

Įteikti pirmieji LJMM baigimo pažymėjimai

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus, Juozas Šinkūnas
 apynis@ieva.maf.vu.lt

LJMM tarybos nariai apžvelgia pirmųjų dviejų mokyklos darbo metų rezultatus. Straipsnyje pateikiamos antrosios programos antroji, trečioji bei ketvirtoji užduotys.

1998 metų rugsėjo mėn. atkurta Lietuvos jaunujų matematikų mokykla. Ji tęsia du dešimtmečius (1969–1989) veikusias Lietuvos jaunujų matematikų neakivaizdinės mokyklos darbą. Šį pavasarį 228 moksleiviams, sėkmingai baigusiems šią mokyklą, buvo įteikti mokyklos baigimo pažymėjimai.

Iš 613 moksleivių, atsiuntusių stojamosios užduoties sprendimus, į mokyklą buvo priimti 563 mokiniai. Tenka apgailestauti, kad keičiantis užduotims sprendžiančiųjų skaičius vis mažėjo. Ypač sunkiai sekėsi spręsti uždavinius nestandartine tematika (invariantų metodas, kraštinio elemento metodas, Dirichle principas, geometrinių vietų metodas, indukcijos principas) ir užduotis su sveikąja ir trupmenine skaičiaus dalimis.

Apklausus moksleivius, paaiškėjo, kad įdomiausios jiems buvo tikimybių teorijos ir statistikos bei grafų teorijos pradmenų temos.

Sudarydami mokyklos programą (žr. „Alfa plus omega“, 1998 m., Nr. 2(6) arba LJMM

Interneto svetainėje <http://www.mif.vu.lt/ljmm>), stengėmės parinkti tokias temas, kurios ne tik praplėstų moksleivių akiratį, bet ir būtų naudingos studijuojant tiksliuosius mokslus. Privaloma programos dalis — baigiamasis uždavinių sprendimo konkursas. Šiam konkursui buvo sudaryti šeši uždaviniai iš programoje nagrinėtų temų. Uždavinių sprendimui skirtas laikas — viena valanda. Pateikiame visą konkurso užduotį:

1. Raskite funkcijos $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2+4x+18}}$ reikšmių sritį.
2. Raskite visų triženklų skaičių, kurie dalijasi iš 11, sumą.
3. Trikampio kraštinių ilgiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas lygus 4. Raskite visus galimus trumpiausios kraštinės ilgius, kad trikampis būtų smailusis.
4. Apskaičiuokite $f(0)$, kai $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -5x$.
5. Yra keturios atkarpos, kurių ilgiai 2, 4, 7 ir 10 centimetrų. Kokia tikimybė, kad, atsitiktinai pasirinkus tris atkarpas, iš jų bus galima sudėti trikampį?
6. Išspręskite lygtį $6 \cos \pi \left(x - \frac{1}{2}\right) = 4x^2 - 4x + 7$.

Penki moksleiviai išsprendė visus šešis uždavinius ir tapo konkurso nugalėtojais

JULIUS ANDRIKONIS	Vilniaus Jėzuitų gimnazija
ONA ČIOČYTĖ	Vilniaus Tuskulėnų vidurinė mokykla
EIMANTAS JATKONIS	Kauno KTU gimnazija
MANTAS KAULAKYS	Vilniaus Mykolo Biržiškos gimnazija
AURELIJA NORVILAITE	Šiaulių J. Janonio gimnazija

Šiems moksleiviams LJMM baigimo pažymėjimus ir prizus — knygas „Lietuvos matematikų draugijai 40 metų“ įteikė Lietuvos matematikų draugijos pirmininkas profesorius Jonas Kubilius.

Iškilmingame LJMM baigimo pažymėjimų įteikimo posėdyje dalyvavo ilgametis anksčiau veikusios neakivaizdinės jaunųjų matematikų mokyklos tarybos pirmininkas docentas Alfonsas Matuliauskas, dabartinės jaunųjų matematikų mokyklos tarybos nariai ir gausus būrys matematikos mokytojų.

Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla tęsia darbą. Antroji jos programa, stojamoji ir pirmoji užduotys atspausdintos žurnale „Alfa plius omega“, 1999, Nr. 2(8).

