sin(\beta+30^\circ)\vec{i} - \frac{a}{\sqrt{3}}\cos(\beta+30^\circ)\vec{j}.$$

Taigi

$$\vec{u} = \Big(\frac{c}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}}\sin(\beta+30^\circ)\Big)\vec{i} + \Big(\frac{c}{2} - \frac{a}{\sqrt{3}}\cos(\beta+30^\circ)\Big)\vec{j}.$$

Dabar jau galime skaičiuoti u^2. Pasitelkę šiek tiek trigonometrijos, randame

$$u^2 = \Big(\frac{c}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}}\sin(\beta+30^\circ)\Big)^2 + \Big(\frac{c}{2} - \frac{a}{\sqrt{3}}\cos(\beta+30^\circ)\Big)^2 = \\ = \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{ac}{3}\cos\beta + \frac{ac\sin\beta}{\sqrt{3}}.$$

Iki tikslo liko vos vienas žingsnelis. Paskutinį sumos narį galime išreikšti per trikampio plotą, nes $ac\sin\beta = 2S_{\triangle ABC}$.

Iš kosinusų teoremos gauname:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \qquad \frac{ac}{3}\cos\beta = \frac{b^2}{6} - \frac{a^2}{6} - \frac{c^2}{6},$$

taigi

$$u^2 = \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2S_{\triangle ABC}}{\sqrt{3}}.$$

Kadangi u^2 reiškiamas per a, b, c simetriškai, tai tą patį gautume vietoje $\vec{u} = \vec{PQ}$ nagrinėdami vektorius $\vec{QR}$, $\vec{PR}$. Taigi trikampis PQR yra lygiakraštis.

Kodėl ši teorema vadinama Napoleono teorema? Gal lygiakraštis trikampis primena trikampę imperatoriaus kepurę? Štai ką šiek tiek paieškojus pavyko sužinoti. Pirmą kartą šią teoremą 1825 metais paskelbė W. Rutherfordas. Tačiau ji buvo iš naujo atradinėjama ir vėliau, taigi tikriausiai buvo žinoma ir iki tol.

Nėra jokių neginčytinų įrodymų, kad Napoleonas būtų šią teoremą įrodęs pats. Tačiau jo biografai rašo, kad mokykloje Napoleonui matematika puikiai sekėsi... Galbūt jis būtų laimėjęs ne vieną matematinę pergalę, jei kitokios pergalės nebūtų rūpėję labiau.

V. Stakėnas