$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 2, 39–48

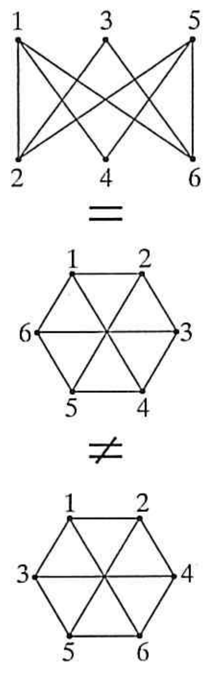
Medžiai ir miškai — ne miškininkystė, bet kombinatorika

Eugenijus Manstavičius
eugenijus.manstavicius@maf.vu.lt

Šio straipsnio autorius, VU Matematikos ir informatikos fakulteto profesorius, turi senų sąskaitų su kombinatorika. 1962 *metų Respublikinės jaunųjų matematikų olimpiados baigiamajame rate jis neišsprendė kombinatorinio uždavinio. Tai sukliudė jam tapti prizininku, o pagyrimo raštas labiau pradžiugino moksleivio mokytoją Ievą Aušraitę. Todėl nuo to laiko jis mokosi kombinatorikos, o neseniai pradėjo mokyti ir kitus ... Vilniuje, Budapešte, Kiote, Marselyje, Pensilvanijoje.* 1996 *metais publikavo savo pirmąjį mokslinį straipsnį šioje srityje. Bet dar abejoja, ar panašų olimpiados uždavinį jis jau įveiktų.*

Pradžia

Vilniaus universiteto auklėtinis Rudamina Dusetiškis 1633 metais parašytoje disertacijoje pastebėjo, kad Žemė sudaryta iš ne daugiau kaip 343^{32} smiltelių. O mes bandysime skaičiuoti miškus ir medžius! Taip, taip, nes jie yra vieni iš įdomiausių grafų teorijos objektų. Mintis suskaičiuoti galimų cheminių junginių tipus, aprašomus grafais, gimė 1850 metais anglų matematiko Keilio (Arthur Cayley, 1821–1895) galvoje.



1 pav.

Iš pradžių teks paminėti nemaža apibrėžimų. Jeigu pabostų juos beskaitant, patartume toliau šio straipsnelio nebeskaityti, o čiupti įdomią P. Tanenbaumo ir R. Arnoldo knygą „Kelionė į šiuolaikinę matematiką“, TEV, Vilnius, 1995. Ten, 5–8 skyriuose rasite tas sąvokas, puikiai iliustruotas pavyzdžiais. Siūlome taip pat paskaityti L. Maliaukienės „Grafų teorijos įžangą“.[1] Jei užsidegsite noru žengti dar vieną žingsnį, mes Jūsų paslaugoms.

Nubraižykime tris figūras, kaip parodyta 1 paveiksle.

Kiekvienoje figūroje pažymėti ir skaičiais $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sunumeruoti taškai, kuriuos vadinsime *viršūnėmis*; viršūnių aibę žymėsime V. Viršūnes jungiančias atkarpas vadinsime *briaunomis*. Jas žymėkime atitinkamomis viršūnių poromis. Atmetę skliaustus įprastiniame porų žymėjime (i, j) ir susitarę, kad $ij = ji$, gauname briaunų aibę $E = \{12, 14, 16, 32, 34, 36, 52, 54, 56\}$. Pirmųjų dviejų figūrų briaunų aibės tos pačios, todėl šias figūras laikome lygiomis. Trečioje gauname $E = \{12, 13, 16, 24, 25, 34, 35, 46, 56\}$. Nors geometrine išvaizda ji nesiskiria nuo antrosios figūros, jas

[1] *Alfa plius omega*, 2000, **1**, 28–35.

laikome skirtingomis. Lakios vaizduotės skaitytojas toliau braižytų dar įvairesnes konfigūracijas. Jos sudaro *grafų teorijos* tyrimų objektą.

Grafu vadiname aibių porą $G = (V, E)$, čia V — viršūnių, sunumeruotų skaičiais $\{1, \ldots, n\}$, aibė, $n \geqslant 1$, o E — briaunų, arba viršūnių porų, aibė. Du grafai laikomi lygiais, jei jų viršūnės yra sunumeruotos tais pačiais skaičiais ir, sutapatinus vienodo numerio viršūnes, briaunų aibės sutampa. Taigi sureikšminome viršūnių numeraciją. Dažniausiai tokios figūros vadinamos *numeruotaisiais* grafais. Skaičių n vadiname grafo G *eile*, o briaunų skaičių $|E| = m$ — jo *didumu*. Kai $m = 0$, G vadinamas *tuščiuoju* grafu, o kai visos viršūnės iš V tarpusavyje yra sujungtos, t. y. $m = C_n^2 = \binom{n}{2}$, — *pilnuoju* grafu. Šis maksimalaus didumo grafas žymimas K^n.

