$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 2, 30–38

Skaičiavimo sistemos

Gediminas Stepanauskas
gediminas.stepanauskas@maf.vu.lt

Paprasta ir patogi naudoti dešimtainė skaičiavimo sistema — reikšmingas matematinis išradimas. Straipsnyje apžvelgiamas ilgas skaičiavimo sistemų kūrimo ir tobulinimo kelias, pateikiama daug istorinių pavyzdžių.

G. Stepanauskas — VU docentas, skaičių teorijos mokslo ir populiarinimo straipsnių autorius.

Skaičiai ir jų rašymo būdas yra viena iš pagrindinių matematikos idėjų. Skaičiaus sąvoka žmonijos istorijoje atsirado gana vėlai. Praktiškas metodas skaičiuoti lyginant galėjo atsirasti, kai žmonės pradėjo gyventi sėsliai, įkūrė pirmąsias gyvenvietes, pradėjo auginti kultūras ir naminius gyvulius. Žmonės galėjo avių skaičių bandoje lyginti su akmenų skaičiumi krūvoje (vienas akmuo — viena avis) arba net dar paprasčiau — su žymių ant piemens lazdos skaičiumi (viena žymė — viena avis). Piemuo, turintis nemažą bandą gyvulių ir parginęs juos nakčiai į gardą, jau žinojo metodą, kaip nustatyti, ar nėra pasiklydusių.

Taigi pirmykščiai žmonės pradėjo suprasti, kad trys vištos ir trys šunys turi kažką bendra. Pamažu pradėta galvoti apie skaičius, nesusietus su daiktais. Pirmykštės kultūros vis labiau vystėsi, skaičiai vis daugiau ir daugiau buvo naudojami. Buvo sugalvoti *skaičių vardai* ir sukurti *simboliai* jiems žymėti.

Skaičiavimo sistema (*skaičiuotė*) — tai keletas pagrindinių simbolių skaičiams žymėti ir kelios taisyklės, kuriomis naudojantis galima sudaryti simbolius kitiems skaičiams žymėti. Pagrindiniai skaičiavimo sistemos simboliai vadinami *skaitmenimis*.

Kaip ir abėcėlės raidės, pagrindiniai simboliai turi būti paprasti, lengvai įsimenami, taisyklės — patogios atliekant operacijas (sudėtį, daugybą) su skaičiais. Patogi skaičiavimo sistema yra vienas iš didžiausių žmonijos laimėjimų. Skaičiavimo, kaip ir rašto, sistema yra bendravimo priemonė — informacija yra perteikiama per atstumą, taip pat iš vienos kartos į kitą kartą.

Žinoma, praėjo šimtmečiai, kol skaičiavimo sistema tapo tokia, kokią mes šiandien turime. Skaičiavimo sistemų buvo daug. Galbūt ir dabartinė dar ne paskutinė. Keletas būdų, kaip galima užrašyti skaičių 18, pateikta 1 paveiksle.

Brūkšneliais	||||||||||||||||||
Egipto skaičiavimo sistemoje	∩||||||||
Babilono skaičiavimo sistemoje	◁▽▽▽▽▽▽▽▽
Graikų skaičiavimo sistemoje	$\iota\eta$
Romėnų skaičiavimo sistemoje	XVIII
Indų-arabų skaičiavimo sistemoje	18
Kinų-japonų skaičiavimo sistemoje	十八
Majų skaičiavimo sistemoje	$\overset{\bullet\bullet\bullet}{\equiv}$
Lingvistiniu būdu	aštuoniolika achtzehn eighteen dieciocho dek ok atten ....
Brailio[1] *rašto* sistemoje	⠼⠁⠓

1 pav.

Skaičiavimo sistemų tipai

Amžiams bėgant išsivystė trijų pagrindinių tipų skaičiavimo sistemos. Jas šiame skyrelyje ir panagrinėsime. Be skaičiavimo sistemos tipo, turi būti nustatytas pagrindinės grupės (grupuojant ir užrašant skaičius) didumas, kuris vadinamas *skaičiavimo sistemos pagrindu*. Jei pagrindas lygus n, tai skaičiavimo sistema vadinama n*-taine*. Taigi mūsų naudojama skaičiavimo sistema yra *dešimtainė*.

Skaičiavimo sistemų tipus panagrinėsime naudodami penketainę skaičiavimo sistemą. Pasirinktas sistemos pagrindas, nelygus mūsų įprastam dešimt, geriau padės suprasti pagrindines idėjas.

