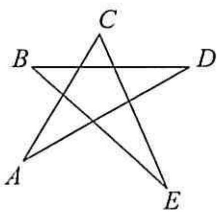
$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 2, 80–84

Uždavinys apie žvaigždžių kampus

Vilius Stakėnas
vilius@ktl.mii.lt

2000 metų valstybinio matematikos brandos egzamino užduotyje buvo uždavinys: raskite penkiakampės žvaigždės kampų sumą. Straipsnyje nagrinėjami šio uždavinio apibendrinimai. Pasirodo, galima apskaičiuoti ne tik penkiakampės žvaigždės kampų sumą!

Egzamino uždavinys



1 pav.

Po šių metų valstybinio matematikos egzamino daugeliui abiturientų turbūt sapnavosi paskutinis uždavinys apie penkiakampę žvaigždę.

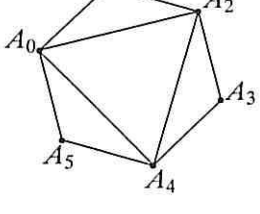
Taškai A, B, C, D ir E yra iškilojo penkiakampio viršūnės. Raskite penkiakampės žvaigždės kampų $\angle EBD$, $\angle ACE$, $\angle BDA$, $\angle CEB$, $\angle DAC$ sumą (1 pav.).

Manau, kad tiems moksleiviams, kurie teisingai jį išsprendė ir pelnė 4 taškus, uždavinys patiko. Patiko jis ir man. Tačiau ne tuo, kad sugebėjau jį išspręsti, bet tuo, kad jis iškėlė keletą klausimų, į kuriuos ne iš karto galėjau atsakyti. O teisingai iškeltas, bet neatsakytas klausimas matematikui yra tarsi bilietas į kelionę. Šįkart kelionė nebuvo nei ilga, nei sunki, tačiau maloni.

Jeigu norite sužinoti šiek tiek daugiau, skaitykite toliau!

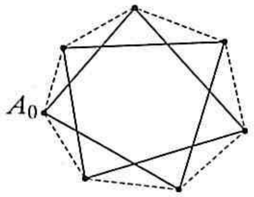
Kaip braižyti žvaigždes

Iš pradžių pakeičiau pirmąjį uždavinio sąlygos sakinį taip: „*Taškai $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ yra iškilojo n-kampio viršūnės*“ ir susimąsčiau, kaip pratęsti. Iš ko gi sudaryta penkiakampė uždavinio žvaigždė? Aišku, iš iškilojo penkiakampio įstrižainių: viršūnę A jungiame su C praleisdami B, C — su E praleisdami D ir taip toliau, kol grįžtame į A. Tą galima daryti ir su iškilojo n-kampio viršūnėmis. Ar gausime n-kampę žvaigždę? Iš pradžių pabandžiau pagal šią taisyklę jungti iškilojo šešiakampio viršūnes ir ... šešiakampės žvaigždės negavau! Nubraižiau paprasčiausią trikampį (2 pav.). Užtat septynkampę žvaigždę nubraižyti pavyko (3 pav.). Kur gi čia šuo pakastas?

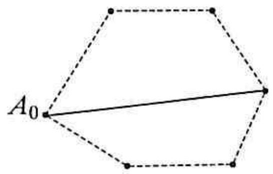


2 pav.

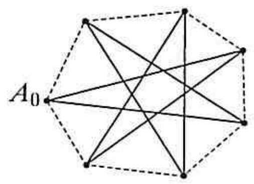
Neskubėjau iš karto to šuns ieškoti, bet išbandžiau kitą žvaigždžių braižymo būdą. Juk galima daugiakampio viršūnę jungti su



3 pav.



4 pav.



5 pav.

kita, praleidus (pasirinktąja viršūnių apėjimo kryptimi) dvi viršūnes, po to vėl dvi ir taip toliau.

Šitaip braižydamas, iškilojo penkiakampio atveju gavau tą pačią žvaigždę, šešiakampio atveju — tik vieną įstrižainę, kurią tuoj pat pavadinau dvikampe žvaigžde (4 pav.), tačiau septynkampio atveju nubraižiau naują septynkampę žvaigždę (5 pav.). Pabandžiau jungti septynkampio viršūnes, praleisdamas po tris ir keturias, tačiau naujų žvaigždžių negavau. O praleisdamas po penkias, nubraižiau tą patį iškiląjį septynkampį, kurį, jeigu norime, galime taip pat pavadinti septynkampe žvaigžde.

Įgiję šiek tiek patirties, pabandykime atsakyti į tokį klausimą:

Kiek ir kokių žvaigždžių galime nubraižyti jungdami iškilojo n-kampio viršūnes pagal aptartą taisyklę?

