$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 2, 85–92

Kiekvieno „Alfa plius omega“ numerio uždavinių skyriuje skelbsime trijų lygių uždavinius.

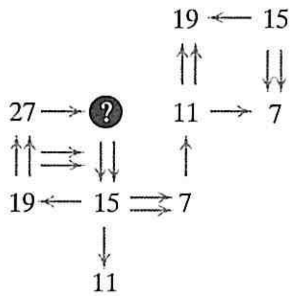
Epsilon (ε) uždaviniai — matematiniai galvosūkiai, mįslės, loginiai uždaviniai, kuriems išspręsti pakanka visai nedaug matematikos žinių. Tačiau dažnai ir jie slepia matematinio tyrinėjimo, apibendrinimų galimybę, kuri gali virsti nedidele matematine teorija. Tad kviečiame ne tik spręsti pateikiamus uždavinius, bet ir bandyti juos apibendrinti, siūlyti savo sąlygas.

Alfa (α) uždaviniams išspręsti pakaks mokyklinės matematikos žinių. Šio numerio *alfa* skyrelyje skelbiame 2000 metų pasaulinės jaunųjų matematikų olimpiados (α.174–α.179) ir „Baltijos kelias 2000“ olimpiados (α.180–α.199) uždavinius.

Omega (ω) skyrelyje skelbsime užduotis, kurioms prireiks (nors ne visada) universitetuose dėstomos matematikos. Šįkart pateikiame tarptautinės 2000 metų studentų olimpiados, vykusios Londone, uždavinius.

Savo sprendimus siųskite adresu: „Alfa plius omega“ redakcija, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius. Aktyviausius sprendėjus apdovanosime.

ε. 88



Kokį skaičių reikia įrašyti klaustuko vietoje?

Patarimas: galvokite apie skaičių sudėtį ir atimtį.

ε. 89

Tamsiame kambaryje stovi dėžė, kurioje yra keturios kepurės: dvi juodos ir dvi baltos. Trys protingi žmonės prieina vienas po kito prie dėžės, išsitraukia po kepurę, užsimaukšlina ją ant galvos ir išeina. Nė vienas nežino, kokios spalvos kepurė jam teko. Žmonės eina vorele ir nesigręžioja: pirmasis nemato nė vieno žmogaus, antrasis mato pirmąjį, trečiasis — abu pirmuosius. Įrodykite, kad vienas iš jų, logiškai samprotaudamas, visada gali sužinoti, kokios spalvos kepurę dėvi.

ε. 90

Tiems patiems protingiems žmonėms pasakyta, kad tamsiame kambaryje yra dėžė su baltomis ir juodomis kepurėmis. Jiems reikia pasiimti po kepurę, užsimaukšlinti ant galvos ir išėjus į šviesą bei pažiūrėjus į kitus atspėti savo kepurės spalvą. Žmonės susitaria, kad kiekvienas matantis kurį nors su balta kepure pakels ranką. Įrodykite, kad visada bent vienas žmogus, logiškai protaudamas, gali nustatyti savo kepurės spalvą.

$\varepsilon.\,91$

◇◇◇

Prie rūmų vartų stovi sargybinis. Prie sargybinio prieina vyras, sargybinis jam sako: „Devyni“. Vyras atsako: „Šeši“, ir jį praleidžia. Prieina moteris. Sargybinis: „Trylika“. Moteris: „Septyni“. Ją taip pat praleidžia. Ką reikia atsakyti vaikui, kad jį praleistų, jeigu sargybinis jam pasakė: „Devyniasdešimt“?

$\varepsilon.\,92$

◇◇◇

Andrius, jo tėtis ir senelis švenčia gimtadienius tą pačią dieną. Buvo nupirkta dešimt žvakučių, ant kurių užrašyti skaitmenys 0, 1, ..., 9. Andriui dvylika metų, todėl ant jo torto pastatytos žvakutės su skaitmenimis 1, 2; ant tėvo torto taip pat pastatytos dvi žvakutės (tėvui ne daugiau kaip 50), žvakutės stovi ir ant senelio torto. Senelis sako: „Tų pačių žvakučių užteks ir kitiems metams, ir dar vieniems. Po dviejų metų kiekviena žvakutė jau bus nors kartą naudota. Tačiau po trijų metų jau teks pirkti naujas.“ Kiek Andriaus tėvui metų?

