$\alpha+\omega$, 2000, Nr. 2, 69–70

Tretieji Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos metai

Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla pradėjo trečiuosius savo gyvavimo metus. Priimti moksleiviai 2000–2002 mokslo metams.

Mokyklos tikslas:

- Sudaryti galimybę Lietuvos moksleiviams gilinti matematikos žinias.
- Skatinti moksleivius dirbti savarankiškai, padėti tvirtus matematikos pagrindus studijoms aukštosiose mokyklose.
- Organizuoti moksleivių matematikos uždavinių sprendimo konkursus, informuoti apie tarptautinius konkursus ir skatinti juose dalyvauti.
- Supažindinti moksleivius su matematikos taikymo galimybėmis.

Primename, kad mokykla yra dvimetė. Jos klausytojais priimami XI klasės, o rekomendavus matematikos mokytojui ir žemesnių klasių moksleiviai, išsprendę stojamąsias užduotis bei sumokėję 20 Lt stojamąjį mokestį (sąskaitos numerį pranešime).

Mokyklos programa sudaroma atsižvelgiant į vidurinės mokyklos matematikos programas ir skelbiama kartu su stojamąja užduotimi.

Klausytojų atsiųsti darbai negrąžinami. Jiems pranešami tik įvertinimai.

Iš viso numatoma išnagrinėti aštuonias temas: pirmąsias keturias — šiais mokslo metais, o likusias keturias — kitais. Mokslą planuojame baigti 2002 metų kovo mėnesį uždavinių sprendimo konkursu Vilniaus universitete.

Metodinę medžiagą bei užduotis skelbsime Interneto svetainėje: *http://www.mif.vu.lt/ljmm/* ir Švietimo ir mokslo ministerijos informaciniame leidinyje. Išsamių straipsnių atskiromis programos temomis, taip pat informacijos apie LJMM veiklą bus galima rasti matematikos žurnale „Alfa plius omega“.

Sėkmingai įvykdę visą programą, klausytojai gaus Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos baigimo pažymėjimus.

2000–2002 m. m. Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos programa

1. Skaičių dalumas.
2. Vidurkiai (aritmetinis, geometrinis, harmoninis ir kt.).
3. Grandininės trupmenos.
4. Figūrų plotai.
5. Sekos.
6. Vektoriai.
7. Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.
8. Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.

Adresas: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos katedra, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-2600 Vilnius.

2000–2002 m. m. stojamoji užduotis

1. Suprastinkite:

$$\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b}+\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^3+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Iš dviejų miestų A ir B vienas priešais kitą vienu metu išvyko motociklininkas ir dviratininkas. Važiuodami pastoviais greičiais, jie susitiko po 45 min. Per kiek laiko motociklininkas iš miesto A nuvažiavo į miestą B, jeigu kelionėje jis užtruko dviem valandomis ilgiau negu dviratininkas, važiuodamas iš B į A?

3. Išspręskite nelygybę

$$\frac{9}{(x+1)^2} \geqslant 1.$$

4. Įrodykite nelygybę

$$a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b;$$

čia a ir b — bet kokie realieji skaičiai.

5. Raskite penkiaženklius skaičius $\overline{34x5y}$ (x — šimtų skaitmuo, y — vienetų skaitmuo), kurie dalijasi iš 36.

6. Įrodykite, kad trupmena $\frac{2x+3}{5x+7}$ yra nesuprastinama, kad ir koks būtų sveikasis skaičius x.

7. Apskaičiuokite:

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

8. Raskite daugianario

$$P(x)=(x^2+2x+2)^7+(x^2-3x-3)^7$$

koeficientų prie nelyginių x laipsnių sumą.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2-4y^2-xy+5y=1, \\ x^2+3y^2-xy-4y=-1. \end{cases}$$

10. Trapecijos $ABCD$ pagrindas BC yra apskritimo skersmuo. Šis apskritimas liečia pagrindą AD ir eina per trapecijos įstrižainių vidurio taškus. Raskite trapecijos kampus.

Pirmoji 2000–2002 m. m. užduotis. Skaičių dalumas

Parengė doc. E. Stankus

1. Įrodykite šeštąją dalumo savybę: jei su skaičiais $a_1, a_2, ..., a_m$ ir $b_1, b_2, ..., b_n$ galioja lygybė

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

ir apie visus dėmenis, išskyrus vieną, žinoma, kad jie dalijasi iš a, tuomet ir šis dėmuo dalijasi iš a.

2. Raskite skaičių 3663 ir 1443 didžiausią bendrąjį daliklį.

3. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n skaičius $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 6. Ar šis teiginys galioja, kai n — bet kuris sveikasis skaičius? Atsakymą pagrįskite.

4. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n skaičius n^7+720n dalijasi iš 7.

5. Įrodykite, kad su bet kuriuo $a \in N$ ir bet kuriuo $n \in N$ galioja teiginys:

$$(a^2-a+1)|(a^{2n+1}+(a-1)^{n+2}).$$

6. Ar skaičius $2^{15}+3^{15}$ dalijasi iš 13? Atsakymą pagrįskite.

7. Raskite liekaną, gaunamą skaičių $13^{16}-2^{25}\cdot 5^{15}$ dalijant iš 37.

8. Raskite liekaną, gaunamą skaičių $(116+17^{17})^{21}$ dalijant iš 8.

9. Raskite keturženklius skaičius $\overline{x97y}$, kurie dalijasi iš 45.

10. Raskite skaičiaus 2^{2000} paskutinį skaitmenį.

Penktoji 1999–2001 m. m. užduotis. Matematinės indukcijos metodas

Parengė doc. D. Jurgaitis

1. Užrašykite formulę, kurioje bet kuris nelyginis natūralusis skaičius būtų išreikštas jo eilės numeriu.

2. Raskite pirmųjų n natūraliųjų skaičių kvadratų sumą.

3. Įrodykite, kad

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Apskaičiuokite

$$S_n=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!.$$

5. Įrodykite, kad

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad (x\neq 1).$$

6. Įrodykite, kad trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kubų suma dalijasi iš 9.

7. Įrodykite, kad n skirtingų, susikertančių viename plokštumos taške tiesių dalija tą plokštumą į $2n$ dalių.

8. Įrodykite, kad $u_n=2^n+1$ su visais natūraliaisiais n, kai $u_{n+1}=3u_n-2u_{n-1}$, $u_0=2$, $u_1=3$.

9. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis galioja nelygybė $2^n>n^2+4n+5$? Atsakymą pagrįskite.

10. Įrodykite, kad n bet kokių kvadratų galima sukarpyti į dalis taip, kad iš tų dalių būtų įmanoma sudėti naują kvadratą.