$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 2, 71–76

Grandininės trupmenos

Rimantas Skrabutėnas
rskr@takas.lt

Kiekvienas realusis skaičius gali būti užrašytas grandinine trupmena. Straipsnyje nagrinėjamos jų savybės ir taikymas. Pavyzdžiais parodoma, kaip grandininėmis trupmenomis skleidžiami racionalieji skaičiai ir kvadratinės iracionalybės.

R. Skrabutėnas — Vilniaus padagoginio universiteto docentas. Parašė skaičių teorijos mokslo darbų ir mokomųjų knygų.

Dar mokykloje sužinome, kad skaičiai gali būti įvairiai užrašomi. Štai racionaliuosius skaičius galima užrašyti kaip paprastąsias (taisyklingas arba ne) arba dešimtaines trupmenas. Dešimtainė trupmena gali būti baigtinė arba begalinė. Įrodyta, kad racionalieji skaičiai užrašomi tiktai baigtinėmis arba begalinėmis, bet periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis. Bendresniu atveju galima kalbėti apie skaičiaus sisteminį užrašą bet kokiu natūraliuoju pagrindu $g > 1$. Tuokart skaičiaus išraiškos tipas priklauso nuo pasirinktojo pagrindo g. Pavyzdžiui, racionalusis skaičius (netaisyklingoji trupmena) $t = \frac{13}{6}$ užrašomas begaline periodine (tiksliau — mišriąja periodine) dešimtaine trupmena: $t = 2{,}1666... = 2{,}(6)_{10}$. Pasirinkus dvyliktainę skaičiavimo sistemą, tą patį skaičių galima užsirašyti jau baigtine dvyliktaine trupmena $t = 2{,}2_{12}$.

Yra dar vienas realiųjų skaičių rašymo būdas, nebepriklausantis nuo iš anksto parenkamos skaičiavimo sistemos, o tiktai nuo paties skaičiaus.

Grandininės trupmenos ir jų reduktai

Imkime racionaliųjų skaičių aibės $\mathbb{Q}$ elementą $t = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ir sveikiesiems skaičiams a ir b pritaikykime (iš dalybos su liekana teoremos išplaukiantį) *Euklido algoritmą*:

$$\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_1, \quad 0 < r_1 < |b|,\\
b &= r_1 q_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2,\\
&\vdots\\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1},\\
r_{n-1} &= r_n q_n.
\end{aligned}$$

Skaičius q_i vadinsime nepilnaisiais santykiais.

Iš šių lygybių nuosekliai išreikšdami skaičius $\frac{a}{b}, \frac{b}{r_1}, \frac{r_1}{r_2}, \ldots, \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n$, racionalųjį skaičių t galime užrašyti daugiaaukšte trupmena:

$$t = \frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{r_1/r_2}} = \\
= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}. \tag{1}$$

Šią trupmeną žymėsime $[q_0, q_1, \ldots, q_n]$. Sakome, kad racionalusis skaičius t išreikštas *baigtine grandinine trupmena* (BGT). Iš Euklido algoritmo išplaukia, kad pirmasis elementas q_0 (skaičiaus *t sveikoji dalis*) gali būti lygus nuliui ar neigiamam sveikajam skaičiui, o kiti BGT elementai yra natūralieji skaičiai. Jei paskutinis elementas q_n yra lygus vienetui, tai

$$q_{n-1} + \frac{1}{q_n} = q_{n-1} + \frac{1}{1} = q_{n-1} + 1$$

ir BGT užrašas tiesiog sutrumpėja: $[q_0, q_1, \ldots, q_{n-1} + 1]$. Todėl susitarta laikyti $q_n \neq 1$. Tada nesunku parodyti, kad konkrečiam racionaliajam skaičiui (1) išraiška yra *vienintelė*.