Paprastasis (adityvusis) grupavimas. Skaičiuodami aibių elementus, vienam elementui naudokime po vieną brūkšnelį. Aibės, susidedančios iš devynių elementų, skaičių žymime taip: |||||||||. Tai labai griozdiškas skaičių rašymo būdas. Suprastinkime jį įvesdami naują simbolį Λ, pakeičiantį penkis brūkšnelius. Tada devyni brūkšneliai gali būti pakeisti Λ|||| (vienu penketu ir keturiais vienetais). Tokiu pat būdu 18 gali būti užrašyta trim penketais ir trim vienetais: ΛΛΛ|||. Naudojant simbolį Λ, bet kokiam skaičiui užrašyti nereikės daugiau kaip keturių vienetų (brūkšnelių). Bet užrašyti didesniems skaičiams reikės gana daug Λ simbolių. Pavyzdžiui, 68 reikia trylikos Λ simbolių ir trijų | simbolių: ΛΛΛΛΛΛΛΛΛΛΛΛΛ|||. Skaičiavimams tai per ilgas užrašas. Pakeiskime penkis Λ simbolius nauju simboliu N. Tuomet 68 galima užrašyti taip: NNΛΛΛ|||.

$1 = 5^0$	|
$5 = 5^1$	Λ
$25 = 5^2$	N
$125 = 5^3$	M
$625 = 5^4$	NV
$3125 = 5^5$	MΛ
$15625 = 5^6$	NW
....	....

2 pav.

Kiekvienas N simbolis atitinka grupę iš $5 \times 5 = 25$ elementų. Tęskime procesą toliau ir įveskime naujus simbolius, kaip parodyta 2 paveiksle.

[1]Louis Braille (1809–1852) — prancūzų tiflopedagogas.

Simbolių rinkinys MMNNNΛ| žymi skaičių $(2\times 125)+(3\times 25)+(1\times 5)+(1\times 1)=331$, o simbolių rinkinys WWMNNNNΛ||| — skaičių $(2\times 625)+(1\times 125)+(4\times 25)+(1\times 5)+(3\times 1)=1483$.

Pastebėkime, kad simbolių išdėstymo šioje sistemoje tvarka visiškai nesvarbi. Ir simbolių grupė ΛMNN|MN reiškia skaičių 331. Mūsų sukurta skaičiavimo sistema yra *paprastosios grupavimo sistemos* pavyzdys.

Multiplikatyvusis grupavimas. Norėdami geriau suprasti multiplikatyvųjį grupavimą, imkime jau minėtą skaičių 1483. Penketainėje skaičiavimo sistemoje, naudojant paprastąjį grupavimą, jį galima užrašyti taip: WWMNNNNΛ|||. Čia yra daug pasikartojančių simbolių. Taupydami vietą, įveskime simbolių *daugiklius* (3 pav.). Vietoje keturių simbolių NNNN naudokime (∷)N. Du ar tris vienodus simbolius pakeiskime vienu pridėdami simbolių daugiklius (··), (∴). Vienam simboliui priekyje prirašykime daugiklį ⊙, nors šiuo atveju jis nėra būtinas. Tada skaičių 1483 galima užrašyti taip: (··)W⊙M(∷)N⊙Λ(∴)|.

$2\times 625=$ (··)W
$1\times 125=$ ⊙M
$4\times 25=$ (∷)N
$1\times 5=$ ⊙Λ
$3\times 1=$ (∴)|

3 pav.

Taigi naudojant *multiplikatyvųjį grupavimą*, pagrindiniai simboliai nėra kartojami, o įvedamas daugiklis, parodantis to simbolio kartotinumą.

Sukūrėme penketainę skaičiavimo sistemą. Nekeisdami sistemos tipo, sistemos pagrindu galėjome imti bet kokį natūralųjį skaičių, išskyrus 1. Pasirinkus k-tainę skaičiavimo sistemą, tektų įvesti $k-1$ simbolių daugikliams žymėti. Penketainėje sistemoje mums prireikė keturių: ⊙, (··), (∴), (∷).