$\alpha.\,174$

◇◇◇

Du apskritimai Γ_1 ir Γ_2 kertasi taškuose M ir N. Tegu l yra bendroji apskritimų Γ_1 ir Γ_2 liestinė, o taškas M yra arčiau l negu taškas N. Apskritimai Γ_1 ir Γ_2 liečia l atitinkamai taškuose A ir B. Tiesė, nubrėžta per M lygiagrečiai su l, kerta apskritimus Γ_1 ir Γ_2 taškuose C ir D. Tiesės CA ir DB kertasi taške E; tiesės AN ir CD — taške P; tiesės BN ir CD — taške Q. Įrodykite, kad $EP = EQ$.

$\alpha.\,175$

◇◇◇

Tegu a, b, c yra teigiami skaičiai, tenkinantys sąlygą $abc = 1$. Įrodykite, kad

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

$\alpha.\,176$

◇◇◇

Tegu $n \geqslant 2$ yra teigiamas sveikasis skaičius. Iš pradžių horizontalioje tiesėje yra n blusų, ne visos jos yra viename taške. Su teigiamu realiuoju skaičiumi λ apibrėžkime tokius ėjimus: pasirinkime dvi blusas, esančias taškuose A ir B, A yra kairiau už B; leiskime blusai iš A nušokti į tašką C, kuris yra tiesėje dešiniau B ir tenkina sąlygą $BC/AB = \lambda$. Raskite visas λ reikšmes, kad bet kuriam tiesės taškui M ir bet kuriam pradiniam n blusų išsidėstymui tiesėje visos blusos po baigtinio ėjimų skaičiaus galėtų atsidurti taškuose dešiniau M.

α. 177

◇◇◇

Burtininkas turi šimtą kortų, sunumeruotų skaičiais nuo 1 iki 100. Jis deda jas į tris dėžes (raudoną, baltą ir mėlyną). Į kiekvieną dėžę įdeda bent po vieną kortą. Vienas iš žiūrovų pasirenka dvi iš trijų dėžių, iš kiekvienos ištraukia po vieną kortą ir praneša pasirinktųjų kortų numerių sumą. Sužinojęs šią sumą, burtininkas pasako, iš kurios dėžės kortos nebuvo trauktos. Kiek yra būdų sudėti visas kortas į dėžes, kad visada būtų galima atlikti šį fokusą? (Du būdai laikomi skirtingais, jei dvi dėžės skiriasi bent viena korta.)

α. 178

◇◇◇

Nustatykite, ar egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kuris dalytųsi iš 2000 skirtingų pirminių skaičių ir $2^n + 1$ dalytųsi iš n.

α. 179

◇◇◇

Tegu AH_1, BH_2, CH_3 yra smailiojo trikampio ABC aukštinės. Į šį trikampį įbrėžtas apskritimas liečia kraštines BC, CA, AB taškuose T_1, T_2, T_3. Tegu l_1, l_2, l_3 yra atitinkamai tiesių H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 atspindžiai tiesių T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 atžvilgiu. Įrodykite, kad tiesės l_1, l_2, l_3 apibrėžia trikampį, kurio viršūnės yra ant įbrėžtojo į trikampį ABC apskritimo.

α. 180

◇◇◇

Taškas K yra trikampio ABC viduje. Taškas M yra toks, kad M ir K yra skirtingose tiesės AB pusėse, o taškas N yra toks, kad N ir K yra skirtingose tiesės BC pusėse. Be to,

$$\angle MAB = \angle MBA = \angle NBC = \angle NCB = \angle KAC = \angle KCA.$$

Įrodykite, kad keturkampis $MBNK$ yra lygiagretainis.

