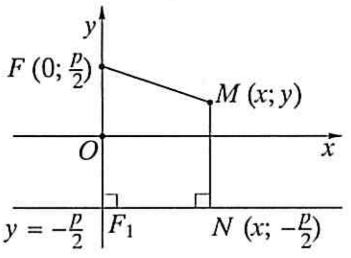
$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 2, 49–52

Parabolė

„Первое сентября" — Maskvoje leidžiamas laikraštis mokytojams turi savaitinį priedą „Matematika". Jame skelbiama tai, ko mokytojams reikia kasdien, — uždavinių rinkiniai, testai, metodiniai straipsniai... Šiam mūsų žurnalo numeriui išvertėme apibendrinančios parabolės temą užduoties medžiagą („Первое сентября", 1997, Nr. 33). Ši užduotis buvo pasiūlyta grupei mokinių. Ją sudaro įvairaus sunkumo uždaviniai, mokiniai taip pat turėjo išnagrinėti kreivės braižymo būdus, įrodyti kai kurias savybes. Užduoties medžiagą spaudai parengė E. Smirnova.

Apibrėžimas. *Parabole vadinama geometrinė vieta taškų, vienodai nutolusių nuo duotojo taško ir duotosios tiesės. Taškas vadinamas parabolės židiniu, tiesė — direktrise.*

Parabolės lygties išvedimas



1 pav.

Duota: taškas F, tiesė l, $FF_1 \perp l$, $FF_1 = p$, $MN \perp l$, $MF = MN$. Parašykite taškų M geometrinės vietos lygtį.

Sprendimas. Pasirinkime koordinačių sistemą taip, kad $Ox \parallel l$, čia O — atkarpos FF_1 vidurio taškas, o F yra Oy ašyje (1 pav.).

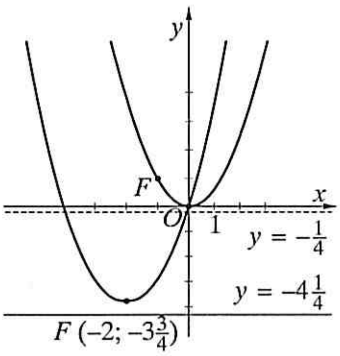
Taško F koordinatės yra $F(0; \frac{p}{2})$, tiesės l lygtis $y = -\frac{p}{2}$. Pažymime $N(x; -\frac{p}{2})$, $M(x; y)$. Kadangi $MN = FM$, tai $MN^2 = FM^2$ ir

$$(x - x)^2 + (y + \frac{p}{2})^2 = (x - 0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2,$$

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}.$$

Parabolės lygtis $x^2 = 2py$, arba $y = \frac{1}{2p}x^2$. Židinys $F(0; \frac{p}{2})$ yra parabolės simetrijos ašyje, o direktrisė — statmena šiai ašiai ir nutolusi nuo viršūnės tiek pat kiek ir židinys.

1 uždavinys. *Raskite parabolių a) $y = \frac{1}{12}x^2$ ir b) $y = x^2 + 4x$ židinius ir direktrises (2 pav.).*

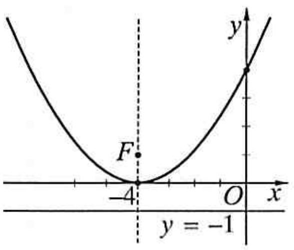


2 pav.

Sprendimas. a) Iš parabolės lygties randame $2p = 12$, $p = 6$. Tada židinys yra $F(0; 3)$, direktrisės lygtis $y = -3$.

b) Lygtį $y = x^2 + 4x$ pertvarkome taip: $y = (x + 2)^2 - 4$. Matome, kad šios funkcijos grafikas yra parabolė, kurią galima gauti iš parabolės $y = x^2$ pastūmus ją į kairę per du ilgio vienetus ir žemyn per keturis ilgio vienetus. Parabolės $y = x^2$ židinys yra $F'(0; \frac{1}{4})$, o direktrisės lygtis — $y = -\frac{1}{4}$. Tada parabolės $y = (x + 2)^2 - 4$ židinys yra $F(-2; -3\frac{3}{4})$, o jos direktrisės lygtis $y = -4\frac{1}{4}$.

