$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 1, 74–76

Skyrelio užduotis parinko Vilius Stakėnas.

Kiekvieno „Alfa plius omega“ numerio uždavinių skyriuje skelbsime trijų lygių uždavinius.

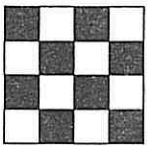
Epsilon (ε) uždaviniai — matematiniai galvosūkiai, mįslės, loginiai uždaviniai, kuriems išspręsti pakanka visai nedaug matematikos žinių. Tačiau dažnai ir jie slepia matematinio tyrinėjimo, apibendrinimų galimybę, kuri gali virsti nedidele matematine teorija. Tad kviečiame ne tik spręsti pateikiamus uždavinius, bet ir bandyti juos apibendrinti, siūlyti savo sąlygas.

Alfa (α) uždaviniams išspręsti pakaks mokyklinės matematikos žinių.

Omega (ω) skyrelyje skelbsime užduotis, kurioms prireiks (nors ne visada!) šiek tiek daugiau, nei reikalaujama mokykloje, įgūdžių ir žinių.

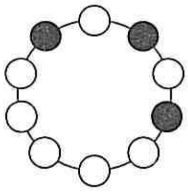
Savo sprendinius siųskite adresu: „Alfa plius omega“ redakcija, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius. Aktyviausiųjų ir geriausiai pasirodžiusių moksleivių laukia redakcijos dovanėlės.

ε. 83
◊◊◊



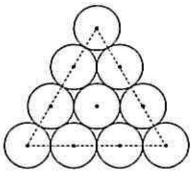
Lenta padalyta į 16 langelių, kaip parodyta paveiksle. Vienu ėjimu galima pakeisti pasirinktos eilutės (arba stulpelio) langelių spalvą: juodi langeliai tampa baltais, balti — juodais. Ar įmanoma po baigtinio skaičiaus ėjimų pasiekti tokią padėtį, kad tik vienas lentos langelis būtų juodas?

ε. 84
◊◊◊



Piešinyje pavaizduotas apskritimas, ant kurio suverti karoliukai. Viena karoliukų pusė balta, kita juoda. Galima pašalinti bet kurį juodą karoliuką, tačiau tada gretimi du (vienas, jei daugiau nėra) atverčiami kita puse (keičia spalvą). Ar galima laikantis šios taisyklės pašalinti visus karoliukus?
Patyrinėkite kitus karoliukų išsidėstymo atvejus.

ε. 85
◊◊◊

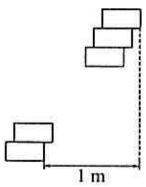


Monetos išdėstytos, kaip parodyta paveiksle. Kiek mažiausiai jų reiktų išimti, kad jokių trijų likusių monetų centrai nebūtų lygiakraščio trikampio viršūnės?

ε. 86
◊◊◊

Penkiaženklis skaičius $A679B$ dalijasi iš 72. Kokie skaitmenys yra A ir B?

ε. 87
◊◊◊

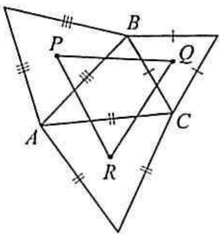


Plytos yra 20 cm ilgio ir 10 cm aukščio. Plytos dedamos viena ant kitos nenaudojant skiedinio. Kokio mažiausio aukščio bokštą galėtume pastatyti, kad jo viršūnė būtų pasislinkusi pagrindo atžvilgiu 1 m?

α. 169
◊◊◊

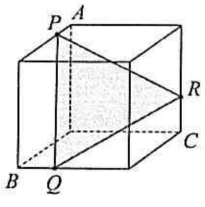
Kamera filmuoja dviratininką, kas pusę sekundės padaromas vienas kadras. Dviračio rato skersmuo lygus 60 cm, prie dviračio stipinų pritvirtintas atšvaitas. Kokiu greičiu turi važiuoti dviratininkas, kad filme atrodytų, jog dviratis važiuoja, o ratai nejuda?

α. 170
◊◊◊



Ant trikampio ABC kraštinių nubrėžti lygiakraščiai trikampiai, P, Q, R yra šių trikampių centrai. Pabandykite pastebėti ir įrodyti kokią nors trikampio PQR savybę. (Vienas teiginys apie šį trikampį vadinamas Napoleono teorema, sakoma, kad ją įrodė imperatorius Napoleonas.)

α. 171
◊◊◊

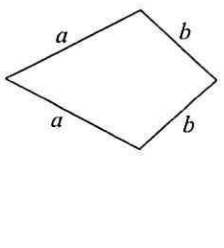


Ant vienetinio kubo briaunų pažymėti trys taškai P, Q ir R, $AP = BQ = CR = 1/3$. Per šiuos taškus eina plokštuma. Kokiu santykiu ši plokštuma dalija kitas kubo briaunas?

α. 172
◊◊◊

Vienos šalies parlamento kiekvienas narys turi ne daugiau kaip 3 priešus (jei A yra B priešas, tai B yra A priešas). Įrodykite, kad parlamentą galima padalyti į dvejus rūmus, kad kiekvienas parlamento narys savo rūmuose turėtų ne daugiau kaip vieną priešą.

α. 173
◊◊◊



Iš dviejų vienodų a ilgio ir dviejų vienodų b ilgio strypų daromas aitvaro karkasas. Kokio didžiausio ploto aitvarą galima padaryti?

ω. 50

◊◊◊

Jei $|x| < 1$, tai geometrinę progresiją su vardikliu x galima susumuoti: $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$. Įrodykite, kad su $|x| < 1$ taip pat teisinga lygybė $(1 + x)(1 + x^2) \cdots (1 + x^{2n}) \cdots = \frac{1}{1-x}$.

ω. 51

◊◊◊

Tegu $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ yra dvi funkcijos. Įrodykite, kad jei $f(x)$ yra monotoninė, tai

$\int_0^1 f(g(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

ω. 52

◊◊◊

Teigiamo skaičiaus α spektru vadinsime sveikųjų neneigiamų skaičių seką $[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots$. Įrodykite, kad skirtingų skaičių spektrai irgi būtinai skirtingi. Kaip susiję skaičių $\sqrt{2}$ ir $2+\sqrt{2}$ spektrai?

ω. 53

◊◊◊

Skaičius $p = 11111111111111111$ yra pirminis. Įrodykite, kad jei skaičius yra pirminis ir skaičiavimo sistemoje kokiu nors pagrindu užrašomas vien tik vienetais, tai vienetų suma irgi pirminis skaičius.

ω. 54

◊◊◊

Mėtoma simetriška moneta. Tegu p_n yra tikimybė, kad monetą teks mesti n kartų, kol du kartus iš eilės pasirodys herbas, q_n — kad teks mesti ne mažiau kaip n kartų. Išreikškite tikimybes p_n, q_n Fibonačio skaičiais.