$\alpha + \omega$, 2001, Nr. 1, 102–113

Kiekvieno „Alfa plius omega“ numerio uždavinių skyriuje skelbsime trijų lygių uždavinius.

Epsilon (ε) uždaviniai — matematiniai galvosūkiai, mįslės, loginiai uždaviniai.

Alfa (α) uždaviniams išspręsti pakaks mokyklinės matematikos žinių.

Omega (ω) skyrelyje skelbsime užduotis, kurioms kartais prireiks daugiau žinių, nei reikalaujama mokykloje.

Savo sprendimus siųskite adresu: „Alfa plius omega“ redakcija, Akademijos g. 4, LT-2600, Vilnius.

Šiam numeriui parinkome uždavinių iš įvairių šalių matematikų olimpiadų ir konkursų.

Championnat international des jeux mathématiques et logiques

Tarptautinis matematinių ir loginių žaidimų čempionatas romanų šalyse (dabar čempionate dalyvauja: Prancūzija, Belgija, Šveicarija, Italija, taip pat — Lenkija, Tunisas, Nigerija) rengiamas nuo 1987 metų. Kaip sako jo organizatoriai, jame gali dalyvauti visi norintys nuo 9 iki 99 metų. Dalyviai pagal amžių skirstomi į septynias kategorijas. Paskutinės kategorijos skirtos suaugusiems.

Čempionatas, kaip ir dera tikram čempionatui, vyksta keturiais etapais: ketvirtfinaliai, vietiniai pusfinaliai, vietiniai ir nacionaliniai finalai, tarptautinis finalas). Pabandykite išspręsti pirmųjų kategorijų 10 uždavinių, parinktų iš kelių paskutinių metų čempionatų pradinių kategorijų užduočių.

ε. 93

Pašto kodas. Mišelis nepanoro pasakyti, koks jo miesto pašto kodas. Tačiau jis pasakė apie tą kodą štai ką:

- kaip ir visur kitur, Prancūzijoje kodas sudarytas iš penkių skaitmenų;
- pirmojo ir antrojo skaitmenų suma lygi 17;
- antrojo ir trečiojo skaitmenų suma lygi 15, tą patį gausite sudėję trečiąjį ir ketvirtąjį skaitmenis;
- dviejų paskutinių skaitmenų suma lygi 9;
- pirmojo ir paskutinio skaitmenų suma lygi 8.

Koks Mišelio miesto pašto kodas?

ε. 94

Obuoliai ir kriaušės. Mišelis ir Patrikas pakvietė septynis draugus pietų. Desertui jie nusprendė priskinti obuolių ir kriaušių. Abu žino, kad daugiau kaip 7 kilogramų jie abu negalės parnešti, nes sodas yra gana toli. Kriaušė sveria 200 gramų, o obuolys — 300 gramų. Mišelis ir Patrikas norėtų, kad kiekvienas iš svečių turėtų galimybę pasirinkti kriaušę arba obuolį. Kiek daugiausiai vaisių jie gali parsinešti iš sodo?

$\varepsilon.\,95$

◊◊◊

Puslapių numeriai. Numeruojant sąsiuvinio puslapius nuo vieneto, Odriui prireikė du kartus daugiau skaitmenų, negu sąsiuvinis turi puslapių. Kiek puslapių turi tas sąsiuvinis?

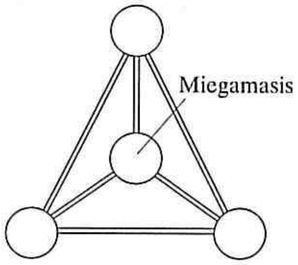
$\varepsilon.\,96$

◊◊◊

Numerių painiava. Per paskutines rungtynes prieš krepšinio finalą tribūnose pastebėjome komandos, su kuria mums teks žaisti, šnipą. Jis žymėjosi ant popieriaus mūsų komandos taktiką. Nutarėme jo surinktą informaciją padaryti bevertę. Kiek yra galimybių mūsų žaidėjams susikeisti numeriais, kad nė vienas iš jų negautų savo numerio?