Prisiminę savo tikslą, suskaičiuokime kiek yra n-osios eilės grafų.

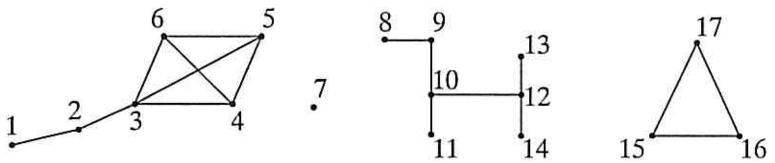
1 teiginys. *Galima sudaryti* $2^{n(n-1)/2}$ *skirtingų n-osios eilės grafų.*

Įrodymas. n-osios eilės grafo didumas gali būti $0, 1, \ldots, k, \ldots, N$, čia $N = \binom{n}{2}$. Braižydami k didumo grafą, jo briaunų aibę galėtume parinkti vienu iš $\binom{N}{k}$ būdų. Taigi skirtingų n-osios eilės grafų gauname

$$1 + \binom{N}{1} + \cdots + \binom{N}{k} + \cdots + \binom{N}{N} = (1+1)^N = 2^N.$$

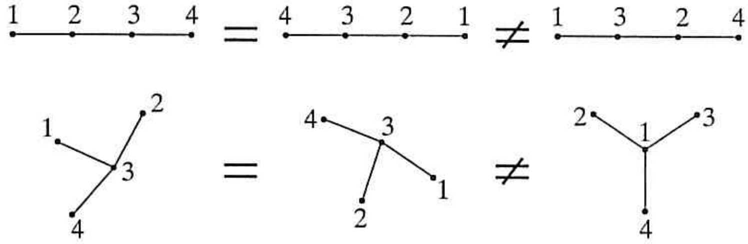
Keliai, takai, medžiai

Įveikę pirmąją užduotį, esame verti lengvesnio pasivaikščiojimo grafais. *Keliu* G grafe vadinsime viršūnių ir briaunų seką $v_1 e_1 v_2 \ldots v_i e_i v_{i+1} \ldots v_k$, čia $e_i = v_i v_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Keliaudami šiuo keliu, iš viršūnės v_1 briauna e_1 patenkame į *gretimą* viršūnę v_2 ir taip toliau. Deja, briaunų tilteliai iš vienos viršūnės į kitą būna permesti ne visada. Jeigu bet kurias dvi grafo viršūnes jungia kelias, tai jį vadiname *jungiuoju*. Grafą gali sudaryti keletas jungių pografių, vadinamų *jungiosiomis komponentėmis*. Trumpai kalbant, kiekvienas grafas yra jo jungiųjų komponenčių sąjunga. Pavyzdžiui 2 paveiksle pavaizduotas grafas, sudarytas iš 4 jungiųjų komponenčių.



2 pav.

Grafo kelias, kuriame nėra pasikartojančių viršūnių, vadinamas *taku*. Jeigu kelyje visos vidinės viršūnės yra skirtingos, o pirma ir paskutinė sutampa, tai jis vadinamas *ciklu*. Su ciklais yra susiję daug taikomųjų uždavinių, aprašytų mūsų rekomenduotoje knygoje, bet mes pasuksime prie grafų, neturinčių jų. Beciklį grafą vadiname *mišku*, o jungų mišką — *medžiu*. Ir nieko keisto, kad medžiai sudaro mišką! Štai keletas tiesių ir kreivų 4-sios eilės medžių (3 pav.).



3 pav.

Jungusis grafas tada ir tik tada yra medis, kai $m = n - 1$. Įsitikinkite. Pastebėkime, kad medis, kai $n \geqslant 2$, turi bent du *lapus* — viršūnes, iš kurių yra išvesta tik po vieną briauną. Iš tiesų, jei $d(v)$ yra skaičius briaunų, išvestų iš $v \in V$ ($d(v)$ vadinsime viršūnės *laipsniu*), tai pasinaudodami tuo, kad briauna turi du galus, gauname

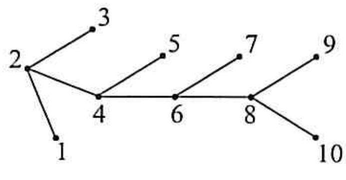
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m = 2(n - 1).$$

Iš čia išplaukia, kad bent dviejų viršūnių v laipsnis $d(v) = 1$.

