$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 1, 51–55

# *Matematikos naujųjų mokymo priemonių ypatumai ir metodinės naujovės*

Kazimieras Pulmonas

*Straipsnyje nagrinėjami mokomųjų priemonių, kurias parengė autorių kolektyvas ir išleido TEV leidykla, ypatumai ir metodinės naujovės.*

*Autorius, Pedagogų profesinės raidos centro darbuotojas, Vilniaus J. Basanavičiaus vidurinės mokyklos mokytojas–metodininkas, jau 36 metai dirba pedagoginį darbą.*

Matematikos, pradedant VII klase, jau mokoma pagal autorių kolektyvo parengtą naujų mokomųjų priemonių rinkinį, kurį sudaro vadovėlis, uždavinynas ir mokytojo knyga. Vadovėliuose pateikiamos ne tik integruotai plėtojamos algebros ir geometrijos temos, bet ir klasė iš klasės gilinamasi į problemų sprendimo, skaičių ir skaičiavimų, matų ir matavimų, sąryšių ir funkcijų, statistikos, ekonomikos elementų, algoritmų klausimus. Tai nauja Lietuvos mokyklos praktikoje. Šios mokomosios priemonės realizuoja dr. P. Gudyno ir dr. A. Zabulionio programą, todėl jose, palyginti su ankstesniais vadovėliais, nėra pernelyg sudėtingų ir antraeilių dalykų, gremėzdiškų ir formalių užduočių. Jų pagrindinėje mokykloje paprasčiausiai atsisakoma. Apsiribojama esminiais, matematikos pamatus grindžiančiais klausimais. Stengiamasi sąmoningai juos suvokti, suprasti jų būtinybę. Nei vadovėliuose, nei uždavinynuose nebelikę sudėtingų sveikųjų ir trupmeninių reiškinių, iracionaliųjų reiškinių tapačių pertvarkių.

Apkarpytos ir revizuotos kai kurios tradicinės algebros ir geometrijos temos nagrinėjamos su gerokai brandesnio amžiaus mokiniais. Todėl besimokantiems jos labiau prieinamos. Pavyzdžiui, anksčiau VII klasėje nagrinėtas tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemų sprendimas dabar gvildenamas IX klasėje. Su funkcijos sąvoka susipažįstama VIII klasėje (buvo — VII), tiesinė funkcija, išreikšta formule $y = kx + b$, nagrinėjama IX klasėje (buvo — VII). Iki šiol paprastai IX klasėje nagrinėti vektoriai dabar į pagrindinės mokyklos matematikos kursą neįtraukti. Galima būtų pateikti ir daugiau pavyzdžių, kai tam tikros temos nagrinėjamos su vienais dviem metais brandesniais ugdytiniais.

Tačiau, greta gerokai sumažėjusių algebros ir geometrijos temų, naujuose vadovėliuose ne tik mokiniams, bet ir pagrindinės mokyklos matematikos mokytojams yra visai naujų — statistikos elementų, tikimybių teorijos pradmenų, ekonomikos klausimų. Jų mokymas ne tik turinio, bet ir metodikos požiūriu kelia pedagogams laikinų sunkumų: neįprastas naujas turinys, nežinomi medžiagos mokymo akcentai. Ir ką čia slėpti — patiems reikia į šiuos dalykus gilintis kartu su mokiniais. Ne visose savivaldybėse yra, o ir esantys Mokytojų centrai, kurie privalo rūpintis pratinti mokytojus prie naujovių, mažai kuo gali pagelbėti, nes paprasčiausiai tokių dalykų nežino. Tad, kokie naujųjų mokymo priemonių ypatumai? O jų keletas.

*Pirma.* Vadovėlių skyrių ir skyrelių teorinė medžiaga skirta visiems, o pratimai ir uždaviniai — silpnesniems ir vidutiniams mokiniams. Uždavinynai skirti vidutiniams ir stipresniems ugdytiniams, siekiantiems aukštesniojo ir išplėtoto lygmens. Suprantama, be uždavinyno pagrindinio mokymosi lygmens siekiantis mokinys gali apsieiti. Tiesa, vadovėlyje yra ir uždavinių „su žvaigždute", kuriais reikėtų „maitinti" klasės stipresniuosius ir galvočius.

Autorių kolektyvo manymu, pratybų sąsiuviniai, pradedant VII klase, šiuo ekonominiu sunkmečiu netikslingi. Vietoje jų kur kas ekonomiškiau leisti daugkartinio naudojimo uždavinynus.

*Antra.* Geometrijos mokymas remiasi vaizdumu. Planimetrijos pagrindinėje mokykloje mokoma(si) lygiagrečiai su stereometrija. Atsisakyta medžiagos dėstymo aksiominio principo. Įrodinėti teiginius mokoma palaipsniui. Praktiškai tik VII klasės pabaigoje įrodoma pirmoji teorema. Iki tol apsiribojama atskirais samprotavimais, remiamasi stebėjimais, braižymu ir pan.