Pasižymėkime iškilojo n-kampio viršūnes $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$. Įsivaizduokime keliautoją, išėjusį iš A_0 ir kiekvienu žingsniu pereinantį į gretimą viršūnę. Viršūnę, kurioje keliautojas atsidūrė po m žingsnių, pažymėję A_m, kelionę galėsime nusakyti seka

$$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, \ldots. \tag{1}$$

Viršūnės $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ yra skirtingos, $A_n = A_0$, $A_{n+1} = A_1$ ir taip toliau. Kitaip tariant, jei $u = v + nt$ ($u - v$ dalijasi iš n), tai $A_u = A_v$.

Jeigu dar įsivaizduosime, kad keliautojas jungia kiekvienas dvi gretimas savo kelio viršūnes atkarpa, tai (1) seka reikš vėl ir vėl iš naujo braižomą tą patį iškiląjį n-kampį. O dabar liepkime mūsų keliautojui keliauti kitaip — kiekvienu žingsniu praleisti po $(k-1)$-ą (1) sekos viršūnę. Tada jo kelią aprašo tokia viršūnių seka:

$$A_0, A_k, A_{2k} \ldots, A_{mk}, \ldots. \tag{2}$$

Sujungę gretimas (2) sekos viršūnes, gausime trajektoriją, kurią galime pavadinti žvaigžde. Pažymėkime ją $Z_{n,k}$.

Akivaizdu, kad $Z_{n,1}$ yra pats iškilasis n-kampis. Jei $u - v$ dalijasi iš n, tai $Z_{n,u}$ ir $Z_{n,v}$ yra ta pati žvaigždė. Taigi pakanka nagrinėti žvaigždes

$$Z_{n,1}, Z_{n,2}, \ldots, Z_{n,n}. \tag{3}$$

Jei $1 < k < n$ yra n daliklis ir $m = \frac{n}{k}$, tai $A_{mk} = A_n = A_0$. Taigi m-uoju žingsniu keliautojas sugrįžo į kelionės pradžią. Akivaizdu, kad tai pirmasis jo sugrįžimas, todėl, jei k dalija n, tai $Z_{n,k}$ yra $\frac{n}{k}$-kampė žvaigždė (taigi $Z_{n,n}$ — vienkampė žvaigždė!). Dabar jau nesunku padaryti kiek bendresnę išvadą:

Jei d yra skaičių k ir n didžiausias bendrasis daliklis, tai $Z_{n,k}$ yra $\frac{n}{d}$-kampė žvaigždė.

Jau žinome, kad ne visos (3) žvaigždės yra skirtingos. Kiek jų iš tikrųjų yra? Nesunku pastebėti, kad žvaigždės $Z_{n,k}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$, yra skirtingos. Palyginsime žvaigždes $Z_{n,k}$ ir $Z_{n,n-k}$. Tegu žvaigždė $Z_{n,k}$ yra t-kampė. Vadinasi, kt dalijasi iš n, bet ku nesidalija iš n, jei $1 < u < t$. Akivaizdu, kad $Z_{n,n-k}$ yra taip pat t-kampė žvaigždė. Sugretinkime jas:

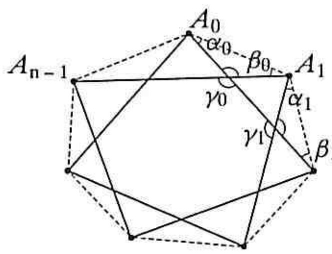
$$Z_{n,k}\colon\ A_0, A_k, A_{2k}, \dots, A_{tk}, \dots,$$
$$Z_{n,n-k}\colon\ A_0, A_{n-k}, A_{2(n-k)}, \dots, A_{t(n-k)}, \dots.$$

Kadangi $n - k - (t-1)k = n - kt$ dalijasi iš n, tai $A_{n-k} = A_{(t-1)k}$. Analogiškai $A_{(n-k)s} = A_{(t-s)k}$, t.y. $Z_{n,n-k}$ yra ta pati $Z_{n,k}$ žvaigždė, tik braižoma kita kryptimi.

Taigi jau žinome, kad sutrumpinę (3) žvaigždžių eilę ir palikę tik žvaigždes $Z_{n,k}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$, išsaugosime tik po vieną iš skirtingų „eksponatų". Taip pat nustatėme, kad žvaigždė $Z_{n,m}$ turi lygiai $\frac{n}{d}$ kampų, čia d yra didžiausias bendrasis skaičių n ir m daliklis.