$\varepsilon.\,97$

◊◊◊



Miro maisto atsargos. Miro yra kurmis, jis turi urvą, kurį sudaro keturios ertmės, sujungtos šešiais koridoriais. Vienoje iš šių ertmių Miro miega, likusiose trijose laiko maisto atsargas (sliekus). Kadangi kurmio atmintis tokia pat prasta kaip ir jo regėjimas, tai kiekviename koridoriuje jis pasideda tiek akmenėlių, koks yra skirtumas tarp didesniojo ir mažesniojo sliekų skaičių tose ertmėse, kurias koridorius jungia. Šiuo metu koridoriuose yra padėta atitinkamai 1, 2, 3, 4, 5, 6 akmenėliai. Kiek daugiausiai ir kiek mažiausiai sliekų gali turėti kurmis Miro?

$\varepsilon.\,98$

◊◊◊

Tūkstantmečio abėcėlė. Parašysime po vieną lygybę kiekvienai lotynų abėcėlės raidei:

$A = 2000,$

$B = A - 999,$

$C = A + B - 998,$

$D = A + B + C - 997,$

....

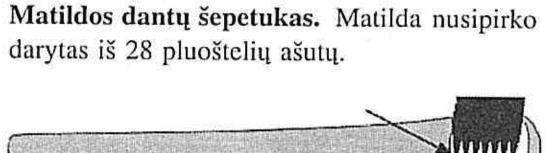
$Z = A + B + C + \cdots + Y - 975.$

Kam lygi Z reikšmė?

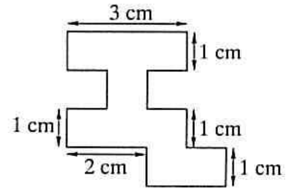
$\varepsilon.\,99$

◊◊◊

Matildos dantų šepetukas. Matilda nusipirko dantų šepetuką, kuris padarytas iš 28 pluoštelių ašutų.

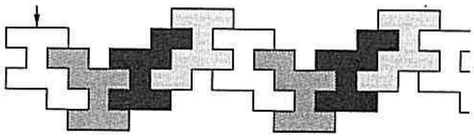


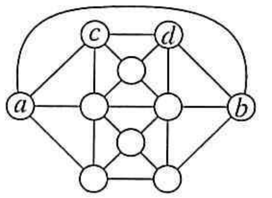
Visuose šiuose pluošteliuose yra po skirtingą ašutų skaičių, iš viso jų yra 600. Kiek mažiausiai ašutų yra pluoštelyje, nurodytame strėle, jei žinoma, kad šiame pluoštelyje jų yra daugiausiai?



ε. 100

Taisyklinga dėlionė. Tomas iškirpo 40 vienodų štai tokios formos figūrų ir ėmė jas dėlioti taip, kaip parodyta žemiau. Koks bus jo sudėtos figūros perimetras, kai jis baigs darbą?

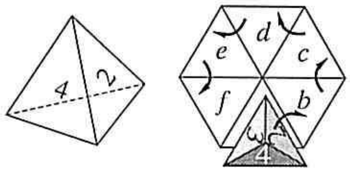




ε. 101

Šeimininkės pintinė. Į pintinės skritulėlius surašykite skaičius 0, 1, 2, ..., 9, kad būtų tenkinamos tokios sąlygos:

- skaičių, užrašytų sujungtuose viena briauna skrituliukuose, skirtumas ne mažesnis už 3;
- $a > b$;
- $c + d = 10$.

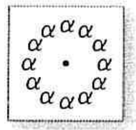


ε. 102

Žaidimas su tetraedru. Tetraedro sienos pažymėtos skaičiais 1, 2, 3, 4. Tetraedras uždedamas ant šešiakampio taip, kad pažymėta 1 siena būtų ant raide a pažymėtos šešiakampio dalies, ir vartomas, kaip parodyta brėžinyje. Ant kokios sienos gulės tetraedras šešiakampio f dalyje?

ε. 103

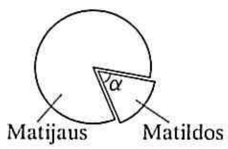
Septynios monetos. Septynios monetos suguldytos vienoje eilėje herbais į viršų. Kiekvienu žingsniu galima tris pasirinktas monetas atversti kita puse. Kiek mažiausiai žingsnių reikia, kad visos monetos būtų atverstos skaičiumi į viršų?



Championnat international des jeux mathématiques et logiques

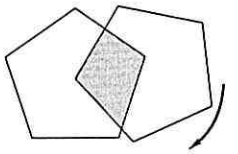
Uždavinius α.200 ir α.201 sprendė tarptautinio matematinių ir loginių žaidimų čempionato dalyviai 2000 metais, α.202 buvo sprendžiamas 1996 metais.