α. 181

◇◇◇

Stačiojo lygiašonio trikampio ABC $\angle A = 90°$, o M yra atkarpos AB vidurio taškas. Tiesė, einanti per tašką A statmenai CM, kerta kraštinę BC taške P. Įrodykite, kad

$$\angle AMC = \angle BMP.$$

α. 182

◇◇◇

Trikampio ABC $\angle A = 90°$, o $AB \neq AC$. Taškai D, E ir F atitinkamai yra tokie kraštinių BC, CA ir AB taškai, kad keturkampis $AFDE$ yra kvadratas. Įrodykite, kad tiesės BC, FE ir tiesė, einanti per A ir liečianti apie trikampį ABC apibrėžtą apskritimą, kertasi viename taške.

α. 183

◇◇◇

Trikampio ABC $\angle A = 120°$. Taškai K ir L atitinkamai priklauso kraštinėms AB ir AC. Trikampio ABC išorėje nubrėžti lygiakraščiai trikampiai BKP ir CLQ. Įrodykite, kad

$$PQ \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + AC).$$

α. 184

◇◇◇

Trikampio ABC kraštinės AB, BC ir CA tenkina sąlygą

$$\frac{BC}{AB - BC} = \frac{AB + BC}{AC}.$$

Raskite santykį $\frac{\angle A}{\angle C}$.

α. 185

◇◇◇

Fredis kalnuose atidarė nuosavą viešbutį. Fredis tvirtina, kad ir koks skaičius $n \geqslant 3$ svečių atvyktų į viešbutį, visada bus galima rasti du viešbučio gyventojus, kurie pažinotų po tiek pat likusių viešbučio gyventojų ir turėtų arba bendrą pažįstamą, arba bendrą nepažįstamą.
Kurioms n reikšmėms Fredis yra teisus? (Jei A pažįsta B, tai B pažįsta A.)

α. 186

◇◇◇

Kiekvienas 40×50 matmenų kontrolinių mygtukų sistemos mygtukas gali būti dviejų būsenų — įjungtas arba išjungtas. Palietus bet kurį mygtuką, jo būsena ir visų mygtukų, esančių su juo toje pačioje eilutėje, bei visų mygtukų, esančių tame pačiame stulpelyje, būsenos keičiasi priešingomis. Įrodykite, kad vieną po kito paliečiant kai kuriuos mygtukus kontrolinių mygtukų sistemos būsena, kai visi mygtukai yra išjungti, gali būti pakeista būsena, kai visi mygtukai yra įjungti. Raskite mažiausią galimą tokių palietimų skaičių.

α. 187

◇◇◇

Pobūvyje susitiko 14 draugų. Vienas iš jų, vardu Fredis, norėjo atsigulti anksčiau. Jis atsisveikino su 10 savo draugų ir, pamiršęs atsisveikinti su likusiais trimis, išėjo. Po valandėlės jis sugrįžo į pobūvį, atsisveikino su dešimčia savo draugų (nebūtinai su tais pačiais kaip anksčiau) ir vėl išėjo. Po to Fredis dar ne kartą grįždavo į pobūvį ir vėl išeidavo, kiekvieną kartą atsisveikindamas su dešimčia savo draugų. Kai tik Fredis jau buvo atsisveikinęs su kiekvienu iš savo draugų mažiausiai po vieną kartą, jis daugiau nebegrįžo. Rytojaus rytą paaiškėjo, kad jis su kiekvienu iš trylikos savo draugų buvo atsisveikinęs skirtingą skaičių kartų. Koks yra mažiausiai galimas Fredžio sugrįžimų į pobūvį skaičius?

α. 188

◇◇◇

Varlė šokinėja iš vienetinių kvadratėlių sudarytoje $2k \times 2k$ matmenų šachmatų lentoje. Varlės šuolių ilgis yra $\sqrt{1+k^2}$ ir kiekvienu šuoliu varlė peršoka iš vieno langelio centro į kito langelio centrą. Lentos m langelių yra paženklinta x ženklu, o langeliai, į kuriuos varlė gali nušokti iš ženklu x pažymėtų langelių (nesvarbu, ar jie paženklinti ženklu x, ar ne), yra paženklinami ženklu o. Iš viso yra n ženklu o paženklintų langelių. Įrodykite, kad $n \geqslant m$.