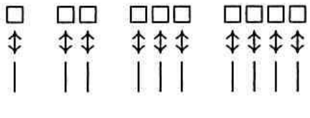
Pozicinis metodas. Naudojant multiplikatyviąją skaičiavimo sistemą, simbolių skaičiaus užraše vieta taip pat nėra svarbi, bet pagrindinio simbolio jau nebegalima atskirti nuo jo daugiklio. Galima keisti vietomis tik simbolių poras, bet patogiau, kai jos surašytos tvarkingai. Susitarkime, kad simbolių dvejetai yra išdėstyti iš dešinės į kairę, pirmiausia rašant simbolių porą, nurodančią 1-etų skaičių, po to — 5-etų skaičių, 25-etų skaičių ir t. t. Laikantis tokio principo, simbolių dvejetų seka visada bus užrašoma ta pačia tvarka. Todėl galima palikti tik daugiklių simbolius. Skaičius 1483 būtų užrašomas taip: (··) ⊙ (∷) ⊙ (∴).

Skaičius	Atitikmuo
1	⊙
2	(··)
3	(∴)
4	(∷)
5	⊙○
6	⊙⊙
7	⊙(··)
10	(··)○
11	(··)⊙
15	(∴)○
24	(∷)(∷)
25	⊙○○
78	(∴)○(∴)

4 pav.

Toks skaičių rašymo būdas vadinamas *poziciniu metodu*, o skaičiavimo sistema — *pozicine*. Šis metodas turi dar vieną didelį trūkumą. Juk užrašę skaičių 2, turėsime (··), o skaičių 50 (multiplikatyviojoje sistemoje užrašomas kaip (··)N) žymės irgi lygiai toks pat likęs daugiklio simbolis (··). Tokio nevienareikšmiškumo išvengtume turėdami vietos fiksavimo simbolį. Dešimtainėje skaičiavimo sistemoje tam naudojamas 0 (nulis). Sukurta pozicinė penketainė skaičiavimo sistema minėto trūkumo neturės, jeigu į daugiklių aibę įtrauksime simbolį ○. Tada skaičių 50 galėsime užrašyti (··) ○ ○. Simbolis ○ ir 1-etų, ir 5-etų vietose nurodo, kad nei 1-etų grupės, nė 5-etų grupės skaičiuje 50 nėra; yra tik dvi 25-etų grupės. Keletas skaičių, užrašytų mūsų pozicinėje sistemoje, pateikta 4 paveiksle.

Istorinės skaičiavimo sistemos



5 pav.

Skaičiavimo sistemų užuomazgą galime įžvelgti jau tada, kai pradėti naudoti žymenys, sudaryti iš paprasčiausių brūkšnelių[2] (vienas brūkšnelis — vienas objektas), kaip parodyta 5 paveiksle.

Skaičiavimo brūkšneliais privalumas yra jo paprastumas. Bet dideliems skaičiams žymėti reikia labai daug simbolių. Be to, sunku juos perskaityti. Pabandykite pasakyti, koks čia skaičius yra pavaizduotas: |||||||||||||||||||||||||||||||||||||.

Vėliau įvedus grupavimą, brūkšnelių sistema buvo patobulinta. Šiuo atveju penktas brūkšnelis būdavo rašomas perbraukiant keturis ir gautas penketas sudarydavo grupę. Taigi anksčiau pateiktas skaičius gali būti užrašytas taip: 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||.

Naudojant grupavimą, skaičius lengviau atpažinti. Bet tokį skaičiavimą vargu ar galima pavadinti skaičiavimo sistema. Neturint skaičiavimo sistemos, operuoti dideliais skaičiais neįmanoma. Kaip ir kiti dideli išradimai, skaičiavimo sistemos buvo sukurtos, kai pasidarė labai reikalingos. Anksčiausiai jas turėjo egiptiečiai ir šumerai. Jau prieš 5000 metų valdžios struktūroms išlaikyti ir verslui plėtoti jiems reikėjo naudotis dideliais skaičiais. Iš senovės dokumentų galime spręsti apie egiptiečių ir šumerų, taip pat apie senovės graikų, romėnų, majų, kinų, japonų, indų, arabų ir kitų tautų taikomus skaičiavimo metodus.