α. 200



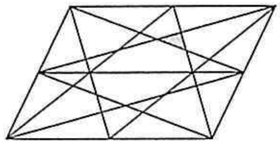
Du kūgiai. Mokytojas davė 20 cm skersmens skritulį, kurį Matijas ir Matilda sukarpė, kaip parodyta piešinyje, ir kiekvienas iš savo dalies suklijavo kūgį. Pasirodė, kad Matildos kūgis yra du kartus aukštesnis. Kam lygus kampas α?

α. 201



Pentagono radaras. JAV kariuomenės būstinė yra taisyklingo penkiakampio formos. Slaptosios tarnybos įrengė virš Pentagono radarą, kurio forma yra tokia pat kaip Pentagono stogas. Radaras sukasi apie vieną savo viršūnę, kuri yra tiksliai Pentagono stogo centre. Koks yra didžiausias stogo plotas (pilkai nudažyta dalis), kurią gali uždengti radaras?

α. 202



Žaidėjų planeta. Šioje idiliškoje planetoje gyvena 12 000 gyventojų, kiekvienas turi savo mėgstamą žaidimą. Kai kurie žaidžia kortomis, yra aistringų šachmatininkų, pianistų ir pan. Šios žaidimų planetos vėliava yra lygiagretainio formos, lygiagretainis padalytas į sritis, kurių plotai proporcingi atitinkamos rūšies žaidėjų skaičiui. Pilka sritis vaizduoja matematinių žaidimų mėgėjus. Kiek jų yra? Lygiagretainio kraštinės atitinkami taškai dalija pusiau.

Colorado Mathematical Olympiad

Kolorado (JAV) matematikų varžybose kasmet dalyvauja nuo 600 iki 1000 dalyvių. Jų skaičius paprastai neribojamas. Dalyviai keturias valandas sprendžia 5 uždavinius. Šioje olimpiadoje labiausiai vertinamas idėjų originalumas, todėl smulkūs netikslumai darbo įvertinimui didelės įtakos nedaro. Olimpiadą remia dosnūs rėmėjai, taigi nugalėtojai gauna vertingus prizus: medalius, kompiuterius, stipendijas... Pabandykite išspręsti Kolorado matematikų olimpiados 2000 metų uždavinius.

α. 203

Gerasis ir blogasis. Gerasis ir Blogasis 2000 monetų pasidalijo šitaip. Pirmiausia Gerasis padalijo visas monetas į dvi krūveles (kiekvienoje iš jų — ne mažiau kaip dvi monetos). Po to Blogasis kiekvieną iš šių krūvelių padalijo dar į dvi krūveles ir pasiėmė sau pačią mažiausią ir pačią didžiausią iš keturių krūvelių. Koks didžiausias skaičius monetų, kurias gali gauti Gerasis?

α. 204

Akmens amžiaus žaidimai. a) Fredas Flinstonas ir Barnis Rublis pakaitomis ima akmenukus iš 2000 akmenukų krūvos. Vienu kartu jie gali paimti 1, 7 arba 13 akmenukų. Laimi tas, kuris paima paskutinį akmenuką. Fredas pradeda pirmas. Raskite strategiją, kuri garantuotų Fredui arba Barniui sėkmę.

b) Kokia būtų pergalinga strategija, jeigu vienu kartu būtų galima paimti 1, 2, 7 arba 13 akmenukų?

α. 205

Dar apie akmens amžiaus žaidimus. a) Fredas ir Barnis vienas po kito spalvina kvadratinių grindų, padalytų vienetiniais langeliais, kvadratėlius. Fredas spalvina raudonai, Barnis mėlynai. Vienu žingsniu galima nuspalvinti tik vieną langelį. Fredas laimi, jeigu jam pavyksta nuspalvinti raudonai penkių langelių kryžių (jį sudaro langelis kartu su keturiais gretimais), jeigu nepavyksta — laimi Barnis. Fredas pradeda. Raskite pergalingą strategiją vienam iš žaidėjų, t.y. būdą žaisti taip, kad pergalė būtų garantuota, nepriklausomai nuo to, kaip žais partneris.

b) Kokia būtų pergalinga strategija, jei kryžių pakeistume kvadratu?