2 uždavinys. *Pavaizduokite aibę taškų, vienodai nutolusių nuo taško $F(-4; 1)$ ir tiesės $y = -1$ (3 pav.).*

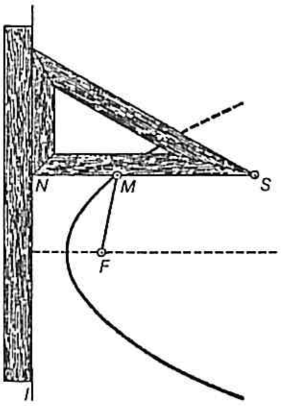


3 pav.

Taškai sudaro parabolę, kurios židinys yra taškas $F(-4; 1)$, o direktrisės lygtis $y = -1$. Parabolės su židiniu $F(0; 1)$ ir direktrise

$y = -1$ lygtis $y = \frac{1}{2p}x^2$, $-\frac{p}{2} = -1$, $p = 2$. Parabolę su židiniu taške $F(-4; 1)$ ir direktrise $y = -1$ gausime pastūmę parabolę $y = \frac{1}{4}x^2$ per keturis ilgio vienetus į kairę, taigi jos lygtis $y = \frac{1}{4}(x+4)^2$.

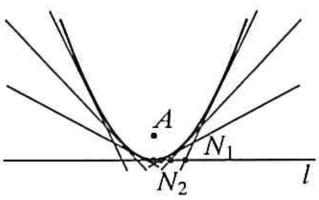
Parabolės braižymas



4 pav.

Parabolės braižymas naudojant įtemptą siūlą. Parabolės, kaip tam tikrų taškų geometrinės vietos, apibrėžimu galima pasinaudoti konstruojant parabolės braižymo prietaisus.

Prietaisą (4 pav.) sudaro liniuotė ir statusis trikampis, vieno iš jo smailiųjų kampų viršūnėje (taške S) pritvirtintas siūlas, kurio ilgis lygus statinio SN ilgiui. Kitas siūlo galas įtvirtintas plokštumos taške — parabolės židinyje. Liniuotę pridedame prie direktrisės. Antrasis stačiojo trikampio statinis slysta išilgai direktrisės, o pieštuko galu įtempiame siūlą ir prispaudžiame prie statinio NS. Kai trikampis slysta liniuote, pieštuko smaigalys brėžia parabolę.



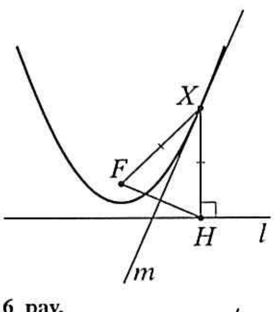
5 pav.

Parabolė — tiesių šeimos gaubiamoji. a) Parabolę galime gauti ne tik nagrinėdami taškus, tenkinančius tam tikrą sąlygą. Panašiai kaip ir elipsė bei hiperbolė, ji yra tam tikros tiesių šeimos gaubiamoji. Vadinasi, parabolė liečia visas šios šeimos tieses. Šias tieses galima gauti taip (5 pav.).

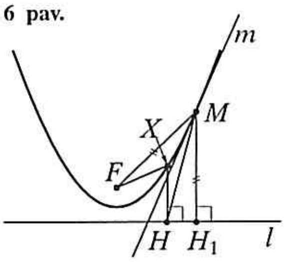
Popieriaus lape pažymėkime tašką A ir nubrėžkime tiesę l. Per kiekvieną tiesės l tašką N nubrėžę tiesę, statmeną NA, gausime tiesių šeimą. Šių tiesių gaubiamoji yra parabolė.

b) Jeigu dviejų susikertančių tiesių l_1 ir l_2 taškai P ir N tolygiai juda šiomis tiesėmis, tai tiesės PN arba sudaro lygiagrečių tiesių šeimą, arba liečia tą pačią parabolę.

Parabolės židinio savybė



6 pav.



7 pav.

