$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 1, 61–64

Pagalbinis apskritimas

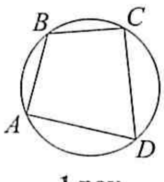
Leonas Narkevičius
leonasn@gim.ktu.lt

Daugelį geometrijos uždavinių pradedame spręsti nusibrėžę vieną ar keletą pagalbinių linijų, kurios padeda nustatyti žinomų ir nežinomų figūros elementų ryšį. Dažnai sugalvoti, kurias linijas reikėtų brėžti, būna nelengva. Straipsnyje nagrinėjama, kaip pagalbinis apskritimas padeda nustatyti ieškomus sąryšius ir išspręsti uždavinį.

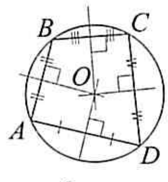
Straipsnio autorius — KTU gimnazijos matematikos mokytojas, parengęs ne vieną Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados nugalėtoją bei prizininką.

Uždavinius, kurie yra išspręsti pritaikius naują idėją, verta gerai išsinagrinėti ir įsidėmėti. Gali būti, kad ta idėja anksčiau ar vėliau pravers.

Šiame straipsnyje panagrinėsime apibrėžtinį apskritimą kaip pagalbinę liniją, padedančią nustatyti ieškomus sąryšius. Iš pradžių priminkime jo savybes, susijusias su keturkampiais.



1 pav.

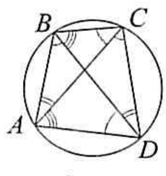


2 pav.

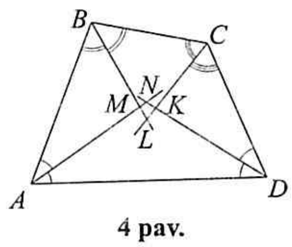
Keturkampio $ABCD$ viršūnės yra apskritimo taškai (1 pav.). Sakome, kad apskritimas yra *apibrėžtas* apie keturkampį $ABCD$, arba keturkampis $ABCD$ *įbrėžtas* į šį apskritimą. Keturkampis $ABCD$ vadinamas *įbrėžtiniu*, o apskritimas — *apibrėžtiniu* apie keturkampį $ABCD$.

Įbrėžtinio keturkampio požymiai:

1) įbrėžtinio keturkampio kraštinių vidurio statmenys kertasi viename taške (tas taškas yra apibrėžtinio apskritimo centras, žr. 2 pav.);
2) kiekviena įbrėžtinio keturkampio kraštinė matoma iš prieš ją esančios kraštinės galų tuo pačiu kampu (3 pav.);
3) įbrėžtinio keturkampio priešingų kampų suma lygi 180°.



3 pav.



4 pav.

Panagrinėkime porą paprastų pavyzdėlių, kuriuose reikia pasiremti kuriuo nors įbrėžtinio keturkampio požymiu.

1 pavyzdys. *Keturkampio ABCD vidaus kampų pusiaukampinės susikirsdamos sudaro iškiląjį keturkampį $KLNM$ (4 pav.). Įrodykime, kad apie jį galima apibrėžti apskritimą.*

Sprendimas. Trikampio AND
$\angle MNK = 180° - (\angle NAD + \angle NDA) = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$.

Analogiškai trikampio BLC
$\angle MLK = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$.

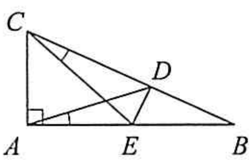
Tada
$\angle MNK + \angle MLK = 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Remiantis trečiuoju įbrėžtinio keturkampio požymiu, apie keturkampį $MNKL$ galima apibrėžti apskritimą.

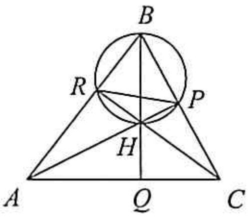
2 pavyzdys. *Stačiojo trikampio ABC įžambinėje BC ir statinyje AB pažymėti atitinkamai taškai D ir E taip, kad $\angle DCE = \angle DAE$ (5 pav.). Raskime $\angle CDE$.*

Sprendimas. Kadangi keturkampio $ACDE$ kraštinė DE matoma tuo pačiu kampu iš viršūnių A ir C, tai pagal antrąjį požymį apie keturkampį $ACDE$ galima apibrėžti apskritimą.