α. 189

◇◇◇

Lentoje buvo parašyti du teigiami sveikieji skaičiai: vienas iš jų lygus 2000, o kitas mažesnis kaip 2000. Leidžiama atlikinėti tokią operaciją: jeigu skaičių aritmetinis vidurkis m yra sveikasis skaičius, tai bet kurį vieną iš jų galima ištrinti ir pakeisti skaičiumi m. Įrodykite, kad ši operacija negali būti atlikta daugiau kaip 10 kartų. Nurodykite pavyzdį, kai operacija gali būti atlikta 10 kartų.

α. 190

◇◇◇

Natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_2, \ldots$ su visais m ir n turi tokią savybę: jei m yra skaičiaus n daliklis ir $m < n$, tai a_m yra skaičiaus a_n daliklis ir $a_m < a_n$. Raskite mažiausią galimą a_{2000} reikšmę.

α. 191

◇◇◇

Natūralieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra tokie, kad nė vienas iš jų nėra kito skaičiaus „pradžia" (pavyzdžiui, 12 yra skaičių 12 ir 125 „pradžia"). Įrodykite, kad

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < 3.$$

α. 192

◇◇◇

Aritmetinės progresijos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nariai yra sveikieji skaičiai ir $i | a_i$ (a_i dalijasi iš i) su kiekvienu $i = 1, 2, \ldots, n-1$, bet $n \nmid a_n$ (a_n nesidalija iš n). Įrodykite, kad n yra pirminio skaičiaus laipsnis (gal ir pirmasis).

α. 193

◇◇◇

Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius n, kurie yra 100 kartų didesni už visų savo natūraliųjų daliklių skaičių.

α. 194

◇◇◇

Natūralusis skaičius n nesidalija nei iš 2, nei iš 3. Įrodykite, kad su visais sveikaisiais k skaičius $(k+1)^n - k^n - 1$ dalijasi iš $k^2 + k + 1$.

α. 195

Įrodykite, kad su visais teigiamais a, b ir c yra teisinga nelygybė

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

α. 196

Raskite visus realiuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5, \\ xy + yz + zt + tx = 4, \\ xyz + yzt + ztx + txy = 3, \\ xyzt = -1 \end{cases}$$

sprendinius.

α. 197

Raskite visas teigiamųjų skaičių x ir y poras, tenkinančias lygtį

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right).$$

α. 198

Įrodykite, kad

$$t^{2n} \geqslant (t-1)^{2n} + (2t-1)^n$$

su visais realiaisiais skaičiais $t \geqslant \frac{1}{2}$ ir natūraliaisiais n.

α. 199

Su kiekvienu natūraliuoju $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n-1)(4n+1)}{(2n)(2n+2)\ldots(4n-2)(4n)}.$$

Įrodykite, kad $\frac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \frac{2}{n}$.

ω. 55

Funkcija f: $[0; 1] \to [0; 1]$ yra arba monotoniškai didėjanti, arba monotoniškai mažėjanti.
Ar visada atsiras toks $x \in [0; 1]$, su kuriuo $f(x) = x$?

$\alpha + \omega$

ω. 56

◊◊◊

Duoti daugianariai $p(x) = x^5 + x$ ir $q(x) = x^5 + x^2$. Raskite visas tokias kompleksinių skaičių w ir z poras (w, z), kad $p(w) = p(z)$, $q(w) = q(z)$, o $w \neq z$.

ω. 57

◊◊◊

A ir B yra kvadratinės kompleksinės tos pačios eilės matricos ir $\operatorname{rang}(AB - BA) = 1$. Įrodykite, kad $(AB - BA)^2 = 0$.