α. 206

◇◇◇

Balandžių skrydis. a) 2000 balandžių tupi ant 2000 šakų, po vieną balandį ant kiekvienos šakos. Po to jie pakyla ir vėl nutupia ant tų pačių šakų, tačiau nė vienas nesugrįžta ant šakos, ant kurios anksčiau tupėjo. Grupę balandžių pavadinkime *klajūnų grupe*, jei nė vienas tos grupės balandis nesugrįžo ant šakos, ant kurios jau tupėjo kuris nors tos pačios grupės balandis. Įrodykite, kad visada egzistuoja klajūnų grupė iš 667 balandžių.

b) Įrodykite, kad balandžiai gali nutūpti taip, kad klajūnų grupės iš 668 balandžių nebūtų.

α. 207

◇◇◇

Tūkstantmetis ir kvadratai. Kvadratinės 2000×2000 lentelės kvadratėliuose surašyti realieji skaičiai. Kvadratėlyje, kuris yra i-ojoje eilutėje ir j-ajame stulpelyje, įrašytas skaičius a_{ij}. Visiems i, j, k teisinga lygybė $a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 1$. Įrodykite, kad atsiras 2000 skaičių $c_1, c_2, \ldots, c_{2000}$, kad visiems i ir j bus teisinga lygybė $a_{ij} = c_i/c_j$.

Lotynų Amerikos šalių matematikų olimpiada

Šioje olimpiadoje gali dalyvauti visos Pietų ir Centrinės Amerikos šalys, kuriose kalbama ispaniškai arba portugališkai, taip pat Meksika, Ispanija ir Portugalija. Tokių šalių yra 22. Taigi ši olimpiada pagal šalių-dalyvių skaičių yra antroji po Pasaulinės matematikų olimpiados. Pirmoji Lotynų Amerikos šalių olimpiada įvyko 1985 metais Kolumbijoje. Daugelyje šalių po to buvo organizuotos nacionalinės olimpiados.

Kaip ir Pasaulinėje olimpiadoje, dalyviai dvi dienas sprendžia po tris uždavinius, kiekvieną dieną sprendimui skiriama po keturias su puse valandos. Pateikiame 11-osios Lotynų Amerikos matematikų olimpiados (1996) pirmosios dienos uždavinius.

α. 208

◇◇◇

Raskite mažiausiąjį natūralųjį n, kad kubą, kurio kraštinės ilgis lygus n, būtų galima padalyti į 1996 kubus, kurių kraštinės yra taip pat natūralieji skaičiai.

α. 209

◇◇◇

Tegu trikampio ABC pusiaukraštinės AD vidurio taškas yra M (D yra kraštinėje BC). Tiesė BM kerta AC taške N. Įrodykite, kad AB liečia apibrėžtą apie trikampį NBC apskritimą tada ir tik tada, kai

$$\frac{BM}{MN} = \left(\frac{BC}{BN}\right)^2.$$

α. 210

◇◇◇

Lentelėje yra $k^2 - k + 1$ eilučių ir tiek pat stulpelių, čia $k = p + 1$, p yra pirminis skaičius. Kiekvienam p raskite būdą surašyti skaičius 0 ir 1, kad būtų tenkinamos tokios sąlygos:

a) kiekvienoje eilutėje yra k nulių;

b) kiekviename stulpelyje yra k nulių;

c) nėra stačiakampio, kurio kraštinės būtų lygiagrečios su lentelės kraštinėmis, o viršūnėse būtų įrašyti nuliai.

Pietų Amerikos matematikų olimpiada (*South Cone Mathematical Olympiad*)

Šiose olimpiadose dalyvauja Argentinos, Bolivijos, Brazilijos, Čilės, Paragvajaus, Peru ir Urugvajaus moksleiviai, ne vyresni kaip 15 metų. Ši olimpiada organizuota tam, kad moksleiviai galėtų geriau pasiruošti didesnėms matematikų varžyboms: Lotynų Amerikos šalių bei Pasaulinei matematikų olimpiadai. Pabandykite išspręsti 1999 metų antrosios dienos olimpiados uždavinius.

α. 211

◇◇◇

Raskite mažiausiąjį sveikąjį skaičių n, kad visos 73 trupmenos

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots, \frac{91}{n+93}$$

būtų nesuprastinamos.

α. 212

◇◇◇

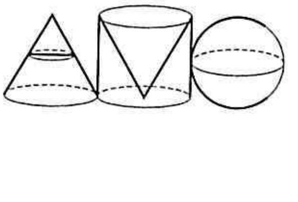
Trikampio ABC kampas A yra status. Įstrižainėje BC paimkime tašką P ir nuleiskime statmenį PQ į AC. Raskite tokį tašką P, kad kvadrato, kurio kraštinė yra PQ, plotas būtų lygus stačiakampio, kurio kraštinės lygios PB ir PC, plotui. Kaip tokį tašką galima atidėti?