Skaičiuojame medžius

Raskime n-osios eilės medžių skaičių, kurį žymėsime q_n. Kai $n = 1, 2, 3, 4$, tai nesunku padaryti nubraižius visus šių eilių medžius. Papildę 3 paveikslą, gautume 16 skirtingų 4-osios eilės medžių. Deja, kai n didelis, medžių įvairovė sunkiai aprėpiama. Bet yra sena gera idėja: kiekvienam skaičiuojamam objektui vienareikšmiškai priskirti kitą, paprastesnį (vadinkime jį *kodu*) ir suskaičiuoti skirtingus kodus. Medžio kodą pasiūlė Priūferis (F. Prüfer). Tegu toliau $n > 2$. Medžiui $G = (V, E)$, kurio viršūnių aibė $V = \{1, \ldots, n\}$, vienareikšmiškai priskiriama seka $\alpha = (a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in V$, kurioje galimi skaičių pasikartojimai. Ji vadinama medžio Priūferio kodu. Štai šio kodo sudarymo algoritmas:

1 *žingsnis*: jei medžio lapo su mažiausiu numeriu b_1 gretimoji viršūnė yra a_1, tai kodo pirmoje pozicijoje rašome a_1;



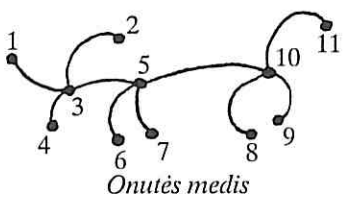
4 pav.

2 *žingsnis*: iš medžio išmetame viršūnę b_1 ir ją jungiančią briauną; jei b_2 yra likusio medžio mažiausias lapo indeksas, o a_2 — jam gretimos viršūnės numeris, tai sudaromo kodo antroje pozicijoje rašome a_2;

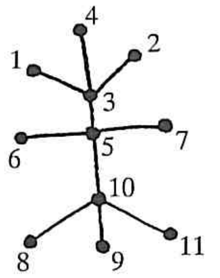
3 *žingsnis*: kartojame 2 žingsnį, b_1 keisdami b_2, b_3 ir t. t.;

4 *žingsnis*: sudarę seką $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ procesą sustabdome.

Medžio, nubraižyto 4 paveiksle, Priūferio kodas $\alpha = (2, 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8)$. Ar, turėdami kodą, vienareikšmiškai atstatytume medį?



Onutės medis



Jono medis

Plokštumoje pažymėkime aibę $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ taškų ir lyginkime juos su kodo $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ skaičiais. Vadovaukimės atvirkštiniu algoritmu:

1 *žingsnis*: jei b_1 yra mažiausias iš bent dviejų V aibės skaičių, nesančių sekoje α, tada plokštumos taškus b_1 ir a_1 sujunkime briauna;

2 *žingsnis*: aibę V pakeiskime $V \setminus \{b_1\}$, o α — seka $(a_2, \ldots, a_{n-2})$ ir pakartokime 1 žingsnį;

3 *žingsnis*: kartokime 2 žingsnį tol, kol išsemsime visą kodą (kartu brėžiame $n - 2$ grafo briaunas);

4 *žingsnis*: tarpusavyje sujunkime dvi likusias aibės V viršūnes.

Pastebėkime, kad taikydami šį algoritmą nubraižėme $n - 1$ briaunų, jungiančių visas viršūnes bent po vieną kartą. Nubraižytasis grafas yra medis. Neišsigąskite, kad Jono ir Onutės nubraižytieji medžiai skiriasi geometrine išvaizda. Atidžiau pažiūrėję, įsitikinsite, kad abu medžiai yra lygūs. Dabar jau galime įrodyti 1889 metų Keilio teoremą.