Egiptiečių skaičiavimo sistema. Prieš 5000 metų egiptiečiai jau naudojosi *paprastojo grupavimo sistema*. Grupavimas po 10 yra vienas iš pagrindinių egiptiečių, kaip ir daugelio kitų kultūrų, sistemos principų. Žmogus turi dešimt pirštų, taigi jie ir buvo pirmoji skaičiavimo priemonė. Dešimt vienetų buvo pakeičiami viena dešimtimi, dešimt dešimčių — vienu šimtu, dešimt šimtų — vienu tūkstančiu ir t. t. Vadinasi, egiptiečių skaičiavimo sistema buvo *dešimtainė*. Simboliai skaičiams žymėti buvo jų hieroglifų sistemos dalis. Jie naudojo septynis hieroglifus (6 pav.) ir galėjo užrašyti skaičius iki 9 999 999. Pavyzdžiui, skaičius 12 345 egiptiečių hieroglifais buvo užrašomas taip: 𓂭𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢.

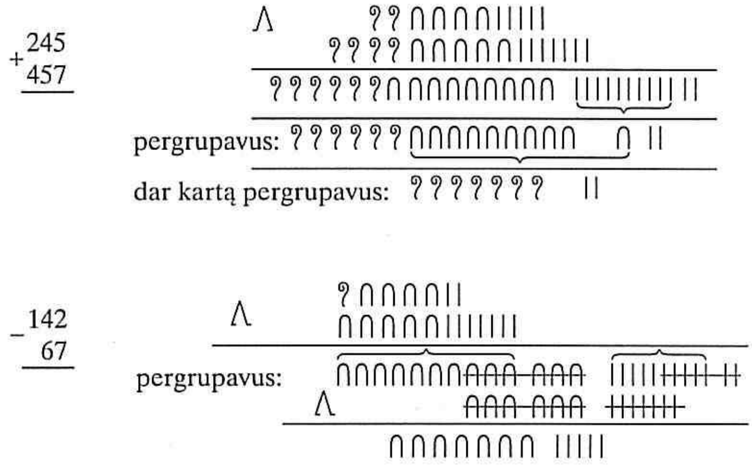
6 pav.

Skaičius	Egiptiečių hieroglifas	Objektas, kurį vaizduoja simbolis
1	𓏺	Vertikalus brūkšnys
10	𓎆	Arka
100	𓍢	Spiralė
1 000	𓆼	Lotoso žiedas
10 000	𓂭	Pasvirusi nendrė
100 000	𓆐	Žuvis
1 000 000	𓁨	Apstulbęs žmogus

Egiptiečių aritmetika buvo gana paprasta. Sudėtis ir atimtis buvo atliekama kartojant ir pergrupuojant simbolius. Sudėčiai ir atimčiai

[2] Ang. *tally system*.

jie naudojo specialius simbolius: sudėčiai — kojų porą, einančią į kairę, atimčiai — kojų porą, einančią į dešinę (7 pav.).



7 pav.

Daugybą ir dalybą egiptiečiai atlikdavo sumaniai pakartodami sudėtį. Daugybos lentelės jiems nereikėjo. Savo skaičiavimams egiptiečiai naudodavo ir vienetines trupmenas $\frac{1}{n}$. Joms žymėti virš skaičiaus pridėdavo specialų simbolį. Taigi reiškė $\frac{1}{33}$. Kitokios (nevienetinės) trupmenos buvo rašomos skirtingų vienetinių trupmenų (pakartoti tą pačią vienetinę trupmeną nebuvo galima) suma. Pavyzdžiui, $\frac{2}{7}$ rašydavo $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.

Apie Egipto matematiką yra du svarbūs šaltiniai: pirmasis — Maskvos papirusas, parašytas apie 1850 m. pr. Kr., antrasis — Rhindo papirusas, parašytas truputį vėliau. Iš šių šaltinių sužinome, kad dauguma uždavinių, kuriuos sprendė egiptiečiai, buvo praktinio pobūdžio, nors būta ir teorinių. Egiptiečiai jau gana tiksliai galėjo apskaičiuoti skaičių π, spręsti pirmojo ir antrojo laipsnio lygtis, susumuoti aritmetines ir geometrines progresijas. Jie jau turėjo formules taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės tūriui ir pusferės paviršiaus plotui skaičiuoti.

Kokie yra egiptiečių skaičiavimo sistemos trūkumai? Skaičiams užrašyti reikia daug simbolių. Pavyzdžiui, skaičiui 9 999 užrašyti reikėtų 36 simbolių. Dideliems (10 milijonų, 100 milijonų ir didesniems) skaičiams reikia papildomų simbolių. Patikrinkite. Be to, aritmetiniai skaičiavimai yra gana griozdiški.