Pagal trečiąjį požymį
$\angle CDE = 180° - \angle CAE = 180° - 90° = 90°$.



5 pav.



6 pav.

Prisiminę įbrėžtinio keturkampio savybes, pereikime prie jų taikymo.

3 pavyzdys. *Išvestos smailiojo trikampio ABC aukštinės AP, BQ ir CR (6 pav.). Įrodykime, kad $\angle ABQ = \angle APR$.*

Sprendimas. Tegul H yra trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas. Kadangi $\angle APB$ ir $\angle CRB$ — statieji, tai apie keturkampį $BPHR$ galima apibrėžti apskritimą, BH laikant skersmeniu. Nubrėžę apskritimą, pastebime, kad $\angle ABQ = \angle APR$ (kaip įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį lanką).

Taigi pasinaudoję pagalbiniu apskritimu, pritaikėme įbrėžtinių kampų teoremą ir kartu nustatėme ryšį tarp nurodytų kampų.

Keletą analogiškų uždavinių siūlome išspręsti savarankiškai.

1 uždavinys. Iš stačiojo trikampio ABC statinio BC išvestas statmuo MN į įžambinę AB. Įrodykite, kad $\angle MAN = \angle MCN$.

2 uždavinys. Stačiojo trikampio išorėje nubraižytas kvadratas, kurio viena kraštinė yra trikampio įžambinė. Įrodykite, kad tiesė, jungianti stačiojo trikampio stačiojo kampo viršūnę su kvadrato centru, dalija statųjį trikampio kampą pusiau.

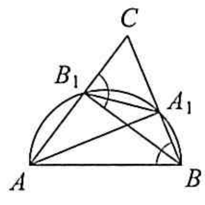
3 uždavinys. Kampo viduje paimtas bet koks taškas M. Iš jo išvesti statmenys MP ir MQ kampo kraštinėms. Iš kampo viršūnės A išvestas statmuo AK atkarpai PQ. Įrodykite, kad $\angle KAP = \angle MAQ$.

4 pavyzdys. *Įrodykime, kad atkarpa, jungianti dviejų smailiojo trikampio aukštinių pagrindus, atkerta nuo jo trikampį, panašų į duotąjį (7 pav.).*

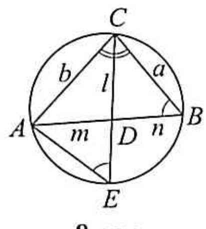
Sprendimas. Tegu AA_1 ir BB_1 — smailiojo trikampio ABC aukštinės. $\angle AA_1B$ ir $\angle AB_1B$ statūs, todėl apskritimas, nubrėžtas kraštinę AB laikant skersmeniu, eis per taškus A_1 ir B_1. Toliau pastebime, kad
$\angle ABC = 180° - \angle AB_1A_1$,
$\angle A_1B_1C = 180° - \angle AB_1A_1$,
todėl $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ ir trikampiai ABC ir A_1B_1C yra panašūs.

4 uždavinys. Iš lygiagretainio $ABCD$ viršūnės A išvestos aukštinės AM ir AN. Įrodykite, kad trikampiai AMN ir ABC yra panašūs.

5 uždavinys. Iš trikampio ABC aukštinės AH pagrindo H į kraštines AC ir BC išvesti statmenys HM ir HN. Įrodykite, kad trikampis CMN panašus į trikampį ABC.



7 pav.

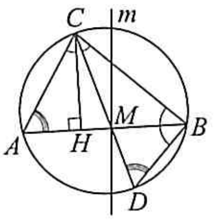


8 pav.

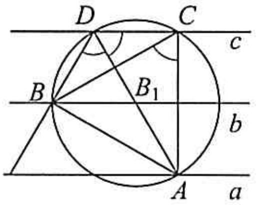
Kartais naudinga pagalbinį apskritimą apibrėžti ir apie trikampį.