ω. 58

◊◊◊

a) Įrodykite, kad mažėjančiai teigiamų skaičių sekai (x_i) teisinga nelygybė

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}.$$

b) Įrodykite, kad mažėjančiai begalinei teigiamų skaičių sekai x_i atsiras tokia konstanta C, kad bus teisinga lygybė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sum_{i=m}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2} \leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

ω. 59

◊◊◊

R yra nulinės charakteristikos (nebūtinai komutatyvus) žiedas, o e, f ir g — tokie jo idempotentiniai elementai, kad $e + f + g = 0$. Įrodykite, kad $e = f = g = 0$.

Žiedą R vadiname nulinės charakteristikos žiedu, jeigu su kiekvienu $a \in R$ ir natūraliuoju skaičiumi n sandauga $na \neq 0$, jei tik $a \neq 0$. x vadiname idempotentiniu elementu, jeigu $x = x^2$.

ω. 60

◊◊◊

Tegul $f\colon R \to (0; \infty)$ yra tokia didėjanti diferencijuojama funkcija, kad $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ir f' yra aprėžta. Laikydami $F(x) = \int_0^x f$, indukciškai apibrėžkime seką (a_n) lygybėmis $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{f(a_n)}$, o (b_n) — lygybe $b_n = F^{-1}(n)$. Įrodykite, kad

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

ω. 61

◊◊◊

a) Įrodykite, kad vienetinį kvadratą galima padalyti į n mažesnių kvadratų, jeigu n yra pakankamai didelis skaičius.

b) Tarkime, $d \geqslant 2$. Įrodykite, kad atsiras tokia konstanta $N(d)$, jog imant $n \geqslant N(d)$ d-matį vienetinį kubą galima padalyti į n mažesnių kubelių.

ω. 62

◊◊◊

Funkcija f yra tolydi ir intervale $[0; 1]$ niekur nemonotoniška. Įrodykite, kad aibė taškų, kuriuose funkcija f įgyja lokalų minimumą, yra tiršta intervale $[0; 1]$.

Funkciją vadiname niekur nemonotoniška, jeigu nėra jokio intervalo, kuriame ji būtų monotoniška. Aibę vadiname tiršta, jei kiekviename netuščiame intervale galima rasti bent vieną tos aibės tašką.

ω. 63

◊◊◊

Tarkime, $p(z)$ yra n-ojo laipsnio daugianaris, kurio koeficientai kompleksiniai. Įrodykite, kad atsiras mažiausiai $n + 1$ toks kompleksinis skaičius, su kuriuo $p(z)$ lygus 0 arba 1.

ω. 64

◊◊◊

Tegul 6-osios eilės daugianario grafikas liečia tiesę taškuose A_1, A_2 ir A_3, o taškas A_2 yra tarp taškų A_1 ir A_3.

a) Įrodykite, jeigu atkarpos A_1A_2 ir A_2A_3 yra lygios, tai lygūs ir grafikais bei tomis atkarpomis ribojamų figūrų plotai.

b) Pažymėkite $k = \frac{A_2A_3}{A_1A_2}$ ir tegu K yra minėtųjų figūrų plotų santykis. Įrodykite, kad $\frac{2}{7}k^5 < K < \frac{7}{2}k^5$.

ω. 65

◊◊◊

Simboliu R^+ žymima teigiamų realiųjų skaičių aibė. Raskite visas tokias funkcijas $f\colon R^+ \to R^+$, kad su visais $x, y \in R^+$ $f(x)f(yf(x)) = f(x + y)$.

ω. 66

◊◊◊

Tarkime, A yra $m \times m$ matmenų matrica, o e^A yra apibrėžiama kaip

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n.$$

(Ši suma visada konverguoja, kad ir kokia būtų matrica A.) Įrodykite arba paneikite tokį teiginį: jei p yra daugianaris, o A ir B realiosios $m \times m$ matmenų matricos, tai $p(\mathrm{e}^{AB})$ yra nilpotentinė matrica tada ir tiktai tada, kai $p(\mathrm{e}^{BA})$ yra nilpotentinė matrica.

Matricą A vadiname nilpotentine, jei $A^k = 0$ su kuriuo nors natūraliuoju k.