Pateikiame LJMM antrosios programos antrą (parengė Vilniaus pedagoginio universiteto docentas Edmundas Mazėtis), trečią (parengė Kauno „Saulės“ gimnazijos mokytoja ekspertė Birutė Vasylienė) ir ketvirtą (parengė Vilniaus pedagoginio universiteto docentas Juozas Šinkūnas) užduotis.

Antroji užduotis

1. Keturkampis $ABCD$ — kvadratas. Nubrėžti du vienojų spindulių besiliečiantys apskritimai, kurių centrai yra O_1 ir O_2 . Pirmasis apskritimas liečia kvadrato kraštines AD ir AB , o antrasis — kraštines AD ir DC . Iš kvadrato viršūnės B nubrėžta liestinė pirmajam, o iš viršūnės C — liestinė antrajam apskritimui; liestinės susikerta taške E . Įrodykite, kad į trikampį BCE įbrėžto apskritimo spindulys lygus pirmųjų dviejų apskritimų spinduliui.
2. Įrodykite, kad stačiojo trikampio įžambinės dalių, į kurias ją dalija įbrėžtojo apskritimo lietimosi taškas, sandauga lygi to trikampio plotui.
3. Du apskritimai kertasi taškuose M ir K . Per tašką M nubrėžta tiesė, vieną iš tų apskritimų kertanti taške A , o kitą — taške B . Per tašką K nubrėžta antra tiesė, kertanti minėtus apskritimus taškuose C ir D . Įrodykite, kad tiesės AC ir BD yra lygiagrečios.
4. Tegul apskritimo taškai yra A, B, C ir D . Taškas M yra lanko AB vidurys, stygos MC ir MD kerta stygą AB taškuose E ir K . Įrodykite, kad taškai K, E, C ir D yra viename apskritime.
5. Apie kvadratą $ABCD$ apibrėžtas apskritimas, kurio lanko CD pažymėtas taškas P . Įrodykite, kad $PA + PC = \sqrt{2}PB$.

6. Apskritimo spindulys R , stygų AB ir BC ilgiai a ir b . Apskaičiuokite stygos AC ilgį.
7. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis $ABCD$, kurio įstrižainės statmenos, O — apskritimo centras. Įrodykite, kad atstumas nuo taško O iki kraštinės AB lygus kraštinės CD ilgio pusei.
8. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis $ABCD$, kurio įstrižainės statmenos. Įrodykite, kad keturkampio plotas lygus priešingųjų kraštinių sandaugų sumos pusei.
9. Įrodykite, kad taisyklingojo aštuonkampio plotas lygus jo mažiausios ir didžiausios įstrižainių sandagai.
10. Atkarpos AB ir CD yra du statmeni apskritimo su centru O skersmenys. Taškas M yra atkarpos AO vidurys. Apskritimas, kurio centras M , o spindulio ilgis MC , kerta skersmenį AB taške X . Įrodykite, kad OX yra įbrėžtojo į pirmąjį apskritimą taisyklingojo dešimtkampio kraštinė, o CX — taisyklingojo penkiakampio kraštinė.

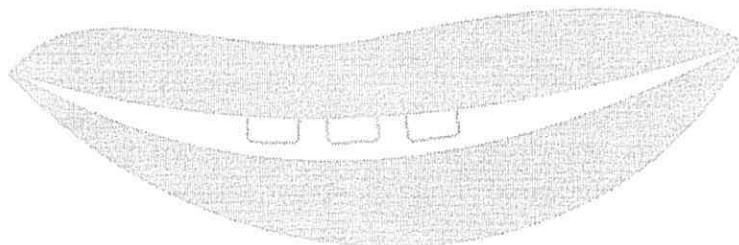
Trečioji užduotis

1. Geometriškai išspręskite lygtį $3|x + 2| = |x - 4|$.
2. Išspręskite lygtį $|2x - 7| + |x - 3y + 4| = 0$.
3. Išspręskite nelygybę $||x - 3| - x| \geq 4$.
4. Įrodykite nelygybę $|ac - bd| \leq 1$, kai $a^2 + b^2 = 1$ ir $c^2 + d^2 = 1$.
5. Nubraižykite funkcijos $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$ grafiką.
6. Išspręskite lygtį $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3x - 6$.
7. Išspręskite lygtį $|6x - 5| = 4 \sin \frac{\pi x}{3}$.
8. Raskite funkcijos $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ mažiausiąją reikšmę.
9. Su kuriomis a ($a \in \mathbb{R}$) reikšmėmis lygtis $|x^2 - 4x - 5| = a$ turi dvi šaknis.
10. Raskite sveikųjų skaičių poras $(x; m)$, tenkinančias lygybę $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = m \cdot x$.