Tegu F yra parabolės židinys, l — direktrisė, X — parabolės taškas, $XH \perp l$. Įrodykite, kad parabolės liestinė taške X sudaro vienodus kampus su tiesėmis XF ir XH (6 pav.).

Įrodymas. Iš parabolės apibrėžimo išplaukia $XH = XF$, taigi taškas X priklauso atkarpos FH simetrijos ašiai m. Įrodysime, kad ši simetrijos ašis ir yra parabolės liestinė, t. y. simetrijos ašis su parabole turi vieną bendrą tašką (tašką X), o parabolė yra vienoje simetrijos ašies pusėje.

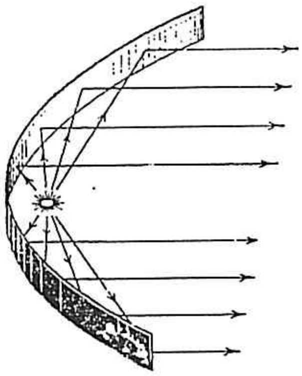
Tiesė m dalija plokštumą į dvi pusplokštumes, vieną iš jų sudaro taškai, kurie yra arčiau F negu H. Įrodysime, kad parabolė yra kaip tik šioje tiesės pusėje.

Tegu M yra parabolės (7 pav.) taškas, nesutampantis su X, $MH_1 \perp l$. Tada iš parabolės taškų savybės gauname $MH_1 = MF$, čia MH_1 yra M atstumas iki l. Statmuo yra trumpesnis už pasvirąją, todėl $MH_1 < MH$. Taigi $FM < MH$, t. y. kiekvienas parabolės taškas (taškas M), išskyrus X, yra pusplokštumėje, kurią sudaro taškai, esantys arčiau F negu H. Taškas X yra vienintelis vienodai nutolęs nuo F ir H. Įrodėme, kad atkarpos HF simetrijos ašis (tiesė m) yra parabolės liestinė, o X — lietimosi taškas.

Atkarpos FX ir XH yra simetriškos liestinės m atžvilgiu, taigi m su FX ir XH sudaro vienodus kampus.

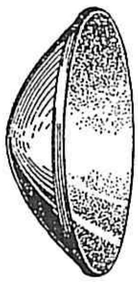
Parabolės savybių taikymas

1. Ploną, gerai nušlifuoto metalo juostelę sulenkus parabolės formos lanku ir nukreipus į šią juostelę pluoštą šviesos spindulių, lygiagrečių su parabolės simetrijos ašimi (statmenų direktrisei), atsispindėję visi šie spinduliai eitų per židinį (8 pav.). Atvirkščiai, jeigu židinyje įdėtume taškinį šviesos šaltinį, tai šviesos spinduliai, atsispindėję nuo juostelės, sudarytų lygiagrečių su parabolės simetrijos ašimi spindulių pluoštą.



8 pav.

2. Prožektoriuose, mašinų žibintuose, švyturiuose naudojamas sukimosi paraboloidas. Tokį paraboloidą gausime sukdami parabolę aplink jos ašį (9 pav.). Visi paraboloido formos veidrodžiai turi parabolės savybę: šviesos spinduliai, išėję iš židinyje įtaisyto šviesos šaltinio, neišsisklaido, bet atsispindėję nuo paraboloido paviršiaus sklinda lygiagrečiai su jo ašimi. Amerikiečių mokslininkas Robertas Vudas, sukdamas indą su gyvsidabriu, sukūrė parabolinį veidrodį. Tai buvo puikus veidrodis! Naudojantis šiuo principu, sukonstruotas specialus teleskopas žvaigždėms ir planetoms stebėti, kai jos yra zenite.



9 pav.

Pakankamai didelį veidrodį, kurio paviršius gautas sukant parabolę apie jos ašį, nukreipus į Saulę, parabolės židinyje susidarytų toks karštis, kad galima būtų lydyti plieną.