α. 213

◇◇◇

Eilėje yra 1999 rutuliukų, kai kurie iš jų raudoni, kai kurie mėlyni (jie gali būti visi raudoni arba mėlyni). Po kiekvienu rutuliuku parašytas skaičius, lygus raudonų rutuliukų, stovinčių dešiniau, ir mėlynų rutuliukų, stovinčių kairiau, skaičių sumai. Jeigu šių skaičių eilėje yra tik trys skirtingi ir jie užrašyti po nelyginį skaičių kartų, kam gali būti lygūs šie skaičiai?

Amerikos matematikų varžybos (*The American Mathematics Competitions*(AMC))



Pirmosios moksleivių matematikų varžybos organizuotos JAV 1950 metais. Dabar šias varžybas sudaro net septynių lygių matematikų konkursai: *The American Mathematics Contest* 8 (AMC 8), *The American Mathematics Contest* 10 (AMC 10), *The American Mathematics Contest* 12 (AMC 12), *The American Invitational Mathematics Examination* (AIME) ir *The United States of America Mathematical Olympiad* (USAMO). 2000 metais AMC 10/12 konkursuose dalyvavo apie 413 tūkstančių moksleivių, apie 10 tūkstančių buvo pakviesti į AIME konkursą ir tik apie 200 iš jų dalyvavo prestižinėje USAMO olimpiadoje. Šeši geriausiai pasirodę dalyviai atstovauja šaliai Pasaulinėje matematikų olimpiadoje. Pabandykite išspręsti tris 1999 metų JAV matematikų olimpiados pirmosios dienos uždavinius.

α. 214

◊◊◊

Ant keleto $n \times n$ dydžio šachmatų lentos langelių padėtos šaškės. Tenkinamos tokios sąlygos:

a) jeigu ant langelio nėra šaškės, tai bent ant vieno langelio, turinčio su pirmuoju bendrą kraštinę, yra padėta šaškė;

b) bet kokiai langelių su šaškėmis porai yra langelių su šaškėmis seka, prasidedanti pirmuoju poros langeliu ir pasibaigianti paskutiniu, kad bet kurie du gretimi tos sekos langeliai turi po bendrą kraštinę.

Įrodykite, kad ant lentos padėta mažiausiai $(n^2 - 2)/3$ šaškių.

α. 215

◊◊◊

$ABCD$ yra keturkampis. Įrodykite, kad
$|AB - CD| + |AD - BC| \geqslant 2|AC - BD|$.

α. 216

◊◊◊

Tegu $p > 2$ yra pirminis skaičius, o a, b, c, d yra sveikieji, nesidalijantys iš p skaičiai, su bet kokiu sveikuoju, nesidalijančiu iš p, skaičiumi r tenkinantys sąlygą $\{ra/p\} + \{rb/p\} + \{rc/p\} + \{rd/p\} = 2$; čia $\{x\}$ reiškia skaičiaus x sveikąją dalį. Įrodykite, kad bent du iš skaičių $a + b$, $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$, $c + d$ dalijasi iš p.

Kanados matematikų olimpiados (*Canadian Open Mathematics Challenge and Canadian Mathematical Olympiad*)

Kanadoje vyksta dvi matematikų olimpiados: Kanados atviroji matematikų olimpiada ir Kanados matematikų olimpiada. Kanados atvirojoje matematikos olimpiadoje gali dalyvauti visi moksleiviai (jie turi būti ne vyresni kaip 19 metų ir turėti Kanados pilietybę). Dalyviai dvi su puse valandos sprendžia uždavinius; užduotį sudaro A) dalis iš aštuonių uždavinių, kurių kiekvienas vertinamas 5 taškais ir keturi B) dalies uždaviniai (po 10 taškų). Apie 50 geriausių šios olimpiados dalyvių pakviečiama į Kanados matematikos olimpiadą. Mūsų skaitytojams pateikiame 1999 metų Kanados atvirosios olimpiados B) dalies uždavinius ir penkis 2000 metų Kanados matematikos olimpiados uždavinius.