Žvaigždės apskritime

Šį tą jau sužinojome apie žvaigždes. Dabar egzamino uždavinį galime formuluoti taip: raskite $Z_{5,2}$ žvaigždės vidaus kampų sumą. Pabandykime panagrinėti bendresnį $Z_{n,2}$ žvaigždės atvejį. Kai n lyginis, atsakymas kone akivaizdus (raskite jį). Tad tegu n yra nelyginis skaičius. Pažymėkime ieškomą kampų sumą $T_{n,2}$, o S_n — iškilojo n-kampio vidaus kampų sumą. Iš brėžinio (6 pav.) gauname

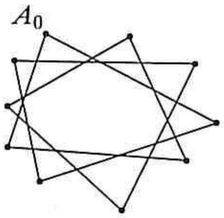


6 pav.

$$T_{n,2} = S_n - \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_i + \beta_i).$$

Kita vertus, $\alpha_i + \beta_i = \pi - \gamma_i$ ir γ_i — vėl iškilojo n-kampio kampai, taigi $\gamma_0 + \dots + \gamma_{n-1} = S_n$. Todėl $T_{n,2} = 2S_n - n\pi$, arba $T_{n,2} = (n-4)\pi$.

Sėkmė įkvepia, tad bandykime susumuoti ir $Z_{n,k}$ žvaigždės kampus. Pažymėkime šios žvaigždės kampų sumą $T_{n,k}$. Apsiribokime atveju, kai bendrasis n ir k daliklis lygus 1. Bendrąjį atvejį galima suvesti į šį (kodėl?).



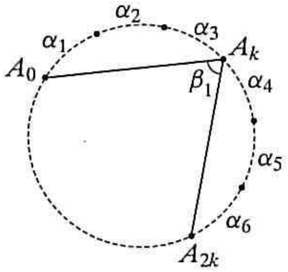
7 pav.

Ar galime pakartoti ankstesnį samprotavimą? Panagrinėję (7 pav.) įsitikinsime, kad nepavyks. Gal uždavinys palengvės, jei nagrinėsime ne bet kokio iškilojo daugiakampio viršūnes, bet įbrėžtojo į apskritimą?

Įbrėžtojo į apskritimą daugiakampio viršūnės dalija apskritimą į lankus. Lanko tarp viršūnių A_{i-1} ir A_i didumą radianais žymėkime α_i. Prisiminkime (1) begalinę kelionę daugiakampio viršūnėmis. Ją atitinka lankų seka

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots,$$

čia $\alpha_{n+1} = \alpha_1$, $\alpha_{n+2} = \alpha_2$ ir taip toliau. Dabar nagrinėkime žvaigždę $Z_{n,k}$. Jos viršūnės yra $A_k, A_{2k}, \dots$. Žvaigždės kampą prie viršūnės A_{ik} pažymėkime β_i. Iš brėžinio (8 pav., čia $k = 3$) matyti, kad kampas β_1 yra įbrėžtinis, taigi



8 pav.

$$\beta_1 = \pi - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{2k}).$$

Analogiškai

$$\beta_i = \pi - \frac{1}{2}(\alpha_{1+(i-1)k} + \cdots + \alpha_{ik} + \alpha_{ik+1} + \cdots + \alpha_{(i+1)k}).$$

Taigi žvaigždės visų kampų suma lygi

$$T_{n,k} = n\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{1+(i-1)k} + \cdots + \alpha_{ik} + \alpha_{ik+1} + \cdots + \alpha_{(i+1)k}).$$

Į sumą pagal i įeina dydžiai $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n(k+1)}$; pažymėkime šią sumą R_n. Visi jos nariai, išskyrus pirmųjų k ir paskutinių k narių grupes, pasirodo lygiai po du kartus. Tačiau $\alpha_1 = \alpha_{1+nk}, \ldots, \alpha_k = \alpha_{n(k+1)}$, todėl galime teigti, kad

$$R_n = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{nk}).$$

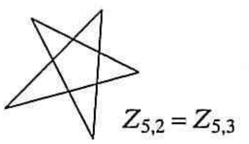
Tačiau

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \alpha_{1+tn} + \alpha_{2+tn} + \cdots + \alpha_{n(t+1)} = 2\pi,$$

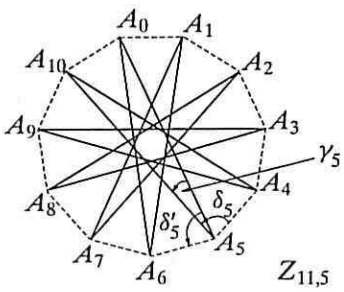
todėl $R_n = 4\pi k$ ir $T_{n,k} = \pi(n - 2k)$.

Ar rezultatas lieka galioti ir tada, kai apie daugiakampį negalima apibrėžti apskritimo?

Teorema apie žvaigždės $Z_{n,k}$ vidaus kampus



9 pav.



10 pav.