Babiloniečių skaičiavimo sistema. Šumerai savo skaičiavimo sistemą sukūrė maždaug tuo pačiu metu kaip ir egiptiečiai. Babiloniečių sistema buvo *šešiasdešimtainė* ir paremta *paprastojo grupavimo* bei *poziciniu* principais. Joje buvo naudojami tik du simboliai. Tikroji pozicinė šešiasdešimtainė skaičiavimo sistema turėtų būti iš 60 skirtingų simbolių. Du simbolius šumerai naudojo, matyt, dėl to, kad neturėjo papiruso, o rašė ant molio lentelių. Dantiraščiu jie galėjo užrašyti tik paprasčiausius simbolius, pavaizduoti daug sudėtingų (juo labiau tokių hieroglifų kaip egiptiečiai) jie negalėjo.

Simboliu 𒁹 šumerai žymėjo vienetą, o simboliu 𒌋 — dešimt. Kadangi šumerų skaičiavimo sistema buvo šešiasdešimtainė ir iš dalies pozicinė, tai skaitmenų išdėstymo tvarka buvo svarbi. Iki šešiasdešimties dešimčių simboliai 𒌋 buvo rašomi kairiau vienetų simbolių 𒁹. Skaičiai nuo 1 iki 59 babiloniečių sistemoje buvo rašomi kartojant šiuos du simbolius. Pavyzdžiui, skaičius 28 atrodė taip: 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹. Skaičiams, didesniems už 60, buvo nurodoma simbolių iš 𒌋 ir 𒁹 grupė, reiškianti, kiek skaičiuje yra rinkinių po 60. Ji buvo rašoma kairiau vienetų grupės, o grupė, nurodanti rinkinius po 3 600, dar kairiau ir t. t. Pavyzdžiui, skaičius 4 351 = (1 × 3 600) + (12 × 60) + (31 × 1) buvo rašomas taip: 𒁹 𒌋𒁹𒁹 𒌋𒌋𒌋𒁹.

Šumerai taip pat naudojo atimties simbolį ⌐. Vadinasi, 28 galėjo būti užrašytas 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 arba 𒌋𒌋𒌋⌐𒁹𒁹.

Nors šumerų skaičiavimo sistema buvo pranašesnė už egiptiečių, bet jai labai trūko vietos fiksavimo simbolio. Dėl to tas pats užrašas galėjo reikšti įvairius skaičius. Suvokti, koks skaičius užrašytas, reikėdavo iš konteksto. Pavyzdžiui, 24 = (24 × 1), 1440 = (24 × 60) + (0 × 1) ar net 36 014 = (10 × 3600) + (0 × 60) + (14 × 1) buvo rašomi lygiai taip pat: 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹.

Apie 300 m. pr. Kr. babiloniečiai įvedė *vietos fiksavimo simbolį* — du mažyčius vienas virš kito trikampius $\substack{\Delta\\\Delta}$. Tai iš dalies atliko nulio vaidmenį. Vėliau šia jų idėja pasinaudojo indai. Tačiau nulio kaip skaitmens dar nebuvo, ir todėl užrašant skaičius vienareikšmiškumo nebuvo galima išvengti. Pavyzdžiui, skaičius 𒁹 $\substack{\Delta\\\Delta}$ 𒁹 buvo vienareikšmiškai interpretuojamas kaip 3601 = (1 × 3600) + (0 × 60) + (1 × 1), o skaičius 𒌋𒌋𒁹 galėjo būti suprantamas kaip 21 = (20 × 1), kaip 611 = (10 × 60) + (11 × 1) ar net kaip 36 601 = (10 × 3600) + (10 × 60) + (1 × 1).

Skaitytojas gali įsitikinti, kad aritmetika babiloniečių skaičiavimo sistemoje buvo gana paprasta, nes naudojami tik du simboliai.

Graikų skaičiavimo sistema. Graikų skaičiavimo sistema buvo sukurta ir naudojama nuo 600 m. pr. Kr. iki 100 m. po Kr. Jų skaičiavimo sistema buvo ypač gremėzdiška ir neparanki skaičiavimams. Kita vertus, graikų matematikams svarbiausia buvo ne skaičiavimai, bet matematinių tiesų įrodymai. Galima sakyti, kad graikų matematika tai geometrija, nors jų darbai taip pat padėjo pagrindus logikos, skaičių teorijos bei matematinės analizės raidai.