*Trečia.* Skyrelių teorinė medžiaga siejama su atitinkama gyvenimiška situacija. Nagrinėjant naujas temas stengiamasi, kad aktyviai dalyvautų ir mokiniai. Paprastai tokie probleminiai klausimai vadovėlio kairiojoje paraštėje žymimi sutariniu ženklu „?" Sprendžiama nemažai aiškinamųjų uždavinių, pateikiama praktinio taikymo pavyzdžių.

*Ketvirta.* Užduočių sistema iš esmės skiriasi nuo ankstenių algebros ir geometrijos vadovėlių. Dabartiniai vadovėliai pagrįsti *tęstinio mokymo* ir *nuolatinio kartojimo* idėjomis. Taigi naujos medžiagos mokymas(-is) vienu skyreliu nesibaigia, o tęsiasi per kelis vis grįžtant ir kartojant. Maždaug pusė skyrelio pratimų ir uždavinių skiriama praktiniam naujų teorinių temų nagrinėjimui ir įtvirtinimui. Vadinasi, galutinai nauja teorinė medžiaga išmokstama tik po kelių skyrelių, skyriaus ar net mokslo metų pabaigoje. Mokymas(-is) vyksta ne fragmentiškai, bet jungiant panašius klausimus į visumą, leidžiant pajusti jų sąryšį. Todėl kai kurių matematikos mokytojų priekaištai, kad vadovėlyje nepakanka pratimų ir uždavinių tam tikro skyrelio temai išnagrinėti, yra nepagrįsti. Juk to paprasčiausiai vienu skyreliu dabar ir nesiekiama!

Tarp kartojimo pratimų ir uždavinių kiekviename skyrelyje yra ir ankstesniųjų klasių užduočių. Taip neleidžiama mokiniui pamiršti anksčiau nagrinėtos medžiagos, formuojamas vieningas požiūris į dalyką.

Vadovėliuose ypač daug uždavinių su daugeliu klausimų. Paprastai šie klausimai nurodo maršrutą, kuriuo reikia eiti silpnesniajam mokiniui, kad šis atsakytų į paskutinį uždavinio klausimą. Uždavinyne tokio tipo uždaviniai pateikiami tik su tuo paskutiniu klausimu, t. y. be savotiško problemos sprendimo plano. Čia skyrių pratimai ir uždaviniai susiję tik su vadovėlio atitinkamų skyrių naujomis temomis.

*Penkta.* Paprastai kiekvieno skyrelio paskutinės užduotys — probleminės. Jos dažnai net nesusijusios su jokia konkrečia teorine medžiaga, o reikalauja tik sveikos logikos, situacijos nuojautos. Tikslinga skirti jas namų darbams duodant tiek laiko, kiek bus nagrinėjamas skyrelis. Klasėje pakanka šių užduočių sprendimus aptarti. Beje, VIII klasės paskutinio skyriaus „Tyrimo uždaviniai" užduotis galima nagrinėti kartas nuo karto ištisą pusmetį.

*Šešta.* Vadovėlio kiekvienas skyrius baigiamas skyreliu „Pasitikrinkite". Jis visų pirma skirtas mokiniui ir jo tėvams. Iš analogiškų pratimų ir uždavinių gali būti sudaromi kontroliniai darbai. Kiek jų, ar sunkesnius, ar lengvesnius parinkti — priklauso nuo klasės mokinių. Tai jau mokytojo reikalas.

Kaip ir kada spręsti skyrelio „Pasitikrinkite" pratimus ir uždavinius? Tai paliekama mokinio ir mokytojo nuožiūrai.

*Septinta.* Pradedant IX klase ir atsižvelgiant į „švelnųjį" profiliavimą, vadovėlyje ir uždavinyne, be pagrindinės medžiagos, „pilkose" puslapių zonose yra papildomos teorinės medžiagos ir užduočių, skirtų realinio profilio moksleiviams.

Be jau aptartų ypatumų, naujuose vadovėliuose ir uždavinynuose yra ir tam tikrų *meto-*

*dinių naujovių*, kurias mokytojui svarbu ne tik suprasti, bet ir naudoti modernizuojant ir efektyvinant dalyko mokymą. Pradedant VII klasės vadovėlio pirmuoju skyriumi „Teigiamųjų ir neigiamųjų skaičių veiksmai“ akcentuojama, kaip reikėtų suprasti „algebrinę sumą“. Minuso ženklas prieš skaičių (reiškinį) traktuojamas ir kaip priešingumo prasmę suteikiantis simbolis. Pavyzdžiui, reiškinys „$-(a+b)$“ suprantamas kaip skaičių $a$ ir $b$ priešinga suma, o „$-(a-b)$“ — skaičių $a$ ir $b$ priešingas skirtumas.

Mokoma suprasti trupmeninį reiškinį $\frac{a}{b}/\frac{c}{d}$. Daug dėmesio, ypač sprendžiant ekonomikos elementų uždavinius, skiriama skaitinių reiškinių užrašymui. Šių reiškinių reikšmėms rasti naudojami skaičiuokliai.