2 teiginys. *Yra $q_n = n^{n-2}$ numeruotų n-osios eilės medžių.*

Įrodymas. Kaip ir Klarkas (L. E. Clarke) 1963 metais, naudosimės Priūferio kodais. Kadangi kiekvienas kodas vienareikšmiškai apibrėžia medį, o medis atitinka vieną kodą, tai pakanka suskaičiuoti, kiek iš viso yra sekų $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, čia a_i — bet koks aibės $\{1, \ldots, n\}$ skaičius. Kadangi a_i gali nepriklausomai vienas nuo kito įgyti visas reikšmes, tai iš viso yra $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^{n-2}$ sekų.

Taigi, jeigu projektuodami vandentiekio tinklą n sodybų gyvenvietėje dėl taupumo nevesite linijų, sudarančių ciklus, vis tiek jums teks peržiūrėti n^{n-2} galimų variantų. Kaip, žinant atskirų trasos atkarpų kainas, parinkti pigiausią variantą (*minimalųjį jungiantįjį medį*), jus pamokys anksčiau minėta knyga.

Ir miškus galima suskaičiuoti

Mūsų aptartieji medžiai iki šiol neturėjo šaknų. Ką gi, jeigu įdomiau su jomis, pasodinkime medį viena viršūne į žemę ir gausime medį su šaknimi. Tą viršūnę vadinsime *šaknimi*, o patį medį — *šakniniu*. Šaknimi gali būti pavadinta bet kuri iš n viršūnių, todėl iš Keilio teoremos išplaukia, kad n-osios eilės šakninių medžių skaičius $t_n = n^{n-1}$.

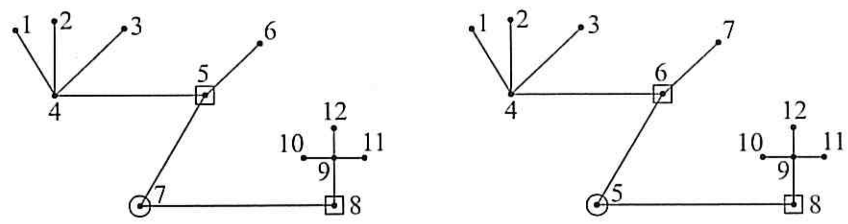
Šakninį mišką sudaro baigtinė šakninių medžių sąjunga, o miško šaknį — jo medžių šaknų aibė. Suskaičiuokime ir tokius miškus.

3 teiginys. *Šakninių n-osios eilės miškų skaičius*

$$d_n = \frac{t_{n+1}}{n+1} = (n+1)^{n-1}. \tag{1}$$

Įrodymas. Pirmoji iš (1) lygybių — n-osios eilės šakninių miškų skaičiaus ir $(n + 1)$-osios eilės šakninių medžių skaičiaus ryšys. Atskleiskime jį. Nagrinėkime $(n + 1)$-osios eilės šakninį medį.

Tarkime, jo šaknis pažymėta numeriu j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$. Tegu $v_1, \ldots, v_k$ yra gretimos jai viršūnės. Atėmę šią šaknį bei iš jos išvestąsias briaunas iš medžio, gauname n-osios eilės k medžių mišką. Dėl korektiškumo jo viršūnes reikia pernumeruoti naudojantis tik skaičiais $\{1, \ldots, n\}$. Tuo tikslu viršūnių indeksus, didesnius už j, sumažinkime vienetu. Aibė $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sudaro gautojo n-osios eilės miško šaknį. Pastebėkime, kad tokį pat mišką galima gauti net iš $n+1$ šakninio medžio. Palyginkime du skirtingus, pavaizduotus 5 paveiksle medžius.



5 pav.

Pagal aprašytą procedūrą iš abiejų medžių gautume tą patį 10-osios eilės mišką su šaknimi $\{5, 7\}$. Taigi sudarant mišką medžio šaknies indeksas j nereikšmingas, iš $(n+1)$-osios eilės šakninio $n+1$ medžio gauname vieną n-osios eilės mišką. Atvirkščia pastaba irgi teisinga. Sujungę miško šaknis su viena papildoma viršūne, pažymėta j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, ir laikoma medžio šaknimi, gautume $n+1$ skirtingą šakninį medį. Žinoma, viršūnių indeksus, ne mažesnius už j, reiktų padidinti vienetu. Vadinasi, pirmoji iš (1) lygybių yra teisinga. Antroji išplaukia iš Keilio teoremos.