1 teorema. *Kiekvienas racionalusis skaičius $t = \frac{a}{b}$ yra vienareikšmiškai išskleidžiamas (1) pavidalo BGT, kurios elementai yra nepilnieji santykiai, gauti skaičiams a ir b taikant Euklido algoritmą.*

Pavyzdžiui, išskleiskime BGT racionalųjį skaičių $\frac{705}{31}$. Skaičiams 705 ir 31 taikome Euklido algoritmą: $705 = 22 \cdot 31 + 23$, $31 = 1 \cdot 23 + 8$, $23 = 2 \cdot 8 + 7$, $8 = 1 \cdot 7 + 1$, $7 = 7 \cdot 1$.

Nepilnieji santykiai $q_0 = 22$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$, $q_4 = 7$ ir yra ieškomo skleidinio elementai. Todėl $\frac{705}{31} = [22, 1, 2, 1, 7]$.

Baigtinių grandininių trupmenų sąvoką galima apibendrinti. Tarkime, $q_0, q_1, \ldots$ yra realieji skaičiai, $q_i > 0$, kai $i \geqslant 1$. Pažymėkime:

$$\begin{aligned} &[q_0] = q_0, [q_0, q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1}, \\ &[q_0, q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &[q_0, q_1, \ldots] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \cdots}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Reiškinį (2) vadinsime begaline grandinine trupmena. Aišku, kol kas toks užrašas tėra formalus, nežinome, ar jis reiškia kokį nors skaičių. Toliau nagrinėsime grandinines trupmenas, kai q_i — sveikieji skaičiai.

Apibrėžimas. *Nutraukus GT (baigtinę ar begalinę) ties jos r-uoju (suprantama, kad BGT atveju $r \leqslant n$) elementu, gautą racionalųjį skaičių $R_r = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_r] = \frac{P_r}{Q_r}$ vadiname tos GT r-osios eilės (arba r-uoju) reduktu.*

Reduktų skaitikliai ir vardikliai turi daug įdomių savybių, leidžiančių efektyviai taikyti GT. Pastebėsime, kad daugeliui šių savybių GT elementų q_i sveikareikšmiškumas nėra būtina sąlyga.

1. Galima įrodyti (pvz., matematinės indukcijos metodu), kad su visais $k \geqslant 2$, GT k-ojo redukto skaitikliai P_k ir vardikliai Q_k tenkina rekurenčiąsias išraiškas: $P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}$, $Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$. Dėl patogumo papildomai apibrėžus $P_{-1} = 1$ ir $Q_{-1} = 0$, rekurenčiosios formulės galioja su visais $k \geqslant 1$.

   Iš tikrųjų pagal (1) apibrėžimą

   $$\begin{aligned} R_{k+1} &= [q_0, q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}] = \\ &= \left[q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}, q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right], \end{aligned}$$

   todėl pasinaudoję indukcijos prielaida gauname

   $$\begin{aligned} R_{k+1} &= \frac{(q_k + \frac{1}{q_{k+1}})P_{k-1} + P_{k-2}}{(q_k + \frac{1}{q_{k+1}})Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \\ &= \frac{q_{k+1}(q_k P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}}{q_{k+1}(q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}} = \\ &= \frac{q_{k+1} P_k + P_{k-1}}{q_{k+1} Q_k + Q_{k-1}}. \end{aligned}$$

   Iš šios reduktų savybės išplaukia, kad vardikliai Q_i yra natūralieji skaičiai ir sudaro griežtai didėjančią seką, kai $i \geqslant 1$.
2. Indukcijos būdu taip pat nesunku parodyti, kad $P_{k-1}Q_k - P_k Q_{k-1} = (-1)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
3. GT reduktai yra nesuprastinamos trupmenos, t. y. su visais k, $(P_k, Q_k) = 1$. Tarę, jog $(P_k, Q_k) = d > 1$, pagal 2-ą savybę gautume prieštarą, kad $d \mid 1$.
4. Reduktų su lyginiais numeriais seka (R_{2k}) yra didėjanti, o seka (R_{2k+1}) yra mažėjanti. Ši savybė išplaukia iš lygybės

   $$\frac{P_l}{Q_l} - \frac{P_{l-2}}{Q_{l-2}} = \frac{(-1)^{l-1} q_l}{Q_l Q_{l-2}},$$

   įstačius vietoje l paeiliui $2k$ ir $2k + 1$.