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	ϕ
6	ϛ	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	o	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ϙ	900	ϡ

8 pav. Graikiškieji skaitmenys

Skaičiams užrašyti graikai naudojo 27 raides: 24 rašto abėcėlės ir tris nebevartojamas raides (8 pav.). Šiomis raidėmis skaičių graikai užrašydavo kaip žodį. Buvo naudojama *dešimtainė* sistema. Pavyzdžiui, $\sigma\mu\beta$ atitinka skaičių $200+40+2 = 242$. Graikų sistema turėjo *multiplikatyviosios* skaičiavimo sistemos bruožų. Symbolis ʹ reiškė daugybą iš 1000, o simbolis M — daugybą iš 10 000. Pavyzdžiui,

$$\delta M\beta'\rho\lambda\varepsilon = 4\cdot 10\,000 + 2\cdot 1000 + 100 + 30 + 5 = 42\,135.$$

Graikų abėcėlė buvo naudojama ir žodžiams, ir skaičiams užrašyti, todėl galima įsivaizduoti, kokios problemos galėdavo iškilti. Juk kiekvienas žodis reikšdavo ir kažkokį skaičių. Aritmetika graikų sistemoje taip pat labai sudėtinga. Pavyzdžiui, $\varepsilon + \theta = \iota\delta$. Taigi nors graikų skaičiavimo sistema buvo dešimtainė, bet labai neefektyvi. Jai trūko kitų skaičiavimo sistemos atributų. Išsiplėtus Romos imperijai apie 100 m. po Kr., ją visiškai išstūmė romėnų sistema.

Romėnų skaičiavimo sistema. Ji buvo kuriama nuo 500 m. pr. Kr. iki 100 m. po Kr. ir vartojama dar ir šiandien. Tiesa, daugiausia tik dekoratyviniais tikslais, puslapiams, knygų skyriams numeruoti ir pan. Pagrindiniai romėniškieji skaitmenys pateikti 9 paveiksle. Romėnų sistema peremta *grupavimo* principu. Negalima sakyti, kad ji yra grynai dešimtainė. Greta pagrindinio sistemos pagrindo *dešimt*, naudojamas ir šalutinis pagrindas *penki*. Dėl to skaičiams romėnų skaičiavimo sistemoje užrašyti reikia mažiau simbolių negu egiptiečių sistemoje.

Skaičius	Romėniškasis skaitmuo
1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1000	M

9 pav.

Romėnų skaičiai rašomi pagrindinius skaitmenis dėstant iš kairės į dešinę didėjimo tvarka. Tačiau yra kelios išimtys. Taupydami vietą, romėnai savo skaičiavimo sistemoje įvedė *atimties* principą, keletą skaičių užrašydami priešinga tvarka (10 pav.). Daugiareikšmiškumo išvengiama atimties principą taikant tik nurodytais 10 paveiksle atvejais. Pavyzdžiui, negalima rašyti IVX, nes neaišku, ar $\mathrm{IVX} = (10-5) - 1 = 4$, ar $\mathrm{IVX} = 10 - (5-1) = 6$.

Skaičius	Romėniškasis atitikmuo
4	IV
9	IX
40	XL
90	XC
400	CD
900	CM

10 pav.

Dideliems skaičiams romėnų sistemoje naudojamas horizontalus brūkšnys, užrašomas virš skaičiaus ir reiškiantis daugybą iš 1000.

Štai keletas romėnų skaičiavimo sistemos skaičių (11 pav.).

$$\mathrm{MCCCXLIV} = \mathrm{MCCC\ XL\ IV} = 1344,$$
$$\mathrm{MMCMXCIII} = \mathrm{MM\ CM\ XC\ III} = 2993,$$
$$\mathrm{DCCLXII} = 762,$$
$$\overline{\mathrm{XXV}} = 25000,$$
$$\overline{\overline{\mathrm{VII}}} = 7\,000\,000,$$
$$\overline{\mathrm{MMXC}}\mathrm{DCCCXLIX} = \overline{\mathrm{MM\ XC}}\ \mathrm{DCCC\ XL\ IX} =$$
$$= 2090 \cdot 1000 + 849 = 2\,090\,849.$$

11 pav.

Aritmetika, naudojant romėnų skaičiavimo sistemą, yra gana griozdiška (panašiai kaip egiptiečių), palyginti su skaičiavimais mūsų sistemoje. Skaičiavimams romėnai naudojo abaką — prietaisą, panašų į skaitliukus.