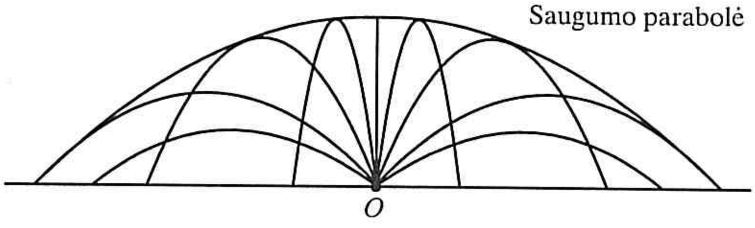
Legenda pasakoja, kad Archimedas (287–212 m. pr. Kr.), gindamas savo miestą Sirakūzus, sudegino romėnų laivyną naudodamasis panašiais veidrodžiais. (Lotyniškai *focus* — židinys ir reiškia karščio šaltinį.)

Ši parabolinių veidrodžių savybė naudojama konstruojant saulės krosnis, teleskopus ir pan. Parabolinės antenos sutelkia į vieną tašką radiolokatoriaus signalus, atsispindėjusius nuo lėktuvo.

3. Kampu mestas į tolį akmuo skrieja parabole. Tą patį galima pasakyti ir apie patrankos sviedinį. Tiesa, oro pasipriešinimas iškreipia parabolės formą ir tikrovėje akmuo lekia kitokia kreive. Tačiau stebėdami judėjimą tuštumoje, pamatytume tikrą parabolę.

Patrankos sviedinius iššovus vienodu pradiniu greičiu v, bet skirtingais kampais, kuriuos sudaro patrankos vamzdis su horizontu, gaunamos skirtingos parabolės, o sviediniai nulekia skirtingus nuotolius. Sviedinys lekia toliausiai, kai vamzdis su horizontu sudaro 45° kampą. Šis maksimalus nuotolis lygus $\frac{v^2}{g}$, čia g — laisvojo kritimo pagreitis. Šaunant vertikaliai aukštyn, sviedinys pakiltų į aukštį $\frac{v^2}{2g}$, dvigubai mažesnį už maksimalų nuotolį.

Jeigu sviedinio pradinis greitis yra tas pats, tai kad ir kaip sukiotume patrankos vamzdį, ant Žemės paviršiaus ir virš jo bus vietų, kur sviedinys patekti negali. Šias vietas nuo tų, į kurias sviedinys gali patekti, taip pat skiria parabolė, kuri vadinama *saugumo* parabole (10 pav.).



10 pav.

Parabolės, kuriomis skrieja sviedinys, liečia saugumo parabolę. Vadinasi, ji yra sviedinių trajektorijų, kuriomis skrieja sviediniai, iššauti vienodu pradiniu greičiu bet skirtingais kampais, gaubiamoji. Šią gaubiamąją nagrinėjant erdvėje, gaunamas paviršius — sukimosi paraboloidas.

Svaidyklių mėtomų svorių trajektorijomis domėjosi dar Aristotelis (384–322 m. pr. Kr.). Jo teiginiai nebuvo paremti bandymais, todėl labai tolimi nuo tiesos. Suprantama, kad Aleksandro Makedoniečio, Aristotelio karališkojo mokinio kariai, mėtydami iš katapultų akmenis į apsuptus persų ir babiloniečių miestus, nesinaudojo Aristotelio teorijomis.

Vienuolis Bertoldas Švarcas XIII amžiuje išrado europiečiams paraką, sukėlusį revoliuciją karyboje. Iš pradžių buvo naudojama tik tiesioginė ugnis, patrankos būdavo be priedangos. Ištyrinėjus patrankos sviedinių trajektorijas, buvo pradėta taikyti permetamoji ugnis iš už priedangos. Pirmasis matematikas, tyręs šiuos klausimus, buvo Nikolo Tartalja (1500–1577) iš Venecijos. Tartalja domėjosi įvairiais matematikos ir mechanikos klausimais, tačiau to meto universitetų mokslininkai nepripažino jo atradimų, kurie kartais vadinami kitų matematikų vardais. Tačiau ir Tartalja nežinojo teorinių dėsnių, kuriems paklūsta skriejantys sviediniai. Šiuos dėsnius, susijusius su kūnų kritimo dėsniais, pirmasis nustatė Galilėjus.