   BGT atveju paskutinis reduktas (lyginis arba nelyginis) sutampa su išskleistuoju racionaliuoju skaičiumi.

5. Su visais k galioja nelygybės: $R_{2k} < R_{2k+1}$ ir $R_{2k} < R_{2k-1}$. Savybė įrodoma du kartus paeiliui (kai $l = 2k$ ir $l = 2k+1$) pasinaudojus lygybe
$$\frac{P_l}{Q_l} - \frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}} = \frac{(-1)^{l-1}}{Q_l Q_{l-1}}.$$
6. Su visais k ir l galioja nelygybė $R_{2k} < R_{2l+1}$. Pavyzdžiui, kai $k > l$, iš 4–5 savybių gauname $R_{2k} < R_{2k+1} < R_{2l+1}$.
7. Kai GT baigtinė, su visais $k \leqslant n-1$
$$|t - R_k| \leqslant |R_{k+1} - R_k| = \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \leqslant \frac{1}{Q_k^2}.$$

Baigtinės ar begalinės GT reduktus patogu skaičiuoti sudarant atitinkamą lentelę, kurioje reduktų skaitikliai ir vardikliai randami remiantis rekurenčiosiomis formulėmis. Pavyzdžiui, raskime visus mūsų išskleisto skaičiaus $\frac{705}{31} = [22, 1, 2, 1, 7]$ reduktus. Sudarome lentelę:

k	-1	0	1	2	3	4
q_k		**22**	**1**	**2**	**1**	**7**
P_k	1	22	23	68	91	705
Q_k	0	1	1	3	4	31

Todėl $R_0 = \frac{22}{1}$, $R_1 = \frac{23}{1}$, $R_2 = \frac{68}{3}$, $R_3 = \frac{91}{4}$, $R_4 = \frac{705}{31}$. Šiuo atveju pats skaičius sutampa su lyginės eilės reduktu R_4. Žinant racionaliojo skaičiaus skleidinį, pats skaičius yra paskutinis šitaip apskaičiuotas reduktas. Be to, pagal 3-ią reduktų savybę atsakymas gaunamas nesuprastinamos trupmenos pavidalu. Pavyzdžiui, $\beta = [3, 7, 15, 1, 292]$.

k	-1	0	1	2	3	4
q_k		**3**	**7**	**15**	**1**	**292**
P_k	1	3	22	333	355	103 993
Q_k	0	1	7	106	113	33 102

Todėl $\beta = R_4 = \frac{103\,993}{33\,102}$, $(103\,993, 33\,102) = 1$.

Kai grandininė trupmena yra begalinė, jos reduktų yra be galo daug. Teisingas toks teiginys.

2 teorema. *Begalinės GT reduktų seka* (R_i) *visada konverguoja.*

Dabar (2) reiškiniui galima suteikti prasmę.

Apibrėžimas. *Konverguojančios reduktų sekos* (R_i) *riba* α *vadinama* GT (2) *reikšme ir rašoma*
$$\alpha = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots] = \\ = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}.$$

Svarbu yra tai, kad baigtine ar begaline GT galima užrašyti *bet kokį realųjį* skaičių. Tik (2) užrašas tada gali būti ir begalinis.

3 teorema. *Bet kokį realųjį skaičių* α *galima vienareikšmiškai išskleisti GT, kuri yra baigtinė, kai* α *yra racionalusis, ir begalinė, kai* α *— iracionalusis skaičius.*

Įrodymas. Iš pradžių priminsime, kad kiekvienas realusis skaičius x vienareikšmiškai užrašomas *sveikosios dalies* $[x]$ ir *trupmeninės dalies* $\{x\}$ suma: $x = [x] + \{x\}$, $0 \leqslant \{x\} < 1$.