Ankstesnio tyrinėjimo įkvėpti suformuluokime teiginį:

Jei n ir k didžiausias bendrasis daliklis lygus 1, tai žvaigždės $Z_{n,k}$, kurią gauname jungdami kas k-ąją iškilojo n-kampio viršūnę, kampų suma lygi $\pi(n - 2k)$.

Jeigu šis teiginys būtų teisingas, tai žvaigždės $Z_{2m+1,m}$ išorės kampų suma būtų lygi π. Tačiau taip ir yra! Tik pažvelkime į 9 pav. ir 10 pav. Pirmajame iš jų pavaizduota egzamino uždavinio žvaigždė. Jau žinome, kad jos kampų suma lygi π. Panagrinėkime žvaigždę $Z_{11,5}$ (10 pav.). Keturis kampus, kurių viršūnė A_i ta pati, pažymėkime taip: γ_i — žvaigždės kampą, δ_i, δ_i' — kampus tarp iškilojo daugiakampio ir žvaigždės kraštinių, β_i — daugiakampio kampą. Iš brėžinio (10 pav.) matyti, kad

$$\delta_i + \delta_i' = \gamma_i + \beta_i. \tag{4}$$

O dabar nagrinėkime trikampius, kuriuos sudaro dvi žvaigždės kraštinės ir viena daugiakampio kraštinė, pavyzdžiui, $\triangle A_{10}A_4A_5$. Sudėję trikampio vidaus kampus, gauname

$$\pi = \gamma_{10} + \delta_4' + \delta_5. \tag{5}$$

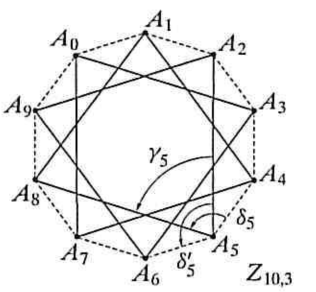
Kitiems trikampiams teisingos analogiškos (5) lygybės. Visas jas sudėję ir sugrupavę narius, gauname

$$(2m+1)\pi = \sum_{i=1}^{2m+1} \gamma_i + \sum_{i=1}^{2m+1} (\delta_i + \delta_i') = T_{2m+1,m} + \sum_{i=1}^{2m+1} (\delta_i + \delta_i').$$

Pasinaudoję (4), pastarąją lygybę galime perrašyti taip:

$$(2m+1)\pi = T_{2m+1,m} + T_{2m+1,m} + \sum_{i=1}^{2m+1} \beta_i = 2T_{2m+1,m} + S_{2m+1}.$$

O iš šios lygybės jau nesunku nustatyti, kad $T_{2m+1,m} = \pi$.



11 pav.

Dabar jau beveik aišku, kaip elgtis bendriausiu atveju (žr. 11 pav., kuriame pavaizduota žvaigždė $Z_{10,3}$). Žymenys $\beta_i, \gamma_i, \delta_i, \delta_i'$ reiškia tą patį kaip ir anksčiau, (4) lygybė taip pat lieka galioti. Tačiau nagrinėdami figūrą, kurią sudaro dvi iš viršūnės A_l išeinančios žvaigždės kraštinės ir daugiakampio kraštinės, gauname nebe trikampį. Iš tiesų tai iškilasis daugiakampis $A_lA_{l+k}\ldots A_{l-k}$, turintis $n-2k+2$ viršūnių, brėžinyje vienas iš tokių daugiakampių yra $A_5A_8A_9A_0A_1A_2$. Šio daugiakampio vidaus kampų suma

$$\gamma_l + \delta_{l+k} + \beta_{l+k+1} + \cdots + \beta_{l-k-1} + \delta_{l-k}' = \pi(n-2k),$$
$$(l = 1, 2, \ldots n).$$

Ką gausime sudėję visas šias lygybes? Svarbu pastebėti, kad kiekvienas narys $\beta_1, \ldots, \beta_n$ pasitaikys $n-2k-1$ kartų. Tai ne taip paprasta įžvelgti; geriausia panagrinėti paprastos žvaigždės brėžinį. Taigi

$$T_{n,k} + \sum_{i=1}^{n}(\delta_i + \delta_i') + (n-2k-1)\sum_{i=1}^{n}\beta_i = \pi(n-2k)n.$$

Pasirėmę (4) lygybe, gauname

$$2T_{n,k} + (n-2k)\sum_{i=1}^{n}\beta_i = \pi(n-2k)n.$$

Kadangi n-kampio vidaus kampų suma lygi $(n-2)\pi$, tai įstatę šią reikšmę ir sutvarkę reiškinius galutinai gauname

$$T_{n,k} = (n-2k)\pi.$$

Štai čia ir pasibaigia mūsų kelionė. Gal kas nors sugebėtų ją kaip nors pratęsti?