5 pavyzdys. *Įrodykime, kad trikampio pusiaukampinės kvadratas lygus jo kraštinių, einančių iš to paties taško kaip ir pusiaukampinė, sandaugos ir atkarpų, į kurias pusiaukampinė dalija trečiąją kraštinę, sandaugos skirtumui (8 pav.).*

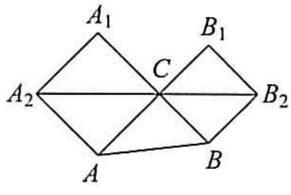
Sprendimas. Apie trikampį ABC apibrėžkime apskritimą ir pratęskime pusiaukampinę CD iki susikirtimo su apskritimu taške E. Tegu $BC = a$, $AC = b$, $AD = m$, $BD = n$, $CD = l$, $DE = x$.



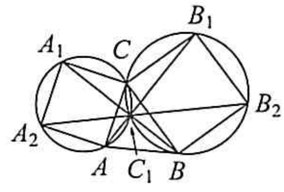
9 pav.



10 pav.



11 pav.



12 pav.

Pagal salygą $\angle ACE = \angle BCE$, be to, $\angle AEC = \angle ABC$ kaip įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį kampą. Taigi trikampiai ACE bei BCD yra panašūs, todėl teisinga lygybė: $\frac{l+x}{b} = \frac{a}{l}$. Iš jos gauname $l^2 = ab - lx$. Kadangi stygos AB ir CE kertasi taške D, tai teisinga lygybė $lx = mn$ ir $l^2 = ab - mn$.

6 pavyzdys. *Trikampio aukštinė ir pusiaukraštinė, išvestos iš vienos viršūnės, yra trikampio viduje, nesutampa ir sudaro lygius kampus su kraštinėmis, einančiomis iš tos pačios viršūnės (9 pav.). Įrodykime, kad trikampis yra statusis.*

Sprendimas. Tegul trikampio ABC aukštinė CH ir pusiaukraštinė CM su kraštinėmis AC ir BC sudaro lygius kampus. Apie trikampį ABC apibrėšime apskritimą ir pratęsime pusiaukraštinę CM iki susikirtimo su apskritimu taške D. Nagrinėkime trikampius ACH ir BCD. Iš sąlygos žinome, kad $\angle ACH = \angle BCM$, o $\angle A = \angle D$, nes jie yra įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį lanką. Tada lygūs ir tretieji kampai $\angle AHC = \angle CBD = 90°$, o CD — apskritimo skersmuo.

Apskritimo centras yra skersmenyje CD ir tiesėje m, statmenoje AB ir einančioje per AB vidurio tašką M. Pusiaukraštinė CM nėra aukštinė, todėl tiesės CD ir m turi tik vieną bendrą tašką M, kuris ir yra apibrėžto apskritimo centras. Vadinasi, AB yra apskritimo skersmuo ir $\angle ACB = 90°$.

6 uždavinys. Raskite trikampio kampus, jei žinoma, kad:

a) pusiaukraštinė ir aukštinė, išvestos iš vienos viršūnės, dalija kampą į tris lygias dalis;

b) pusiaukraštinė, pusiaukampinė ir aukštinė, išvestos iš vieno taško, dalija kampą prie šios viršūnės į keturias lygias dalis.

7 pavyzdys. *Nubraižykime lygiakraštį trikampį taip, kad jo viršūnės būtų trijose lygiagrečiose tiesėse.*

Yra žinoma keletas šio įdomaus uždavinio sprendimo būdų: pasinaudojant posūkiu taško atžvilgiu, panašumu, taip pat — algebriniu metodu (10 pav.). Palyginti greitai galima išspręsti uždavinį pasinaudojus pagalbiniu apskritimu.