Jei $q_0 = [\alpha]$, o $\frac{1}{r_1} = \{\alpha\}$, tai $\alpha = q_0 + \frac{1}{r_1} = [q_0, r_1]$. Jei tik α nėra sveikasis skaičius, tai $r_1 > 1$. Pažymėję $[r_1] = q_1$, o $\frac{1}{r_2} = \{r_1\}$, kai $r_2 > 1$, galime užrašyti
$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{r_2}} = [q_0, q_1, r_2].$$

Šitą procesą galima tęsti toliau. Kai $(n+1)$-uoju žingsniu $r_n > 1$, tai pažymime $[r_n] = q_n$ ir $\frac{1}{r_{n+1}} = \{r_n\}$. Be to, su kiekvienu n galioja
$$\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, r_{n+1}]. \tag{3}$$

Kaip matėme anksčiau, kai α yra racionalusis, aprašytas procesas yra baigtinis. Tai išplaukia iš Euklido algoritmo. Kai α yra iracionalusis skaičius, aprašytas procesas negali būti baigtinis, nes gautume prieštarą: racionalusis skaičius yra lygus iracionaliajam.

Tad iracionalaus skaičiaus α atveju gauname jo skleidinį *begaline* GT $[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots]$. Skleidinio vienatis išplaukia iš skaičiaus sveikosios dalies vienareikšmiškumo.

Racionalųjį skaičių $[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n]$ žymime R_n ir vadiname grandininės trupmenos $[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots]$ n-uoju reduktu. Šių sąvokų prasmė paaiškėja pastebėjus, kad GT reikšmė sutampa su pačiu skaičiumi α.

4 teorema. *Skaičiaus α grandininės trupmenos reduktų sekos (R_n) riba yra būtent išskleistasis skaičius α.*

Realaus skaičiaus α skleidinio GT reduktus įprasta vadinti tiesiog *skaičiaus α reduktais.* Pasinaudojus reduktų savybėmis, galima įrodyti, kad

$$|\alpha - R_n| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{Q_n^2}. \tag{4}$$

Grandininės trupmenos ir realiųjų skaičių artiniai

Realųjį skaičių α galima norimu tikslumu išreikšti racionaliaisiais skaičiais. Tam gerai tinka to skaičiaus reduktai, tereikia tik paimti reduktą su pakankamai dideliu numeriu. Pasirodo, kad toks įvertis yra tam tikra prasme geriausias. Patikslinsime šią sąvoką.

Apibrėžimas. *Racionalusis skaičius $\frac{a}{b}$ vadinamas geriausiu realaus skaičiaus α artiniu, jei nėra trupmenos $\frac{p}{q}$, $1 \leqslant q \leqslant b$, su kuria galiotų*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|.$$

5 teorema. *Realaus skaičiaus skleidinio GT reduktai yra jo geriausi artiniai.*

Pabrėžtina, kad sąvoka *geriausias artinys* nereiškia, kad jis tiksliausias, nes iracionalaus skaičiaus atveju tiksliausio artinio paprasčiausiai nėra. Šia sąvoka pabrėžiama, kad parenkant skaičiaus artinį tikslumas nėra vienintelis kriterijus. Dažnai patogiau vietoje tikslesnio, bet gremėzdiško artinio taikyti mažiau tikslų, bet paprastesnės išraiškos skaičių.

Grandininėmis trupmenomis susidomėta po to, kai garsus naujųjų amžių olandų fizikas, astronomas ir matematikas Hiuigensas (Christian Huygens, 1629–1695), bandydamas sukurti mechaninį planetų judėjimo modelį, susidūrė su dantračių, kurių dantukų santykis turi būti kuo artimesnis tam tikram skaičiui, parinkimo problema. Dantukų skaičius dantratyje negali būti itin didelis, todėl reikėjo ieškoti dviejų, palyginti nedidelių natūraliųjų skaičių, kurių santykis būtų artimas tam skaičiui. Šimtmečiu vėliau sistemingą GT teoriją sukūrė šveicarų matematikas Oileris (Leonhard Euler, 1707–1783), jo darbus tęsė prancūzų matematikas Lagranžas (Joseph Louis Lagrange, 1736–1813).