Tad kokios mokomųjų priemonių rinkinio metodinės naujovės, kuriomis siekiama efektyvinti matematikos mokymą(-si)? Aptarkime kai kurias iš jų.

1. Viena iš reikšmingiausių naujovių — mokymo „per vienetą“ akcentavimas ir plėtojimas iš klasės į klasę. Pradinių klasių mokiniai „per vienetą“ sprendžia visus pirkimo (pardavimo), paprasčiausius judėjimo uždavinius, penktokai — objektų judėjimo vienas priešais kitą ir vienas paskui kitą, taip pat plaukimo upe uždavinius, šeštokai — darbo tipo uždavinius, septintokai „per vienetą“ mokomi spręsti procentų, promilių, valiutų keitimo uždavinius, aštuntokai — tiesioginio proporcingumo, devintokai — apskritimo lankų ilgių, skritulio išpjovų plotų ir centrinių kampų priklausomumo uždavinius. Galima sakyti, kad mokymas „per vienetą“ — tai mokymas žvejoti, o ne sugautą žuvį dalyti. Ypač tai palengvina spręsti procentų uždavinius. Pastarieji dėl nevykusios metodikos, skirsčiusios juos į tipus, daugeliui moksleivių buvo pavirtę kone neįveikiama uola. Pagal tą pačią mokymo „per vienetą“ metodiką sprendžiami ir tirpalų bei lydinių uždaviniai, kuriuose skaičiuojamos promilės.

Pavyzdžiui, pagal šią metodiką labai paprasta išspręsti šį uždavinį:

*Kiek Kanados dolerių atitinka* 450 *litų, jeigu Kanados dolerio ir lito santykis yra* 2,9363*?*

Galima naudotis tokia schema:

1 Kanados doleris — 2,9363 Lt;

$x$ Kanados dolerių — 450 Lt.

Taigi 1 Lt atitinka $\frac{1}{2{,}9363}$ arba $\frac{x}{450}$ Kanados dolerio, todėl $\frac{1}{2{,}9363} = \frac{x}{450}$. Vadinasi, $x = \frac{450\cdot 1}{2{,}9363} \approx 153{,}25$.

Štai kitas panašiai sprendžiamas uždavinys:

*Apskritimo spindulys yra R. Skritulio, apriboto šiuo apskritimu, išpjovos centrinis kampas lygus $\alpha$. Koks išpjovos plotas ir lanko ilgis?*

Nereikia žinoti jokių specialių formulių, o pakanka gebėti sukonstruoti atitinkamas schemas. Išpjovos plotą pažymėkime $x$, o lanko ilgį $y$. Tada galėsime sudaryti tokias schemas:

$$\begin{matrix} \pi R^2 & — & 360^\circ \\ x & — & \alpha \end{matrix} \to \begin{matrix} 1^\circ & \text{atitinka} & \frac{\pi R^2}{360} \\ 1^\circ & \text{atitinka} & \frac{x}{\alpha} \end{matrix} \to \frac{\pi R^2}{360} = \frac{x}{\alpha} \to x = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360},$$

$$\begin{matrix} 2\pi R & — & 360^\circ \\ y & — & \alpha \end{matrix} \to \begin{matrix} 1^\circ & \text{atitinka} & \frac{\pi R}{180} \\ 1^\circ & \text{atitinka} & \frac{y}{\alpha} \end{matrix} \to \frac{\pi R}{180} = \frac{y}{\alpha} \to y = \frac{\pi R \cdot \alpha}{180}.$$

2. Svarbi metodinė naujovė — kaip pateikti šaknies sąvoką. Kartu su kėlimu laipsniu natūraliuoju rodikliu nagrinėjamas ir atvirkštinis veiksmas — šaknies traukimas. Gyvenimiškais pavyzdžiais parodoma, kad kvadratinę šaknį tenka rasti, kai žinodami kvadrato plotą ieškome kraštinės, o kubinę, kai žinodami tūrį ieškome kubo briaunos ilgio. Kadangi kvadratinės šaknies, pavyzdžiui, $\sqrt{9}$, skaičiavimas negretinamas su paprasčiausios kvadratinės lygties, pavyzdžiui, $x^2 = 9$, sprendimu, mokiniai neklysta rašydami $\sqrt{9} = \pm 3$. Kartu — nepainiojamos šaknies ir aritmetinės šaknies sąvokos.

3. Susitarta vadovėliuose ir uždavinynuose lygčių ir nelygybių ieškomus dydžius vadinti *nežinomaisiais*, o rastas jų reikšmes — *sprendiniais*. Algebrinio reiškinio raidės vadinamos — *kintamaisiais*, o jų reikšmės, su kuriomis reiškinys lygus nuliui, — *šaknimis*.

4. Kadangi laipsnis su sveikuoju neigiamu rodikliu pradedamas nagrinėti jau VIII klasėje, tai atsiranda galimybė operuoti ne tik astronominių, bet ir mikroskopinių objektų dydžių skaičiais, standartine jų išraiška, skaičiaus eile ir remiantis pastarąja — įvertinti veiksmų su skaičiais daugybos (dalybos) rezultatą.