Mūsų samprotavimai akivaizdžiai pasunkėjo. Taikydami tokius kombinatorinius metodus, giliai įklimptume. Todėl prisiminkime pačios matematikos evoliuciją. Kai skaičių teorijos uždaviniai pasidarė per sunkūs, matematikai įvedė funkcijas ir, jas ištyrę, grįžo atgal prie skaičių. Funkcijų teorijos problemoms įveikti įvedamos erdvės... Apskritai, tirdamas Žemę, žmogus dažnai žiūri į dangų.

Funkcijos, asocijuotos su grafais

Ir mes pakilkime vienu lygiu aukščiau. Sekas q_n, t_n bei d_n, apibrėžiančias atitinkamų n-osios eilės medžių bei šakninių medžių ir miškų skaičius, susiekime su *eksponentinėmis generuojančiomis funkcijomis* (e.g.f.):

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n x^n}{n!}, \qquad T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n x^n}{n!}, \qquad D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n x^n}{n!}.$$

Susitarkime, kad $q_0 = t_0 = 0$, bet $d_0 = 1$. Vienetų sekos e.g.f. yra funkcija

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{2}$$

Panašiai apibrėžtume ir bet kokios sekos a_n, $n \geqslant 0$, e.g.f.

Su begalinėmis eilutėmis sudėties ir daugybos veiksmus atliksime formaliai, t.y. panariui, kaip ir su daugianariais. Tas ypač malonu nežinantiems ar pamiršusiems eilučių konvergavimo ar absoliutaus konvergavimo sąvokas bei kriterijus. Kiekvienas eilutės narys gali būti laikomas fiksuotos eilės medžių arba miškų e.g.f. Kai eilės yra skirtingos, šių objektų aibės nepersikerta, o visų medžių ar miškų e.g.f. yra begalinė šių vienanarių suma. Galima būtų įsivaizduoti, kad pati e.g.f. paeiliui „skaičiuoja" tiriamus objektus, o narių daugikliai $x^n/n!$ tik padeda, kad auganti dalinės sumos reikšmė „nenuklystų" į begalybę. Pasitikrinkime, ar suvokėme tai, ir raskime šakninių miškų, sudarytų tik iš k medžių, e.g.f., kurią pažymėkime $D_k(x)$.

Aišku, bet kokios eilės miškų, turinčių tik vieną medį, yra tiek, kiek pačių medžių. Vadinasi, $D_1(x) = T(x)$. Kiekvieną n-osios eilės dviejų medžių mišką galima gauti pirmuoju imant k-osios eilės medį, $0 \leqslant k \leqslant n$, ir prie jo pridedant antrąjį $(n-k)$-osios eilės medį. Pirmojo medžio viršūnių indeksus (jų yra k) galime rinktis iš aibės $\{1, \ldots, n\}$ bet kaip, t.y. turime $\binom{n}{k}$ galimybių. Be to, kiekvienai tokiai indeksų aibei galime sudaryti t_k šakninių medžių. likusius $n-k$ indeksų atitinka t_{n-k} medžių. Į medžių tvarką miške neatsižvelgiama, todėl n-osios eilės šakninių miškų, turinčių du medžius, yra

$$\frac{1}{2!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t_k t_{n-k}.$$

Kadangi

$$T^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t_k t_{n-k}\Bigr)\frac{x^n}{n!},$$

tai $D_2(x) = T^2(x)/2$. Toliau pritaikę matematinę indukciją, užrašome geidžiamą atsakymą: $D_k(x) = T^k(x)/k!$. Maža to, pastebėję, kad visa šakninių miškų aibė yra sąjunga miškų, turinčių k šakninių medžių, bei pasinaudoję (2) formule, gauname

$$D(x) = 1 + \frac{T(x)}{1!} + \frac{T^2(x)}{2!} + \cdots + \frac{T^k(x)}{k!} + \cdots = \mathrm{e}^{T(x)}. \qquad (3)$$

Vadinasi, iš čia ir 2 bei 3 teiginių išplaukia tapatybė

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{n-1}x^n}{n!} = \exp\Bigl\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}x^n}{n!}\Bigr\}.$$

Ar būtume ją atradę be grafų teorijos? Pedantiškas skaitytojas dabar gali įsitikinti, kad abi eilutės konverguoja srityje $|x| < \mathrm{e}^{-1}$.

Išskirti šaknis nagrinėtuose grafuose nėra būtina. Tada gautume panašius ir kitų, apibrėžiančių nešakninių grafų skaičius, sekų sąryšius. Iš lygybių

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!} = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2} x^n}{n!} \right\},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n(n-1)/2} x^n}{n!} = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n x^n}{n!} \right\}$$

raskite n-osios eilės nešakninių miškų skaičių b_n ir jungių n-osios eilės grafų kiekį r_n. Kaip tai padaryti?