GT plačiai taikomos aproksimavimo uždaviniams. Pavyzdžiui, žinoma, kad vidutinis parų astronominiuose metuose skaičius α yra iracionalusis. Apskaičiuota keletas jo skleidinio begaline GT elementų:

$$\alpha = 365{,}24220... = [365, 4, 7, 1, 3, \ldots].$$

Pirmieji reduktai yra tokie: $R_0 = 365$, $R_1 = 365\frac{1}{4}$, $R_2 = 365\frac{7}{29}$, $R_3 = 365\frac{8}{33}$. Jau senovės Romoje buvo žinomas reduktas $R_1 = 365\frac{1}{4}$; juo remiantis sudarytas vadinamasis Cezario kalendorius, pagal kurį metuose yra 365 ir dar ketvirtis paros. Kas ketvirti (keliamieji) metai buvo pailginami viena para. Tačiau R_1 nėra labai tikslus α artinys, todėl jau XV amžiuje Cezario kalendorius buvo atsilikęs nuo tikslaus Saulės laiko net 10 parų. 1589 metais popiežius Grigalius patikslino Cezario kalendorių, keliamaisiais nelaikydamas šimtmečių, kurių pirmieji du skaitmenys sudaro dviženklį skaičių, nesidalijantį iš 4. Pavyzdžiui, 1500 metai pagal Grigaliaus kalendorių nėra keliamieji. Tai reikštų, kad $\alpha \approx 365\frac{97}{400}$. Bet ir Grigaliaus kalendorius nebuvo labai tikslus. Jo paklaida — 3 paros per 10 000 metų. Persų poetas ir matematikas Omaras Chajamas apie 1079 metus buvo sudaręs dar tikslesnį kalendorių, keliamaisiais 7 kartus iš eilės laikydamas kas ketvirtus metus, o aštuntą kartą — kas penktus metus. Vadinasi, $\alpha \approx 365\frac{8}{33}$, o tai yra R_3. Chajamo kalendoriaus paklaida mažesnė — tik 2 paros per 10 000 metų.

Visas skaičiaus π skleidinys nėra žinomas, tačiau, žinoma gana daug jo GT elementų ir reduktų. Pasirodo, didelis tikslumas pasiekiamas gana greitai. Yra apskaičiuota, kad

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, \ldots].$$

Tada, pasinaudoję tuo, kad skaičiaus $\beta = [3, 7, 15, 1, 292]$ skleidinio elementai sutampa su pirmaisiais π elementais, turime pirmuosius 5 skaičiaus π reduktus — geriausius artinius:

$$R_0 = \frac{3}{1}, \quad R_1 = \frac{22}{7}, \quad R_2 = \frac{333}{106},$$
$$R_3 = \frac{355}{113}, \quad R_4 = \frac{103\,993}{2733\,102}.$$

Įdomu tai, kad skaičiai $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, kaip π artiniai, buvo žinomi gerokai iki GT teorijos atsiradimo. Artinį $\frac{22}{7}$ žinojo dar Archimedas (287–217 m. pr. Kr.), o prieš 1500 metų Kinijoje skaičiavimams jau buvo naudojami ir artiniai $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$. Reduktas R_1 skiriasi nuo π mažiau nei $\frac{1}{700}$. Kadangi π skleidinyje $q_4 = 292$, tai reduktai R_2 ir ypač R_3 yra labai tikslūs artiniai. Pavyzdžiui,

$$|\pi - R_3| \leqslant \frac{1}{113 \cdot 33\,102} < 0{,}0000002.$$

GT plačiai taikomos ne tik aproksimacijoms, bet ir diofantinėms (neapibrėžtosioms) lygtims, lyginiams spręsti. Pavyzdžiui, paprasčiausios diofantinės lygties $ax + by = c$ su sveikaisiais koeficientais a, b, c bendrasis sprendinys, kai $(a, b) = 1$, apskaičiuojamas pagal formules:

$$x = (-1)^{n-1} c Q_{n-1} + bt, \quad y = (-1)^n c P_{n-1} - at;$$

čia $R_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ yra skaičiaus $\frac{a}{b}$ skleidinio BGT priešpaskutinis reduktas, o t — sveikasis skaičius.