Laipsnių daugybos ir dalybos, sandaugos ir trupmenos laipsnių pertvarkymų mokoma tiek su natūraliaisiais, tiek ir su sveikaisiais neigiamais rodikliais.

5. Nagrinėjant įvairius gyvenimiškus geometrinių figūrų, judėjimo, temperatūros ir kt. pavyzdžius VIII klasėje susipažįstama su funkcijos sąvoka. Sisteminamos funkcijos savybių nusakymo pagal grafiką žinios. Mokomasi funkciją išreikšti formule. Aptariamas funkcijos reiškimo lentele būdas. Tik po to, jau IX klasėje, tolydžio nagrinėjamos tiesinė ir kvadratinė funkcijos, braižomi jų grafikai.

6. Gvildenant kai kuriuos ekonomikos klausimus, t. y. pastoviųjų palūkanų paskolas, vertybinius popierius, pirkimą išsimokėtinai, IX klasėje nagrinėjami *paprastieji procentai*; X klasėje aptariant mažėjančių palūkanų paskolas, kai kurias bankų operacijas — *sudėtiniai procentai*. Paprastųjų procentų paskolų palūkanos ir grąžintinos sumos siejamos su tiesioginio proporcingumo ir tiesinėmis funkcijomis, taip pat su aritmetine progresija. Sudėtinių procentų paskolų palūkanos priklausomai nuo laiko siejamos su geometrine progresija.

7. Iki šiol mokant braižyti bendrojo pavidalo kvadratinės funkcijos grafiką buvo išskiriami etapai: $y = ax^2$, $y = ax^2 \pm c$, $y = a(x \pm m)^2$ ir pagaliau $y = ax^2 + bx + c$. Tačiau paskutiniame etape buvo būtina mokėti išskirti dvinario kvadratą. Kai kuriems mokiniams tai sukeldavo nemažai sunkumų. Dabar pagal pasirinktą metodiką jų galima išvengti. Etapais braižomi šių funkcijų grafikai: $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = ax^2 \pm bx$ ir $y = ax^2 + bx + c$. Turint funkciją, išreikštą formule $y = ax^2 \pm bx$, randamos jos šaknys, nustatomos parabolės viršūnės taško koordinatės ir braižomas grafikas. Funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafikas braižomas pagal tokį pat algoritmą, tik dar kartą, priklausomai nuo $c$ reikšmės, patikslinama parabolės viršūnės taško ordinatė. Paprasta ir patogu!

8. Sprendžiant tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas, be jau visuotinai pripažintų grafinio, keitimo ir sudėties būdų, kartais labai efektyvu taikyti ir sulyginimo būdą. Pavyzdžiui, lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 2x - 5y = -6 \end{cases}$$

patogu spręsti taip:

$$\begin{cases} 2x = 2 + 3y, \\ 2x = 5y - 6; \end{cases}$$

$$5y - 6 = 2 + 3y,$$

$$y = 4.$$

Atsakymas. $(7; 4)$.

9. Specialiai neakcentuojama, kaip pašalinamas iš trupmenos vardiklio iracionalumas. Tačiau mokiniai patys turėtų įsitikinti, kad ir skaičiuokliu paprasčiau apskaičiuoti $\frac{\sqrt{2}}{2}$, o ne $\frac{1}{\sqrt{2}}$, arba $\sqrt{7} + 2$, o ne $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$. Todėl, pasinaudojus trupmenos pagrindine savybe, trupmeną verta parašyti taip, kad jos vardiklyje nebūtų šaknies.

10. Trikampio lygumo požymiai VII klasėje neįrodomi. Pakanka, kad mokiniai juos žinotų, atlikdami atitinkamą praktinį darbą išmoktų lyginti trikampius uždėdami vieną ant kito. Svarbu, jog įsitikinę, kad trikampiai lygūs, mokėtų padaryti išvadas apie atitinkamas kraštines ir atitinkamus kampus. Apskritai ypač svarbu, kad mokiniai suvoktų, kas yra požymis. Ne tik trikampių lygumo, bet ir tiesių lygiagretumo, lygiagretainio, trikampių panašumo, proporcijos ir kt.

11. Tik VII klasėje po devintojo skyriaus „Teiginiai“, kai mokiniai išmoksta teiginyje rasti sąlygą ir išvadą, reikia reikalauti, kad visi mokėtų užrašyti tai, kas sąlygoje duota, ką reikia rasti, įrodyti, nubraižyti ir pan. Iki tol —

viskas yra tik sprendimo apipavidalinimo propedeutika, nors vadovėlyje mokiniams ir yra pateiktų tokių pavyzdžių. Iš mokinių nereikia reikalauti, kad jie rašytų sąlygą pagal schemą „duota–rasti“. Iki skyriaus „Teiginiai“ juos reikia prie to tik pamažu pratinti.

Pageidautina, kad užrašydami, kas duota, mokiniai vartotų *simbolių kalbą*. Pavyzdžiui, nerašytų „$ABCD$ — lygiagretainis“, o rašytų „$ABCD$ $(AB \parallel DC, AD \parallel BC)$“, nerašytų „$\triangle ABC$ — statusis“, o rašytų „$\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$“, nerašytų „$AD$ — kampo $BAC$ pusiaukampinė“, o rašytų „$\angle BAD = \angle CAD$“ ir pan.