Kinų-japonų skaičiavimo sistema. Ji prieš daugelį metų buvo sukurta ir naudota Kinijoje, vėliau perimta japonų. Tai vienas iš nedaugelio *multiplikatyviosios* skaičiavimo sistemos pavyzdžių. Keletas tradicinių kinų-japonų sistemos simbolių pateikta 12 paveiksle.

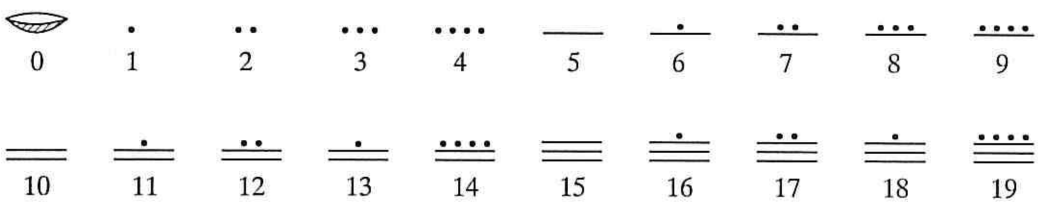
Skaičiai	Kiniškieji-japoniškieji simboliai
1	一
2	二
3	三
4	四
5	五
6	六
7	七
8	八
9	九
10	十
100	百
1000	千

12 pav.

Sistema buvo *dešimtainė*. Išvardysime tris šios sistemos bruožus. Pirma, skaičiai buvo rašomi vertikaliai. Antra, jeigu reikia tik vieno pagrindinio simbolio, tai daugiklis vienetas išmetamas iš poros. Trečia, pateikiant vienetų skaičius, vienetas taip pat išmetamas iš poros. Skaičiai $3164 = (3 \times 1000) + (1 \times 100) + (6 \times 10) + (4 \times 1)$ ir $7503 = (7 \times 1000) + (5 \times 100) + (3 \times 1)$ yra parodyti 13 paveiksle.

13 pav.

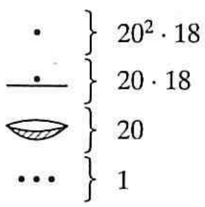
Majų skaičiavimo sistema. Ji sukurta 300–900 m. po Kr. Aritmetinės, kalendorinės ir astronominės majų žinios buvo gana aukšto lygio. Jų skaičiavimo sistema buvo paprasta, tačiau įmantri. Majai naudojo tris pagrindinius simbolius: tašką •, reiškiantį vienetą, horizontalų brūkšnį ——, reiškiantį penkis, ir kriauklės kiautą, atstojantį *nulį*. Šių trijų simbolių kombinacijomis jie užrašydavo skaičius nuo 0 iki 19 (14 pav.).



14 pav.

Tiems patiems skaičiams (nuo 0 iki 19) žymėti majai, garsūs savo hieroglifų raštu, naudojo ir hieroglifines ideogramas. Skaičius, didesnius už 19, iš pradžių rašydavo *dvidešimtainėje sistemoje*. Vėliau ši sistema buvo šiek tiek pakeista. Saulė ir Saulės kalendorius buvo labai svarbūs majams. Metai turi 365 dienas[3]. Skaičius 360 yra artimas 365 ir turi patogius daugiklius: $360 = 20 \cdot 18$. Todėl majai savo skaičiavimo sistemoje grupes, sudarytas iš 1, 20, 20^2, 20^3, 20^4 ir t. t., pakeitė grupėmis, sudarytomis iš 1, 20, $20 \cdot 18$, $20^2 \cdot 18$, $20^3 \cdot 18$ ir t. t.

Majų skaičiavimo sistema buvo *pozicinė*. Vienetų grupė rašoma apačioje, 20-čių grupė — virš vienetų grupės, dar aukščiau — grupė iš $20 \cdot 18 = 360$, dar aukščiau — grupė iš $20^2 \cdot 18 = 7200$ ir t. t. Skaičius $9363 = (1 \times 20^2 \cdot 18) + (6 \times 20 \cdot 18) + (0 \times 20) + (3 \times 1)$ buvo rašomas taip, kaip parodyta 15 pav.



15 pav.