Periodinės grandininės trupmenos

Išskleisti realųjį skaičių grandinine trupmena — anaiptol nėra paprastas uždavinys. Tik racionaliuosius skaičius ir kvadratines iracionalybes išskleisti GT palyginti nesudėtinga.

Apibrėžimas. *Realųjį, bet neracionalųjį kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ su sveikaisiais koeficientais a, b, c sprendinį α vadiname kvadratine iracionalybe.*

Pavyzdžiui, $\sqrt{7}$ ir $1 + \sqrt{3}$ yra kvadratinės iracionalybės, nes yra atitinkamai kvadratinių lygčių $x^2 - 7 = 0$ ir $x^2 - 2x - 2 = 0$ šaknys. Skleisdami kvadratinę iracionalybę $\sqrt{2}$ GT, gauname:

$$\sqrt{2} = [\sqrt{2}] + \{\sqrt{2}\} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \ldots,$$

ir procesas ima kartotis. Todėl $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots]$.

Apskaičiavę $R_1 = \frac{3}{2}$, $R_2 = \frac{7}{5}$, $R_3 = \frac{17}{12}$, $R_4 = \frac{41}{27}$, pastebime, kad jau R_3 yra gana tikslus skaičiaus $\sqrt{2}$ artinys, nes pagal (4)

$$\left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| < \frac{1}{12 \cdot 27} < 0{,}0031.$$

Pasirodo, kad šitoks $\sqrt{2}$ skleidimo rezultatas ne atsitiktinumas, o dėsningumas. Dar 1770 metais Lagranžas įrodė, kad periodinių begalinių GT aibė sutampa su kvadratinių iracionalybių aibe.

Apibrėžimas. *Begalinė grandininė trupmena $\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots]$ vadinama periodine, jei egzistuoja tokie natūralieji skaičiai m ir h, kad su bet kuriuo $k \geqslant m$ galioja lygybė $q_{k+h} = q_k$.*

Sutrumpintai rašome
$\alpha = \lfloor q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}, \overline{q_m, \ldots, q_{m+h-1}} \rfloor$.

Kaip ir sisteminių trupmenų teorijoje galima kalbėti apie *grynai periodines* ir *mišrias periodines* begalines GT. Jei $m = 0$, tai GT vadinama *grynai periodine.*

6 teorema (Lagranžo). *Kiekvienos periodinės GT reikšmė yra lygi kvadratinei iracionalybei. Ir atvirkščiai: kiekviena kvadratinė iracionalybė išskleidžiama periodine (grynąja ar mišriąja) GT.*

Pagal turimą skaičiaus α skleidinį grynai periodine GT

$$\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{h-1}, q_0, q_1, \ldots, q_{h-1}, \ldots]$$

kvadratinę iracionalybę, kurią tas skleidinys išreiškia, patogiausia rasti naudojantis formule

$$\alpha = \frac{\alpha P_{h-1} + P_{h-2}}{\alpha Q_{h-1} + Q_{h-2}}; \tag{5}$$

čia h yra GT elementų periode skaičius (periodo ilgis).