α. 217

◊◊◊

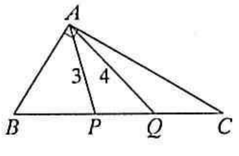
a) Vieno trikampio viršūnės yra tiesių $y = -4$, $x = 0$ ir $y = -(3/4)x + b_1$ susikirtimo taškuose, kito — tiesių $y = -4$, $x = 0$ ir $y = -(3/4)x + b_2$ susikirtimo taškuose. Raskite b_1 ir b_2, jei abiejų trikampių plotai lygūs 24.

b) Raskite apskritimo, apibrėžto apie vieną iš trikampių, spindulį.

α. 218

◊◊◊

Tegu skaičiai b, c, d yra sveikieji ir $bd + cd$ yra nelyginis. Įrodykite, kad kubinio daugianario $x^3 + bx^2 + cx + d$ negalima išskaidyti į sandaugą $(x + r)(x^2 + px + q)$, čia p, q, r yra sveikieji skaičiai.



α. 219

◊◊◊

Trikampio ABC kampas A yra status. Taškai P ir Q yra ant įstrižainės BC, $BP = PQ = QC$, $AP = 3$ ir $AQ = 4$. Raskite visas trikampio ABC kraštines.

α. 220

◊◊◊

Nagrinėkime trikampius ABC, kurių pagrindai BC lygūs a, o aukštinės, nuleistos iš viršūnės A į BC, lygios h, $h < (\sqrt{3}/2)a$. Kiekviename iš trikampių imkime po tašką P, kad būtų $\angle PAB = \angle PBA = \angle PCB$. Įrodykite, kad šio kampo didumas tas pats kiekviename trikampyje.

α. 221

◊◊◊

Lygiai dvyliktą valandą Ana, Beta ir Karmen iš tos pačios vietos pradėjo bėgti apskritimo formos 200 metrų ilgio bėgimo taku. Kiekviena bėgikė nekeičia nei savo krypties, nei greičio. Įrodykite, kad jeigu Ana bėga skirtingu negu jos draugės greičiu, tai tam tikru laiko momentu jos nuotolis nuo Betos ir Karmen (matuojami trumpesniu bėgimo tako lanku, skiriančiu bėgikes) bus lygus 100 metrų.

α. 222

◊◊◊

Skaičių 1901, 1902, ..., 2000 perstata — tai skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ seka, kurioje kiekvienas iš pradinių skaičių pasikartoja po vieną kartą. Pagal kiekvieną perstatą sudarykime sumas $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$. Kiek iš viso yra tokių perstatų, kad nė vienas sekos $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ narys nesidalija iš 3?

α. 223

◊◊◊

Visi sekos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2000}\}$ skaičiai yra sveikieji ir priklauso intervalui $[-1000, 1000]$, jų suma lygi 1. Įrodykite, kad galima parinkti A posekį, kurio narių suma būtų lygi nuliui.

α. 224

◊◊◊

Iškilojo keturkampio $ABCD$ $\angle CBD = 2\angle ADB$, $\angle ABD = 2\angle CDB$ ir $AB = CB$. Įrodykite, kad $AD = CD$.

α. 225

◊◊◊

Realieji skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ tenkina sąlygas $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{100} \geqslant 0$, $a_1 + a_2 \leqslant 100$, $a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} \leqslant 100$. Raskite didžiausią galimą sumos $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_{100}^2$ reikšmę ir visas sekas $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, su kuriomis ši didžiausioji reikšmė yra įgyjama.

$\alpha + \omega$

Norvegijos matematikų varžybos (*Niels Henrik Abels matematikk-konkurranse*)

Matematikų turnyrai Norvegijoje pradėti rengti 1921 metais ir iki 1970 metų vykdavo kasmet. Tačiau dalyvių būdavo nedaug. 1970 metais jis iš viso nutrūko. 1980 metais minint Nielso Abelio gimimo 150 metines, buvo nutarta jį atnaujinti ir pavadinti Nielso Henriko Abelio matematikų varžybomis. Šitaip norvegai pagerbė įžymųjį savo tėvynainį, įrodžiusį, kad yra penktojo laipsnio lygčių, kurių sprendinių negalima užrašyti naudojant sudėties, atimties, daugybos, dalybos ir šaknies veiksmus. Pirmajame konkurse dalyvavo tik 28 moksleiviai. Nuo 1985 metų, pakeitus jo organizavimo taisykles, konkurse pradėjo dalyvauti daugiau moksleivių.