Jei gali apibendrinti, daryk tai

Iš paprastesnių objektų, medžių, galima sudaryti jų aibes, pernumeruoti pradinius elementus, viršūnes ir gauti miškus. Panašių konstrukcijų dažnai pasitaiko kombinatorikoje. *Kombinatorine* (numeruotąja) *struktūra* pavadinkime bet kokią sunumeruotą skaičiais $1, 2, \ldots, n$ baigtinę n elementų, tarp kurių yra kokie nors ryšiai, aibę. Čia $n = 1, 2, \ldots$. Reikalaujama, kad kiekvienam n sudaromų struktūrų skaičius būtų baigtinis. Kai kada patogu nagrinėjamas struktūras papildyti *tuščiąja* struktūra, kurios eilė $n = 0$. Taisyklės, nurodančios ryšius, apibrėžia kombinatorinių struktūrų, pavyzdžiui, grafų, medžių, miškų, klasę $\mathcal{U}$. Tegu u_n yra n-osios eilės struktūrų šioje klasėje skaičius, $n \geqslant 0$. Tada

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n x^n}{n!}$$

yra klasės $\mathcal{U}$, arba sekos u_n, e.g.f.

Tarkime, kad $\mathcal{U}$ ir $\mathcal{V}$ yra dvi struktūrų klasės. Imkime nesutvarkytąją porą $w = uv = vu$, čia $u \in \mathcal{U}$ ir $v \in \mathcal{V}$ — bet kokios struktūros. Teisingai sunumeruokime šios poros (naujosios struktūros) elementus, kaip tai darėme miške su medžių viršūnėmis. Jei w yra n-osios eilės, t. y. iš viso turi n elementų, tai k iš jų priklauso struktūrai u, o $(n-k)$ — struktūrai v, $0 \leqslant k \leqslant n$. Pagal apibrėžimą w elementams numeruoti galime naudoti tik pirmuosius n natūraliųjų skaičių. Pernumeruodami u elementus, galėtume naudoti bet kokį k skaičių poaibį, tad iš viso yra $\binom{n}{k}$ būdų, o v elementus turėtume sunumeruoti likusiais skaičiais. Kiekvieną numeraciją atitinka skirtinga struktūra w. Taigi elementų numeracija lemia struktūrų gausą! Kadangi k-osios eilės struktūrų u yra u_k ir į tvarką poroje uv neatsižvelgiama, gauname n-osios eilės naujųjų struktūrų w, sudarytų iš pradinių struktūrų porų, skaičių

$$w_n = \frac{1}{2!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}. \tag{4}$$

Tokią formulę jau buvome gavę, kai mišką sudarė du medžiai. Visų naujųjų struktūrų w aibę vadiname klasių $\mathcal{U}$ ir $\mathcal{V}$ *skaidumo sandauga*, žymėsime $\mathcal{W} = \mathcal{U} \star \mathcal{V}$. Iš (4) formulės išplaukia skaidumo sandaugos e.g.f. išraiška:

$$W(x) = U(x)V(x)/2!.$$

Turėdami tik vieną struktūrų klasę $\mathcal{U}$, apibrėžę $\mathcal{U}^{\star 2} = \mathcal{U} \star \mathcal{U}$ pagal indukciją gautume ir korektišką $\mathcal{U}^{\star k} = \mathcal{U} \star \mathcal{U}^{\star(k-1)}$ apibrėžimą kiekvienam $k \geqslant 2$. Aibę $\mathcal{U}^{\star k}$ sudaro visi $\mathcal{U}$ poaibiai, turintys k struktūrų. Šios aibės e.g.f. lygi $U^k(x)/k!$. Sąjungą

$$\mathcal{P} = \{\varnothing\} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{U}^{\star 2} \cup \cdots \cup \mathcal{U}^{\star k} \cup \cdots$$

vadiname $\mathcal{U}$ *poaibių klase*. Jos e.g.f.

$$P(x) = 1 + \frac{U(x)}{1!} + \frac{U^2(x)}{2!} + \cdots + \frac{U^k(x)}{k!} + \cdots = \mathrm{e}^{U(x)}.$$