Sprendimas. Tegul ABC ieškomasis lygiakraštis trikampis, kurio viršūnės yra atitinkamai lygiagrečiose tiesėse a, b ir c. Apskritimas, apibrėžtas apie šį trikampį, kerta tiesę c ne tik taške C, bet ir dar kuriame nors taške D. Remiantis įbrėžtinių kampų savybe, $\angle ADC = \angle ABC = 60°$. Remdamiesi šia išvada jau galime pradėti braižyti. Iš bet kurio tiesės c taško D išvedame spindulius, sudarančius su tiese c kampus, lygius $60°$ ir $120°$. Tegul vienas iš spindulių kerta tiesę a taške A ir tiesę b taške B_1, o kitas kerta tiesę b taške B. Tuomet atkarpa AB yra trikampio ABC kraštinė AB.

Tiesėje c atidėkime atkarpą DC, lygią atkarpai AB_1, taip, kad taškai C ir A būtų vienoje tiesės BD pusėje. Tada taškas C yra trečioji trikampio ABC viršūnė, kadangi trikampiai ABB_1 ir BCD yra lygūs. Iš čia išplaukia, kad $AB = BC$ ir $\angle ABC = 60°$.

Taigi pagalbinį apskritimą kartais pravartu naudoti ir brėžimo uždaviniuose.

Panagrinėsime dar vieną pavyzdį, kur sunkiausia yra sugalvoti, kad apie kvadratus reikia apibrėžti apskritimus.

8 pavyzdys. *Trikampio ABC kraštinės AC ir BC kartu yra kvadratų ACA_1A_2 ir BCB_1B_2, nubrėžtų trikampio išorėje, kraštinės. Įrodykime, kad tiesės AB_1, A_1B ir A_2B_2 kertasi viename taške, ir raskime kampus tarp tiesių.*

Sprendimas. Jei $\angle ACB = 90°$, tai teiginys akivaizdus. Tuomet tiesės AB_1 ir A_1B statmenos ir kiekviena iš jų kerta tiesę A_2B_2 taške C 45° kampu (11 pav.).

Jei $\angle ACB \neq 90°$, tai apskritimai, apibrėžti apie kvadratus, be taško C turi dar vieną bendrą tašką C_1, kuris kaip tik ir yra tiesių AB_1, A_1B ir A_2B_2 susikirtimo taškas (12 pav.). Iš tikrųjų $\angle A_2C_1C = 90°$, kaip įbrėžtinis, besiremiantis į pusapskritimį. Analogiškai $\angle CC_1B_2 = 90°$. Todėl $\angle A_2C_1C + \angle CC_1B_2 = 180°$, t. y. spinduliai C_1A_2 ir C_1B_2 sudaro tiesę.

Lygiai taip pat įrodoma, kad taškas C_1 yra tiesėse AB_1 ir A_1B.

Nagrinėdami gautuosius įbrėžtinius kampus, randame, kad tiesės AB_1 ir A_1B tarpusavyje statmenos ir kiekviena iš šių tiesių su tiese A_2B_2 sudaro 45° kampą.

7 uždavinys. Trikampio kraštinės AB, AC ir BC kartu yra ir lygiakraščių trikampių ABC_1, BCA_1 ir CAB_1, esančių trikampio išorėje, kraštinės. Įrodykite, kad tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 kertasi viename taške ir kiekviena iš jų su kiekviena kita sudaro 60° kampą.

8 uždavinys. Vienoje kampo kraštinėje yra taškai A ir B. Raskite kitos kampo kraštinės tašką, iš kurio atkarpa AB matoma didžiausiu kampu.

Taigi matome, kad skirtingi geometriniai uždaviniai sprendžiami taikant tą patį metodą. Nubrėžus pagalbinį apskritimą, atsiranda galimybė pritaikyti daugiau teoremų ir kartu rasti ryšius tarp figūros elementų.

Э. Готман, *Вспомогательная окружность, Математический кружок: Геометрия*, вып. 1, Бюро квантум, Москва, 1998, 11–15.

INFO

Dar 1992 metais Tarptautinė matematikų sąjunga (IMU — International Mathematical Union) paskelbė 2000-uosius metus tarptautiniais matematikos metais. Daugelio matematinių renginių, vykstančių įvairiose šalyse, tikslas — nubrėžti naujojo šimtmečio svarbiausių matematinių tyrinėjimų gaires, siekti, kad matematika taptų atviresnė, kad visuomenė geriau suprastų jos teorinę ir praktinę reikšmę.