Taigi naujieji mokomųjų priemonių rinkiniai pateikia daugiau galimybių tobulinti matematikos mokymą pagrindinėje mokykloje. Ar šiomis galimybėmis esame pasiruošę pasinaudoti?

INFO

Kiekvienais metais Lietuvos matematikų draugija rengia savo konferencijas. Šiais metais 41-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija vyks birželio 22–23 d. Šiaulių universitete. Plenarinius pranešimus skaitys:

A. Alekna (ŠU). *Šiaulių universiteto matematikų veikla.*

A. Laurinčikas (VU, ŠU). *Dzeta funkcijos.*

P. Grebenečenkaitė (ŠU). *Matematikos dalyko programa ir jos įgyvendinimo profiliuotoje mokykloje galimybės.*

Kiti pranešimai bus skaitomi trylikoje sekcijų.

$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 1, 56–60

# *Uždaviniai apie lydinius, mišinius bei tirpalus*

Juozas Šinkūnas
sinkunas@vpu.lt

*Uždavinių apie medžiagų lydinius, mišinius ar tirpalus dažnai būdavo per stojamuosius egzaminus į aukštąsias mokyklas. Nedaugelis moksleivių juos teisingai spręsdavo. Nelengva suvokti kartais ilgokas šių uždavinių sąlygas, tad ir dabar jie yra nelabai mėgstami.*

*Čia siūloma paprasta tokių uždavinių sprendimo schema. Ja pasinaudojus, net ir painų uždavinį apie lydinius nesunku analizuoti bei spręsti.*

*Šio straipsnio autorius VPU Matematikos fakulteto docentas. Mokslinių tyrimų kryptis — geometrija. Doc. J. Šinkūnas — vienas iš Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos organizatorių, dalyvauja rengiant naujuosius matematikos vadovėlius mokykloms.*

**Sprendimo schema**

Sakykime, kad lydinys (mišinys arba tirpalas) yra iš dviejų medžiagų, jas žymėsime $A$ ir $B$. Tegul $A$ medžiagos masė lygi $m_A$, o $B$ medžiagos — $m_B$. Tada skaičius

$$k_A = \frac{m_A}{m_A+m_B}, \qquad k_B = \frac{m_B}{m_A+m_B}$$

vadinsime lydinio medžiagų koncentracijomis. Padauginę juos iš 100%, gauname procentinius medžiagų lydinyje kiekius (procentinę koncentraciją):

$$p_A = 100k_A, \qquad p_B = 100k_B.$$

Akivaizdu, kad $k_A + k_B = 1$, $p_A + p_B = 100$. Kartais uždaviniuose kalbama ne apie mases, bet apie tūrius. Tada apibrėždami medžiagos koncentracijas vietoje medžiagų masių naudosime jų užimamus tūrius.

Jei lydinys (mišinys ar tirpalas) sudarytas ne iš dviejų, bet daugiau medžiagų, tai kiekvienai iš jų taip pat galime apibrėžti koncentraciją.

Tegu lydinio masė lygi $m$. Jį sudaro dvi medžiagos $A$ ir $B$, kurių koncentracijos yra $k_A$, $k_B$. Tokį lydinį žymėsime $L(k_A, k_B|m)$ (jeigu žinomos procentinės koncentracijos, tai $L(p_A, p_B|m)$). Medžiagų masės randamos naudojantis formulėmis:

$$m_A = k_A m, \quad m_B = k_B m, \quad m_A = \frac{p_A}{100}m, \quad m_B = \frac{p_B}{100}m.$$

Nagrinėjant ne mases, bet tūrius, šiose formulėse vietoje $m$ imamas tūris $V$. Tirpalai žymimi raide $T$, mišiniai — $M$.

Kai du lydiniai yra suliejami į vieną, naujojo lydinio masę laikysime lygia pradinių lydinių masių sumai. Tą pačią taisyklę taikysime ir nagrinėdami tirpalus bei mišinius.

$$\boxed{\begin{array}{c} L(k_{1A}, k_{1B}|m_1) \\ L(k_{2A}, k_{2B}|m_2) \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\begin{array}{c} L(k_A, k_B|m) \\ m = m_1 + m_2 \end{array}}$$

**1 pav.**

Tarkime, lydiniai $L(k_{1A}, k_{1B}|m_1)$, $L(k_{2A}, k_{2B}|m_2)$ suliejami į vieną ir gaunamas naujas lydinys $L(k_A, k_B|m)$, čia $m = m_1 + m_2$ (1 pav.).