Taigi kombinatorinių struktūrų sudarymo būdas atskleidžia e.g.f. sąryšius. Kas pasikeistų, jeigu nagrinėtume ne $\mathcal{U}$ poaibių, o jos struktūrų *sekų struktūrą*? Pažymėkime ją $\mathcal{Z}$. Dabar iš dviejų struktūrų $u', u'' \in \mathcal{U}$ sudarytume $z = u'u'' \neq u''u'$, iš trijų gautume $z = u'u''u'''$ ir t. t. Be to, skaičiuodami naujas struktūras, atsižvelgtume į užrašytąją komponenčių tvarką. Nesunku pastebėti, kad dviejų n-osios eilės struktūrų sekų skaičius z_n gali būti užrašomas pagal (4) formulę, bet be daugiklio $1/2!$. Išnagrinėję k struktūrų sekas kiekvienam k, gautume tokią e.g.f. formulę:

$$\begin{aligned} Z(x) &= 1 + U(x) + U^2(x) + \cdots + U^k(x) + \cdots = \\ &= \frac{1}{1 - U(x)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Argi ne smagu naudotis formaliomis formulėmis, nesukant galvos, ar $|U(x)| < 1$?

Įtvirtindami žinias, panagrinėkime struktūrų iš $\mathcal{U}$ *ciklų klasę* $\mathcal{L}$. Sudarant naują struktūrą iš $u^1, u^2, \ldots, u^k \in \mathcal{U}$ ir cikliškai jas perstatant, gaunamos vienodos struktūros, t. y. $u^1u^2 \ldots u^k = u^2 \ldots u^k u^1 = \ldots = u^k u^1 \ldots u^{k-1}$, o kitais atvejais skirtingos. Galime sudaryti $(k-1)!$ ciklų iš k elementų, todėl k-osios eilės naujųjų struktūrų gautume k kartų mažiau negu sekų. Vadinasi, ciklų klasės e.g.f.

$$\begin{aligned} L(x) &= 1 + \frac{U(x)}{1} + \frac{U^2(x)}{2} + \cdots + \frac{U^k(x)}{k} + \cdots = \\ &= \ln\big(1 - U(x)\big)^{-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Čia pasinaudojome formaliu logaritminės funkcijos skleidiniu eilute $\ln(1-x)^{-1} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$.

Mūsų pastangos duoda naujų netikėtų rezultatų.

4 teiginys. *Šakninių medžių e.g.f.* $T(x)$ *tenkina funkcinę lygtį*

$$T(x) = xe^{T(x)}.$$

Įrodymas. Šakninių medžių bei miškų klases atitinkamai pažymėkime $\mathcal{T}$ ir $\mathcal{D}$. Klasę medžių, sudarytų tik iš vienos viršūnės, kartu laikomos ir šaknimi, pažymėkime $\{v\}$. Jos e.g.f. yra x. Įsitikiname, kad struktūrų klasės susietos lygybe

$$\mathcal{T} = \{v\} \star \mathcal{D};$$

čia $\star$ žymi skaidumo sandaugą, kurioje struktūrų tvarka yra svarbi. Iš tiesų kiekvienas šakninis medis sudarytas iš šaknies ir su ja susieto šakninio miško. Kaip tik šią savybę jau esame pastebėję ir net pasinaudoję ja įrodydami 3 teiginį. Iš gautosios klasių lygybės ir (3) formulės išplaukia 4 teiginys.

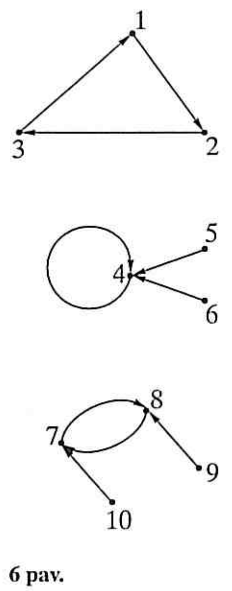
Įdomių grafų šaltinis yra baigtinės aibės atvaizdžiai į ją pačią. Apie tai šio pasakojimo tęsinys.

Funkciniai digrafai

Istorija prasidėjo 1928 metais Bolonijoje pasaulinio matematikų kongreso metu. Savo pranešime Voronežo matematikas A. Suškievičius nagrinėjo baigtinių aibių atvaizdžių savybes. Iliustruodamas atvaizdį f: $\{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 10\}$, apibrėžtą lentele

$$f = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \\ 2, 3, 1, 4, 4, 4, 8, 7, 8, 7 \end{pmatrix},$$

nurodančia, kad $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$ ir t. t., nupiešė „ežiukų" rinkinį, pavaizduotą 6 paveiksle.