Turnyras vyksta dviem ratais ir baigiasi finaliniu konkursu. Trys šio finalinio turnyro nugalėtojai automatiškai patenka į Norvegijos komandą, atstovaujančią šaliai pasaulinėje matematikų olimpiadoje. Dar trys parenkami vėliau, atsižvelgiant į jų pasirengimą ir Šiaurės matematikų konkurso rezultatus. Pirmuosiuose dviejuose turnyro ratuose dalyviams pateikiami uždaviniai su pasirenkamais atsakymais. Finaliniame konkurse sprendžiami keturi uždaviniai.

Pateikiame skaitytojams po tris uždavinius iš 1999 metų konkurso antrojo ir finalinio ratų.

α. 226

◊◊◊

Vakarėlyje dalyvavo 6 vaikinai ir kelios merginos. Dvi merginos pažinojo po keturis vaikinus, o likusios — po du vaikinus. Nė vienas iš vaikinų nepažinojo daugiau kaip trijų merginų (jei A pažįsta B, vadinasi B taip pat pažįsta A). Didžiausias vakarėlyje dalyvavusių merginų skaičius yra:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10 ir daugiau

α. 227

◊◊◊

Trikampio ABC kraštinės $AB = 5$, $AC = 6$. Kai kampas ACB yra didžiausias galimas, tai trikampio plotas lygus:

a) 15 b) $5\sqrt{7}$ c) $\frac{7}{2}\sqrt{7}$ d) $3\sqrt{11}$ e) $\frac{5}{2}\sqrt{11}$

α. 228

◊◊◊

Sveikųjų skaičių porų (m, n), tenkinančių lygtį $m^3+6m^2+5m = 27n^3 + 9n^2 + 9n + 1$, yra:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) be galo daug

α. 229

◊◊◊

a) Raskite funkciją $f(x)$, kad $f(t^2+t+1) = t$ visiems neneigiamiems t.

b) Įrodykite, kad visiems realiesiems skaičiams a, b, c, d ir e teisinga nelygybė $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqslant a(b+c+d+e)$.

α. 230

◊◊◊

a) Raskite visus sveikuosius skaičius m ir n, kad $2m^2+n^2 = 2mn + 3n$.

b) Natūralieji skaičiai a, b ir c yra tokie, kad a^3 dalijasi iš b, b^3 dalijasi iš c, o c^3 dalijasi iš a. Įrodykite, kad $(a+b+c)^{13}$ dalijasi iš abc.

α. 231
◊◊◊

Trikampis ABC yra lygiašonis, $AB = AC$ ir $\angle A = 30°$. Trikampis įbrėžtas į apskritimą, kurio centras yra taške O. Taškas D yra ant lanko tarp A ir C, $\angle DOC = 30°$. Tegu taškas G yra ant lanko tarp A ir B, $DG = AC$ ir $AG < BG$. Tiesė DG kerta AC ir AB taškuose E ir F.

a) Įrodykite, kad trikampis AFG yra lygiašonis.

b) Raskite trikampių AFE ir ABC plotų santykį.

Balkanų šalių matematikų olimpiada

Nuo 1984 metų vyksta Balkanų šalių matematikų olimpiados, pirmoji iš jų įvyko Atėnuose. Kiekvienos šalies komandą sudaro šeši, ne vyresni kaip 20 metų, moksleiviai.

Pateikiame 2000 metų XVII Balkanų matematikų olimpiados, vykusios Moldovoje, uždavinius.

α. 232
◊◊◊

Raskite visas funkcijas $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, su visais realiaisiais x, y tenkinančias sąlygą $f(xf(x)+f(y)) = (f(x))^2 + y$.

α. 233
◊◊◊

Trikampis ABC yra smailusis, bet ne lygiašonis, AD yra pusiaukraštinė, nubrėžta į kraštinę BC (D guli šioje kraštinėje), E yra šios pusiaukraštinės vidinis taškas. Taškas F yra ortogonali taško E projekcija į BC. Tegu M yra EF vidaus taškas, N ir P gauti ortogonaliai projektuojant tašką M į tieses AC ir AB. Įrodykite, kad kampų PMN ir PEN pusiaukampinės yra nesikertančiose tiesėse.

α. 234
◊◊◊

Stačiakampį 50×90 galima pjaustyti tiesėmis, lygiagrečiomis su jo kraštinėmis. Kiek daugiausiai $1 \times 10\sqrt{2}$ dydžio stačiakampių galima atpjauti?