Sulyginę medžiagų mases, gauname:

$$\begin{aligned} k_{1A}m_1 + k_{2A}m_2 &= k_A m, \\ k_{1B}m_1 + k_{2B}m_2 &= k_B m. \end{aligned} \tag{1}$$

Šias lygybes galime naudoti uždavinyje reikalaujamiems dydžiams rasti. Jei lydiniams nurodytos procentinės koncentracijos, tai (1) lygybės lieka teisingos $k_A$, $k_B$ pakeitus $p_A$, $p_B$ ir atitinkamai $k_{1A}$, $k_{1B}$, $k_{2A}$, $k_{2B}$ pakeitus $p_{1A}$, $p_{1B}$, $p_{2A}$, $p_{2B}$.

Jei lydiniai sudaryti ne iš dviejų, bet iš daugiau medžiagų, tai kiekvienai medžiagai galima parašyti po analogišką lygybę.

**Pavyzdžiai**

Panagrinėsime, kaip naudojantis aprašyta schema galima spręsti uždavinius.

$$\boxed{\begin{array}{c} L(20, 80|x) \\ L(30, 70|10-x) \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{L(27, 73|10)}$$

**2 pav.**

1. *Viename lydinyje yra 20% vario, o kitame — 30% vario. Juos sulydžius gaunamas 10 kg lydinys, kuriame yra 27% vario. Raskime abiejų lydinių mases.*

Jeigu vieno lydinio masė $x$, tai kito — $10 - x$. Tada uždavinio schema yra tokia, kaip parodyta 2 pav.

Uždaviniui išspręsti pakanka vienos lygties:

$$20 \cdot x + 30 \cdot (10 - x) = 27 \cdot 10.$$

Iš čia $x = 3$.

$$\boxed{\begin{array}{c} T(85, 15|500) \\ T(100, 0|-x) \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{T(75, 25|500-x)}$$

**3 pav.**

2. *500 kg celiuliozės masėje yra 85% vandens. Kiek kilogramų vandens reikia išgarinti, kad liktų 75% vandens turinti celiuliozės masė?*

Pradinį tirpalą pažymėsime $T(85, 15|500)$. Šįkart naujasis tirpalas gaunamas ne maišant du tirpalus, bet iš pradinio tirpalo išgarinant $x$ kg vandens. Galime pasinaudoti pateikta schema. Tarkime, kad naujasis tirpalas gaunamas sumaišius $T(85, 15|500)$ su vandeniu $T(100, 0| - x)$; čia minusas prieš $x$ reiškia, kad masė yra pašalinama. Gauta uždavinio schema parodyta 3 pav. Užrašę lygtį

$$85 \cdot 500 + 100 \cdot (-x) = 75 \cdot (500 - x)$$

ir ją išsprendę, gauname $x = 200$.

$$\boxed{\begin{array}{c} L(x, 100-x|y) \\ L(100, 0|3) \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{L(90, 10|y+3)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} L(x, 100-x|y) \\ L(90, 10|2) \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{L(84, 16|y+2)}$$

**4 pav.**

3. *Sidabro ir vario lydinį sulydžius su 3 kg gryno sidabro, gaunamas lydinys, kuriame yra 90% sidabro, o sulydžius pradinį lydinį su 2 kg lydinio, kuriame yra 90% sidabro, gaunamas 84% sidabro turintis lydinys. Kokia pradinio lydinio masė ir kiek procentų jame yra sidabro?*

Tegul pradinis lydinys turi $x$% sidabro, o jo masė — $y$ kg. Tada pagal uždavinio sąlygą galime sudaryti dvi schemas (4 pav.).

Kiekvienai schemai parašę po lygtį, gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} xy + 300 = 90(y+3), \\ xy + 180 = 84(y+2). \end{cases}$$

Ją išsprendę, randame $x = 80$, $y = 3$.

$$\boxed{\begin{array}{l} L(x_1, 1-x_1|a-y) \\ L(x_2, 1-x_2|y) \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{L(x, 1-x|a)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} L(x_1, 1-x_1|y) \\ L(x_2, 1-x_2|b-y) \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{L(x, 1-x|b)}$$

5 pav.

4. *Du lydiniai, turintys skirtingas nikelio koncentracijas, sveria atitinkamai a ir b kilogramų. Nuo kiekvieno iš jų nupjautas vienodos masės gabalas ir sulydytas su kito gabalo likučiu. Gauti du lydiniai, kuriuose nikelio koncentracija vienoda. Kokios masės gabalai buvo nupjauti nuo abiejų lydinių?*

Tarkime, pirmojo lydinio nikelio koncentracija lygi $x_1$, antrojo — $x_2$, o nupjauta po $y$ kilogramų. Nupjovus iš pirmojo lydinio $L(x_1, 1-x_1|a)$ gauti du gabalai $L(x_1, 1-x_1|a-y)$, $L(x_1, 1-x_1|y)$; iš antrojo taip pat du: $L(x_2, 1-x_2|b-y)$, $L(x_2, 1-x_2|y)$. Nikelio koncentraciją lydiniuose, gautuose iš sąlygoje nurodytų gabalų porų, pažymėję $x$, sudarome schemas, kaip parodyta 5 pav. Pagal kiekvieną schemą parašę po lygtį, gauname sistemą