Ketvirtoji užduotis

1. Smailiojo trikampio ABC kraštinių AB ir BC projekcijų į tiesę AC ilgiai atitinkamai lygūs 4 cm ir 6 cm. Raskite šio trikampio pusiaukraštinių projekcijų į AC ilgius.

2. Per trikampio ABC pusiauakraštinį susikirtimo tašką išvesta tiesė l , nuo trikampio viršūnių B ir C nutolusi atitinkamai b ir c atstumais. Raskite šios tiesės nuotolį nuo viršūnės A .
3. Per trapezijos $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką išvesta tiesė, lygiagreti su pagrindais AD ir BC . Ji kerta šonines trapezijos kraštines taškuose E ir F . Apskaičiuokite atkarpos EF ilgį, jeigu $BC = a$, $AD = b$.
4. Trikampio ABC kraštinę BC taškas D dalija santykiu $BD : DC = 1 : 2$, o atkarpą AD taškas M dalija santykiu $AM : MD = 3 : 2$. Tiesė BM kerta trikampio kraštinę AC taške E . Apskaičiuokite $S_{MECD} : S_{ABC}$.
Nurodymas. Prisiminkite, kad trikampių, kurių aukštinės bendros, plotų santykis lygus jų pagrindų ilgių santykiui.
5. Į 60° kampą įbrėžti du išoriškai besiliečiantys apskritimai. Raskite tų apskritimų spindulių santykį.
6. Trikampio ABC viduje pažymėtas taškas D . Tiesės AD , BD ir CD kerta trikampio kraštines atitinkamai taškuose E , F ir G . Apskaičiuokite $CF : FA$, jei $AG : GB = m$, $BE : EC = n$.
7. Trapezijos $ABCD$ pagrindai $AD = 39$ cm ir $BC = 26$ cm, o šoninės kraštinės $AB = 5$ cm ir $CD = 12$ cm. Raskite spindulį apskritimo, kuris eina per viršūnes A ir B ir liečia kraštinę CD arba jos tęsinį.
8. Stačiakampis, kurio kraštinės 8 cm ir 34 cm, padalintas į du panašius nelygius stačiakampius. Raskite jų plotus.
9. Atkarpa KL , lygiagreti su trapezijos $ABCD$ pagrindais AD ir BC , trapezijos plotą dalija į dvi lygiaplates dalis. Apskaičiuokite atkarpos KL ilgį, jeigu $BC = a$, $AD = b$.
10. Trikampis ABC lygiašonis ($AB = BC$), AE — kampo A pusiauakampinė. Jeigu trikampis ABC panašus į trikampį CAE , tai abu minėti trikampiai yra auksiniai (taurieji), t. y. $\frac{AB}{AC} = \Phi$ ir $\frac{AC}{CE} = \Phi$. Įrodykite.



Jei namų darbams liepta įrodyti tapatybę

$$f(x, y) = g(x, y),$$

tai vienos pusės reiškinį tol pertvarkinėjame, kol gauname kitos pusės reiškinį. Tačiau ką daryti, jei prirašyta jau keli puslapiai, laiko nėra, o reikiamas reiškinys vis nepasirodo?

Štai patarimas, kaip išsisukti iš tokios padėties. Pradėkime nuo tuščio puslapio viršaus kairiojo krašto ir pertvarkymus tęskime maždaug iki puslapio vidurio:

$$f(x, y) = f_1(x, y) = f_2(x, y) = \dots = f_n(x, y).$$

Sustoję ties viduriu, pradėkime rašyti nuo puslapio apačios (dešiniojo krašto) iš dešinės į kairę, pamažu kopdami aukštyn:

$$g(x, y) = g_1(x, y) = g_2(x, y) = \dots = g_m(x, y).$$

Į eilutę tarp viršutinės ir apatinės puslapio dalių įrašykime: *nesunku matyti, kad* $f_n(x, y) = g_m(x, y)$.

O dabar dar vienas patarimas: geriau nesinaudokite pirmuoju patarimu egzaminu metu!