α. 235
◊◊◊

Natūralųjį skaičių r vadiname laipsniu, jei $r = t^s$, čia $t > 1$ ir $s > 1$ yra natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad kiekvienam n egzistuoja natūraliųjų skaičių aibė A, turinti tokias savybes:

a) A turi n elementų;

b) kiekvienas A elementas yra laipsnis;

c) visiems A skaičiams $r_1, r_2, \ldots, r_k$ $(1 < k < n+1)$ skaičius $\frac{r_1+r_2+\cdots+r_k}{k}$ taip pat yra laipsnis.

Irano matematikų olimpiados

Irano matematikų olimpiada vyksta taip pat kaip ir pasaulinė matematikų olimpiada. Uždaviniai sprendžiami dvi dienas po keturias valandas, kiekvieną dieną dalyviams tenka spręsti tris uždavinius. Mūsų skyrelyje — 1999 metų pirmosios dienos uždaviniai.

α. 236
◇◇◇

Ar egzistuoja toks dvejeto laipsnis, kad kaip nors perstatę jo skaitmenis galėtume gauti kitą dvejeto laipsnį?

α. 237
◇◇◇

Trikampio ABC kampai B ir C yra didesni už 45° kampą. Trikampio ABC išorėje nubrėžkime stačius ir lygiašonius trikampius CAM ir BAN, kad kampai $\angle CAM$ ir $\angle BAN$ būtų statūs. Taip pat ABC viduje nubrėžkime statų ir lygiašonį trikampį BPC, kurio kampas $\angle BPC$ status. Įrodykite, kad trikampis MNP irgi yra status ir lygiašonis.

α. 238
◇◇◇

Kiekviename 100×100 dydžio gardelės taške yra po medį (taigi yra 10 000 medžių). Kiek daugiausiai medžių galima nupjauti, kad stovėdami ant bet kurio nupjauto medžio kelmo negalėtume matyti kito kelmo (atkarpoje, jungiančioje bet kuriuos du taškus, kurių medžiai buvo nupjauti, turi būti nors vienas nenupjauto medžio taškas).

Williamo Lowello Putnamo matematikų konkurse dalyvauja JAV ir Kanados universitetų ir koledžų studentai. Jis pradėtas rengti 1938 metais, kai paties Putnamo — matematikų varžybų propaguotojo ir entuziasto jau nebebuvo. Jo žmona 1927 metais įsteigė jo vardo fondą, kuris remia matematikų varžybas. Šį konkursą rengia ir administruoja Amerikos matematikų draugija. Pateikiame skaitytojams šešis 2000 metų Putnamo matematikų konkurso uždavinius.

ω. 67
◇◇◇

Tegu A yra teigiamas skaičius. Kokias reikšmes gali įgyti suma

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2,$$

jei $x_0, x_1, \ldots$ yra tokie teigiami skaičiai, kad

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j = A?$$

ω. 68

◊◊◊

Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug sveikųjų skaičių n, kad kiekvienas iš skaičių n, $n+1$, $n+2$ būtų dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma.

ω. 69

◊◊◊

Aštuonkampis $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ įbrėžtas į apskritimą. Raskite, koks gali būti didžiausias šio aštuonkampio plotas, jeigu $P_1P_3P_4P_7$ yra kvadratas, kurio plotas lygus 5, o $P_2P_4P_6P_8$ yra stačiakampis, kurio plotas lygus 4.

ω. 70

◊◊◊

Įrodykite, kad netiesioginis integralas

$$\lim_{B\to\infty}\int_0^B \sin(x)\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

konverguoja.

ω. 71

◊◊◊

Ant apskritimo, kurio spindulys $r > 0$, atidėti trys skirtingi taškai. Įrodykite, kad atstumas bent tarp dviejų kurių nors iš šių taškų yra ne mažesnis už $r^{1/3}$.

ω. 72

◊◊◊

Tegu $f(x)$ yra daugianaris, kurio koeficientai yra sveikieji skaičiai. Apibrėžkime sveikųjų skaičių seką $a_0, a_1, \ldots$ taip: $a_0 = 0$ ir $a_{n+1} = f(a_n)$ visiems $n \geqslant 0$. Įrodykite, kad jeigu egzistuoja natūralusis m, su kuriuo $a_m = 0$, tai arba $a_1 = 0$, arba $a_2 = 0$.