$$\begin{cases} x_1(a-y) + x_2y = ax, \\ x_1y + x_2(b-y) = bx. \end{cases}$$

Padauginame pirmąją lygtį iš $b$, antrąją iš $-a$ ir abi lygtis sudedame:

$$bx_1(a-y) + bx_2y - ax_1y - ax_2(b-y) = 0.$$

Pertvarkę gauname

$$(x_2 - x_1)(ay + by - ab) = 0.$$

Uždavinio sąlygoje pasakyta, kad koncentracijos yra skirtingos, todėl $x_2 - x_1 \neq 0$. Taigi suprastinę gauname $y = \frac{ab}{a+b}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} M(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, 0|m_1) \\ M(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}|m_2) \\ M(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}|m_3) \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\begin{array}{l} M(\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{2}{10}|m) \\ m = m_1 + m_2 + m_3 \end{array}}$$

6 pav.

5. *Vienas mišinys sudarytas iš medžiagų A ir B, kurių masių santykis $m_A : m_B = 3 : 5$; antrasis — iš medžiagų B, C, masių santykis $m_B : m_C = 1 : 2$; trečiasis — iš A, C, masių santykis $m_A : m_C = 2 : 3$. Sumaišius $m_1$, $m_2$ ir $m_3$ kilogramų atitinkamai pirmojo antrojo ir trečiojo mišinio, gautas mišinys, kuriame medžiagų santykis $m_A : m_B : m_C = 3 : 5 : 2$. Raskite $m_1 : m_2 : m_3$.*

Uždavinio sąlygos duomenis galime pavaizduoti schema, kaip parodyta 6 pav. Remdamiesi šia schema užrašysime dvi lygtis:

$$\begin{cases} \frac{3}{8} \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 + \frac{2}{5} \cdot m_3 = \frac{3}{10} \cdot m, \\ \frac{5}{8} \cdot m_1 + \frac{1}{3} \cdot m_2 + 0 \cdot m_3 = \frac{5}{10} \cdot m, \end{cases}$$

čia $m = m_1 + m_2 + m_3$.

Padaliję abi lygtis iš $m_3$, gauname tokią sistemą:

$$\begin{cases} \frac{3}{8} \cdot \frac{m_1}{m_3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{m_1}{m_3} + \frac{m_2}{m_3} + 1\right), \\ \frac{5}{8} \cdot \frac{m_1}{m_3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{m_2}{m_3} = \frac{5}{10} \cdot \left(\frac{m_1}{m_3} + \frac{m_2}{m_3} + 1\right). \end{cases}$$

Ją išsprendę gauname $\frac{m_1}{m_3} = \frac{20}{3}$, $\frac{m_2}{m_3} = 2$. Taigi

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{20}{3} : 2 : 1 = 20 : 6 : 3.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} T(a,\,100-a|V) \\ T(a,\,100-a|-b) \\ T(0,\,100|b) \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{T(a_1,\,100-a_1|V)}$$

7 pav.

6. *$V$ litrų talpos indas pripiltas $a\%$ druskos rūgšties tirpalo. Iš indo nupylus $b$ litrų tirpalo, į jį pripilama tiek pat vandens. Kokia bus tirpalo koncentracija, šią procedūrą atlikus $n$ kartų? Kelis kartus nupylus, inde druskos rūgšties bus mažiau negu vandens, jei $V = 100\,\ell$, $b = 10\,\ell$, $a = 80\%$?*

Druskos rūgšties koncentraciją tirpale po pirmo nupylimo pažymėję $a_1$, galėsime sudaryti schemą, kaip parodyta 7 pav. Sudarome lygtį

$$aV - ab + 0 \cdot b = a_1 V, \quad \text{arba} \quad a_1 = a \cdot \tfrac{V-b}{V}.$$

Po $n$-ojo nupylimo koncentraciją pažymėkime $a_n$. $n$-ajam nupylimui galime taikyti tą pačią schemą, tik reikia $a$ pakeisti $a_{n-1}$ ir $a_1$ pakeisti $a_n$. Taigi

$$a_n = a_{n-1} \cdot \tfrac{V-b}{V}, \quad \text{arba} \quad a_n = a \cdot \left(\tfrac{V-b}{V}\right)^n.$$

Kai $V = 100, a = 80, b = 10$, gauname $a_n = 80 \cdot (0,9)^n$. Nesunku rasti nelygybės $80 \cdot (0,9)^n < 50$ natūraliuosius sprendinius. Mažiausias sprendinys $n = 5$. Taigi po penktojo nupylimo druskos rūgšties tirpale bus mažiau negu vandens.

**Uždaviniai**

Taikydami tą pačią sprendimo schemą, pabandykite išspręsti šiuos uždavinius.