Nors majų skaičiavimo sistema turėjo nulį, buvo pozicinė, bet sudėtingesniems skaičiavimams ji nebuvo patogi. Be to, reikėjo atidumo užrašant ir skaitant skaičius, atskiriant skaičiavimo sistemos grupes. Juk du horizontalūs brūkšniai galėjo reikšti:

═══ $= (10 \times 1) = 10$ arba ═══ $= (5 \times 20) + (5 \times 1) = 105$.

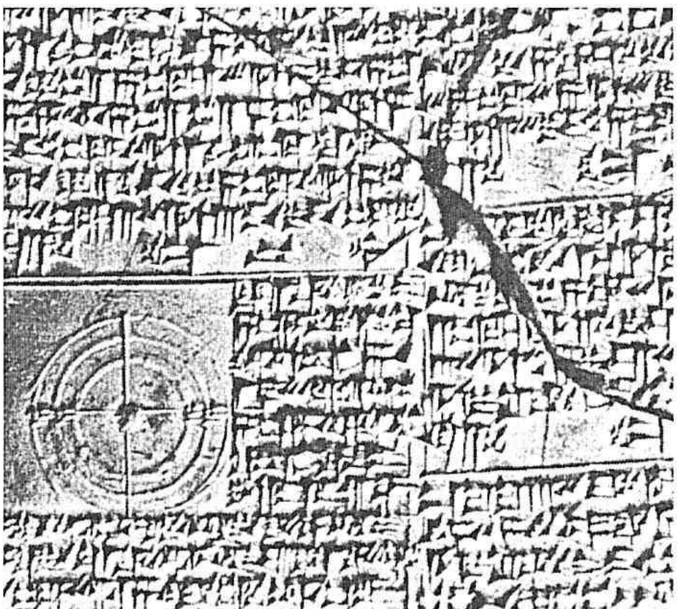
Indų-arabų skaičiavimo sistema. Tai *dešimtainė pozicinė* skaičiavimo sistema, kurią šiandien naudoja visas pasaulis. Skaičiams užrašyti yra dešimt pagrindinių simbolių: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

[3] Majai paskaičiavo, kad metai turi 365,2420 dienos. Tai labai tikslus rezultatas. Remiantis šiandieniniais duomenimis, metus sudaro 365,2422 dienos.

Mūsų skaičiavimo sistema yra kilusi iš Indijos. Apie 300 m. pr. Kr. indai naudojo mūsų pagrindinių skaitmenų, išskyrus nulį, pirmtakus. Kadangi iš pradžių indai neturėjo nulio simbolio, tai ši sistema negalėjo būti visiškai pozicinė, ir neturėjo didelių privalumų, palyginti su kitomis skaičiavimo sistemomis, naudotomis to meto Indijoje.

Tiksli nulio simbolio išradimo data nežinoma. Greičiausiai jis atkeliavo į Indiją iš vėlyvojo Babilono periodo per graikų pasaulį. Apie 750 m. po Kr. nulio simbolis ir pozicinė sistema jau buvo vartojama Bagdade ir išplito arabų pasaulyje. VIII amžiuje Ispanijoje jau buvo vartojami indiškieji-arabiškieji skaitmenys. Vėliau indų-arabų skaičiavimo sistema paplito visoje Europoje ir pasaulyje.

Nors mūsų skaičiavimo sistema yra labai efektyvi, bet ji ilgai turėjo konkuruoti su kitomis, kol pasidarė vyraujanti ir visuotinė. Ypač ilga kova vyko su romėnų skaičiavimo sistema. Dvi priešingos — *algoristų* ir *abakistų* grupuotės iškilo viduramžių Europoje. Indų-arabų sistemos simboliai Europoje paplito per arabų matematiko Alhorezmio knygą, todėl šios sistemos šalininkai buvo vadinami algoristais. Abakistai pirmenybę teikė romėnų sistemai ir skaičiuodami naudojosi abaku. Kova tarp algoristų ir abakistų truko apie 400 metų. Romos katalikų bažnyčia darė didžiulę įtaką prekybai ir mokslui. Romėniškieji skaitmenys buvo lengvai užrašomi ir išmokstami. Be to, sudėtis ir atimtis su jais buvo atliekama lengviau, negu naudojant „naujus" indiškuosius-arabiškuosius skaitmenis. Mūsų dešimtainė skaičiavimo sistema visuotinai pradėta naudoti tik maždaug nuo 1500 metų.



16 pav. Matematiniai babiloniečių raštai molinėse lentelėse