6 pav.

Šiuolaikinėje grafų teorijoje, kuri intensyviau pradėjo plėtotis tik ketvirtame dešimtmetyje, 6 paveiksle pavaizduotas figūrų rinkinys vadinamas *funkciniu digrafu*. Brėžiant digrafo briaunas, nurodomos kryptys. Jei, kaip ir anksčiau, briaunomis vadintume viršūnių poras, tai jos būtų sutvarkytosios, t. y. $ij \neq ji$. Funkcinius digrafus apibrėžianti sąlyga yra tokia: iš kiekvienos viršūnės turi būti išvesta tik viena briauna. Kiekviena jo jungi komponentė turi ciklą, kuriame tam tikra kryptimi apeinamos viršūnės. Pavaizduoto digrafo pirmos komponentės ciklą sudaro 1-a, 2-a bei 3-a viršūnės, antrosios — viena 4-a viršūnė.

Dabar atsakykime į du klausimus: kiek iš viso yra n-osios eilės funkcinių digrafų ir kiek iš jų yra jungių. Pažymėkime šiuos skaičius f_n ir j_n. Įdomu, koks yra santykis j_n/f_n, kai n neaprėžtai didėja. Skaičiusieji V. Stakėno ir G. Stepanausko „Analizinės skaičių teorijos apžvalgą"[2] pajus analogiją su pirminių skaičių teorema. Ten pasakyta, kad iki n apytikriai yra $n/\ln n$ pirminių skaičių.

[2] *Alfa plius omega*, 1996, 1, 19–45.

Pirmasis uždavinys yra labai paprastas. Pakanka įsitikinti, kad bet kokį atvaizdį galima apibrėžti dviejų eilučių lentele. Pirmoje eilutėje surašome vaizduojamuosius skaičius nuo 1 iki n, o antrojoje — jų vaizdus. Skirtingų atvaizdžių lentelės skiriasi antrosiomis eilutėmis. Kiekvienoje šios eilutės pozicijoje gali būti bet kuris iš pirmųjų n natūraliųjų skaičių, todėl gauname $f_n = n^n$, kai $n \geqslant 1$.

Ieškant antrojo uždavinio sprendimo, galima pasinaudoti e.g.f. sąryšiais. Funkciniai digrafai sudaro jungių digrafų poaibių klasę. Vadinasi,

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!} = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n x^n}{n!} \right\}.$$

Jau ir iš čia galėtume gauti j_n išraišką. Bet labiau patyręs skaitytojas pasistengs rasti ir pasinaudoti dar paprastesniais sąryšiais. Pastebėkime, kad funkciniai digrafai yra kombinatorinės struktūros, kurios gali būti gautos imant šakninių medžių ciklų poaibius. Jei $T(x)$ yra šių medžių e.g.f., tai $\ln(1 - T(x))^{-1}$ — jų ciklų e.g.f.. Toliau skaičiuodami poaibių klasės e.g.f., gauname

$$F(x) = \exp\left\{ \ln(1 - T(x))^{-1} \right\} = (1 - T(x))^{-1}.$$

Vadinasi, jungių funkcinių digrafų skaičius j_n gali būti ieškomas naudojantis lygybe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n x^n}{n!} = \ln \frac{1}{1 - T(x)}.$$

Kadangi $T(x)$ koeficientas $t_n = n^{n-1}$, tai remdamiesi sudėtinių funkcijų Teiloro koeficientų skaičiavimo taisykle, iš čia gauname atsakymą ir į antrąjį klausimą:

$$j_n = (n-1)! \sum_{s=0}^{n-1} \frac{n^s}{s!}. \tag{7}$$

Iš čia išplaukia

$$\frac{j_n}{f_n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \qquad n \to \infty. \tag{8}$$

Nuorodas, kaip aproksimuoti sumą (7) formulėje, galima rasti matematinės analizės knygose. Ten ieškokite ir Stirlingo formulės $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$, reikalingos (8) asimptotiniam sąryšiui išvesti.

Pabaiga

Viskas atrodo paprasta. Ar iš tiesų?... Tad kokią kombinatorinę prasmę slepia lygybės

$$1 + x + x^2 + \cdots = (1 - x)^{-1} = \exp\left\{ \ln(1 - x)^{-1} \right\}?$$

$\alpha + \omega$