1. Iš 500 kg geležies rūdos pašalinus 200 kg priemaišų, kuriose yra 12,5% geležies, jos koncentracija rūdoje padidėjo 20%. Kiek kilogramų geležies dar liko rūdoje?
2. Pirmojo lydinio vario ir alavo masių santykis yra 3 : 4, o antrojo — 1 : 3. Sulydžius juos abu, gautas lydinys, kurio vario ir alavo masių santykis 1 : 2. Koks sulydytų lydinių masių santykis?
3. Sumaišius 40% druskos rūgšties tirpalą su 60% druskos rūgšties tirpalu ir įpylus 5 kg vandens, gautas 20% druskos rūgšties tirpalas. Vietoje vandens įpylus 5 kg 80% druskos rūgšties tirpalo, būtų gautas 70% druskos rūgšties tirpalas. Kiek kilogramų 40% ir 60% druskos rūgšties tirpalų buvo sumaišyta?
4. Dviejuose vario ir alavo lydiniuose yra skirtingas procentinis vario kiekis. Pirmasis lydinys sveria 6 kg, o antrasis 8 kg. Nuo pirmojo lydinio atkirstas gabalas, o nuo antrojo — dvigubai sunkesnis gabalas. Kiekvienas iš atkirstų gabalų sulydytas su kito lydinio likučiu. Šitaip gauti du lydiniai, turintys vienodą vario koncentraciją. Kokios masės gabalai atkirsti nuo abiejų lydinių?
5. Dviejuose lydiniuose yra po 30% vario. Jeigu 5 kg pirmojo lydinio sulydytume su trečiuoju lydiniu, gautume lydinį, turintį 56% vario, o jeigu 3 kg antrojo lydinio sulydytume su trečiuoju lydiniu, gautume lydinį, turintį 60% vario. Kokia trečiojo lydinio masė ir koks jame procentinis vario kiekis?
6. Viename inde yra $a$ litrų $p\%$ sieros rūgšties tirpalo, o kitame — $b$ litrų $q\%$ sieros rūgšties tirpalo. Iš abiejų indų nupilama po vienodą kiekį tirpalo. Tirpalas, nupiltas iš pirmojo indo, perpilamas į antrąjį, o iš antrojo — į pirmąjį. Po kiek litrų buvo nupilta iš abiejų indų, jei abiejuose gauti vienodos koncentracijos sieros rūgšties tirpalai?
7. Iš indo, pripildyto 96% druskos rūgšties tirpalo, nupilta 2,5 litrų ir įpilta 2,5 litrų 80% druskos rūgšties tirpalo. Gerai sumaišius, ta pati procedūra pakartota dar kartą. Inde gautas 89% druskos rūgšties tirpalas. Kokia indo talpa?
8. Viename cinko, vario ir alavo lydinyje yra 25% cinko, kitame cinko, vario ir alavo lydinyje yra 50% vario. Pirmojo lydinio procentinis alavo kiekis 2 kartus didesnis už antrojo lydinio procentinį alavo kiekį. Sulydžius 200 kg pirmojo lydinio ir 300 kg antrojo lydinio, gautas lydinys, kuriame yra 28% alavo. Kiek kilogramų vario yra šiame lydinyje?
9. Pirmajame lydinyje yra 55% chromo ir 45% nikelio, antrajame — 60% nikelio, 35% chromo ir 15% kobalto, o trečiajame — 70% chromo ir 30% kobalto. Reikia pagaminti lydinį, kuriame būtų 20% kobalto. Kiek mažiausiai ir kiek daugiausiai procentų nikelio gali būti šiame lydinyje?

10. Chemijoje plačiai taikomos „nitrinimo medžiagos“ — sieros rūgšties, azoto rūgšties ir vandens tirpalai. Jeigu 20 kg pirmo tirpalo, kuriame yra 30% $H_2SO_4$, 20% HNO ir 50% $H_2O$, 10 kg antro tirpalo, kuriame yra 74% $H_2SO_4$, 26% $H_2O$, ir 8 kg trečiojo sumaišytume, tai gautume tirpalą, kuriame būtų 40% $H_2SO_4$, 20% HNO ir 40% $H_2O$. Raskite trečiojo tirpalo procentinę sudėtį.

**Atsakymai.** **1.** 187,5 kg. **2.** 7 : 8. **3.** 1 kg, 2 kg. **4.** 2,4 kg, 4, 8kg. **5.** 10 kg, 69%. **6.** $\frac{a-b}{a+b}$. **7.** 10 ℓ. **8.** 220 kg. **9.** 15%, 40%. **10.** 22,5%, 45%, 35,5%.

1. В.М. Говоров, П.Т. Дыбов и др., *Сборник конкурсных задач по математике*, Наука, Москва, 1986.
2. Е.Д. Куланин, В.П. Норин и др., 3000 *конкурсных задач по математике*, Москва, 1998.
3. М.В. Лурье, Б.И. Александров, *Задачи на составление уравнений*, Наука, Москва, 1980.
4. Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, М.К. Потапов, *Задачи вступительных экзаменов по математике*, Москва, 1983.

INFO

Europos matematikus vienija Europos matematikų draugija (EMS — European Mathematical Society), įkurta 1990 metais. Jos tikslas — matematikos tyrimų ir taikymų, visų matematikos aspektų plėtojimas Europos šalyse. Europos matematikų sąjungos nariais gali būti tiek organizacijos, tiek pavieniai asmenys. Lietuvos matematikų draugija yra EMS narė.