Ši formulė išplaukia iš (3) išraiškos, kuri šiuo atveju yra $\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{h-1}, \alpha]$. Pertvarkę (5) formulę, gauname kvadratinę lygtį atžvilgiu α:

$$Q_{h-1}\alpha^2 + (Q_{h-2} - P_{h-1})\alpha - P_{h-2} = 0. \tag{6}$$

Kai turime skleidinį mišria periodine GT su ilgio m priešperiodžiu

$$\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}, q_m, q_{m+1}, \ldots, q_{m+h-1}, q_m, \ldots, q_{m+h-1}, \ldots],$$

tai patogiausia iš pradžių pagal (6) formulę rasti kvadratinę iracionalybę α_m, išreiškiančią atitinkamą grynai periodinę GT, o tada jau skaičių α apskaičiuoti iš išraiškos:

$$\alpha = \frac{\alpha_m P_{m-1} + P_{m-2}}{\alpha_m Q_{m-1} + Q_{m-2}}. \tag{7}$$

Pavyzdžiui, kai $\alpha = \lfloor 1, 2, \overline{1, 1, 3} \rfloor$, tai $m = 2$, $h = 3$. Tada sudarome lentelę grynai periodinei trupmenai $\alpha_2 = [1, 1, 3, 1, 1, 3, \ldots]$ apskaičiuoti:

k	-1	1	2	3
q_k		1	1	3
P_k	1	1	2	7
Q_k	0	1	1	4

Įstatę šiuos skaičius į (6) formulę, gauname

$$\frac{7\alpha_2 + 2}{4\alpha_2 + 1} = \alpha_2, \quad \text{arba} \quad 2\alpha_2^2 - 3\alpha_2 - 1 = 0.$$

Iš čia $\alpha_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$. Dabar apskaičiuojame α. Tuo tikslu vėl sudarome lentelę, tik dabar jau pagal priešperiodžio elementus:

k	-1	1	2
q_k		1	2
P_k	1	1	3
Q_k	0	1	2

Pagal (7) formulę galutinai gauname

$$\alpha = \frac{\alpha_2 \cdot 3 + 1}{\alpha_2 \cdot 2 + 1} = \frac{13 + 3\sqrt{17}}{10 + 2\sqrt{17}} = \frac{7 + \sqrt{17}}{4}.$$

Apie kvadratinių iracionalybių skleidimą periodinėmis GT yra gauta daug įdomių rezultatų. Pavyzdžiui, įrodyta, kad $\alpha = \frac{p+\sqrt{d}}{q}$ kvadratinė iracionalybė (čia p, q — sveikieji, d — natūralusis ir $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$) išskleidžiama grynai periodine GT tada ir tiktai tada, kai $\alpha > 1$, o skaičius $\alpha_1 = \frac{p-\sqrt{d}}{q}$ patenka į intervalą $(-1, 0)$.

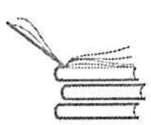
Kai $d \in \mathbb{N}$, tai $\sqrt{1 + d^2} = [d, 2d, 2d, \ldots]$. Šį faktą siūlau skaitytojams įrodyti savarankiškai.

Nors bendro algoritmo nėra, bet svarbesnių iracionaliųjų konstantų skleidiniai yra gerai ištyrinėti. Jau kalbėjome apie skaičiaus π skleidinį. Pažymėtina, kad dar 1685 metais buvo apskaičiuoti (J. Wallis) pirmieji 34 skaičiaus skleidinio elementai. Dabar jų žinoma per 200 000. Oileris 1737 metais surado skaičiaus

$$\frac{e^{\frac{2}{k}} - 1}{e^{\frac{2}{k}} + 1}$$

skleidinį, su bet kokiu natūraliuoju k. Jis rado ir itin svarbios matematikoje konstantos — skaičiaus $e = 2{,}71828\ldots$ skleidinį:

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots].$$



1. A. Baker, *Įvadas į skaičių teoriją* (rus.), Minskas, 1995.
2. A.A. Buchštab, *Skaičių teorija* (rus.), Maskva, 1965.
3. K. Bulota, P. Survila, *Algebra ir skaičių teorija*, II t., Mokslas, Vilnius, 1990.
4. P. Bundschuh, *Einführung in die Zahlentheorie*, Springer, Berlin, 1996.
5. E. Kraetzel, *Zahlentheorie*, VEB, Berlin, 1981.