$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 1, 45–50

Tyrimo uždaviniai ir galingieji medžiai

Juozas Mačys
conf@ktl.mii.lt

Neretai uždavinio sąlygoje reikalaujama nustatyti, kuris iš daugelio galimų kelių veda prie tikslo arba yra geriausias. Straipsnyje nagrinėjami keli tokių uždavinių pavyzdžiai: monetų svėrimo, siekiant surasti netikrąją, skysčių pilstymo, kol gaunamas norimas kiekis... Kai variantų daug, atranką itin patogu vaizduoti medžiais.

Straipsnio autorius — matematikos daktaras, dirbantis tikimybių teorijos srityje. Lietuvos mokyklų mokytojai ir moksleiviai pažįsta J. Mačį kaip entuziastingą jaunųjų matematikų olimpiadų, matematinių varžybų ir stovyklų organizatorių, knygų ir vadovėlių autorių bei redaktorių.

Šiuolaikinės matematikos vidurinės mokyklos kurso programos daug dėmesio skiria tyrimo uždaviniams. Sunkoka būtų tiksliai apibrėžti, kas yra tyrimo uždavinys, bet jau pats terminas sako, kad jį spręsdamas mokinys turės atlikti tam tikrą matematinį tyrimą. Tiesą sakant, kiekvienas uždavinys yra tyrimo uždavinys, bet čia paprastai turimi galvoje uždaviniai, kai mokinys gali pats save pamokyti, suskaidydamas uždavinį į dalinius ir padarydamas jo sprendimą lengvesnį. Žinoma, mokinį to taip pat reikia pamokyti, bet greitai jis įgunda tai atlikti savarankiškai. Kita vertus, kai mokytojas orientuojasi į vidutinį ar silpną mokinį, jam pačiam tenka skaidyti uždavinį ir padėti mokiniui kopti sudėtingumo kopėčiomis aukštyn.

Paaiškinsime tai pavyzdžiu. Sakykime, reikia išspręsti tokį uždavinį:

Iš 100 monetų viena yra netikra ir šiek tiek lengvesnė už kitas. Kiek mažiausiai svėrimų reikia lėkštinėmis svarstyklėmis be svarsčių nustatyti netikrą monetą?

Įsivaizduokime penktokėlį, kuris pirmą kartą mato sudėtingesnį uždavinį. Jam tai visiškai nesuvokiama. O štai prakutęs mokinys pradės save mokyti. Aha, jei monetos dvi, — viskas aišku, pasvėręs aš matau, kuri lengvesnė. O jeigu trys? Aišku, kad dviejų svėrimų tikrai užteks. Pasveriu dvi. Jeigu jos sveria vienodai... stop: tada trečia — netikra. O kas, jeigu nevienodai? Tada lengvesnė netikra — ji juk vienintelė. Vadinasi, ir 3 monetoms 1 svėrimo užtenka. O jei monetos keturios? Galime sverti po dvi, ir sužinosime, kurioje poroje yra lengvesnė. Tada reiks dar vieno svėrimo. Jeigu sversime po vieną ir mums nepasiseks — svarstyklės bus pusiausviros, tai vėl turėsime dvi monetas, iš kurių viena netikra. Taigi prireiks 2 svėrimų. O jei penkios? Galime sverti po 2, ir sužinosime, kurioje poroje yra lengvesnė (o galima sverti ir po 1 — blogiausiu atveju liks 3, su kuriomis susitvarkysime vienu svėrimu).

O kai monetos 6? Galima sverti po 3. Bet galima ir po 2 — nustatysime grupę iš 2, kurioje yra lengvesnė, ir antro svėrimo tikrai užteks. O kai monetos 7? Po 1 sverti neapsimoka — gali likti net 5. Gimsta svarbi mintis — monetas verta dalyti į 3 apylyges grupes. Taigi jei sveriame po 2 — lieka daugiausia 3 (bet galima sverti ir po 3 — antru svėrimu nustatysime lengvesnę). O kai monetos 8? Jau aišku, kad verta imti po 3, ir antru svėrimu nustatysime lengvesnę. Lygiai tas pat su 9 monetomis — užtenka dviejų svėrimų. Jau darosi aišku, kad 27 monetų atveju užteks 3 svėrimų, 81 monetos atveju — 4 svėrimų, 243 monetų atveju — 5 svėrimų. 100 monetų atveju 5 svėrimų taip pat užteks. Pavyzdžiui, imame grupes 33, 33, 34 ir pirmu svėrimu nustatome grupę iš 33 arba iš 34 monetų, kurioje yra lengvesnė moneta; jeigu tai grupė iš 33 monetų, tai pridėjus 1 monetą iš kitos grupės vis tiek turėsime grupę iš 34 monetų. Antru svėrimu monetas galime dalyti į grupes 11, 11, 12 ir nustatyti 12-tuką; trečiu svėrimu nustatysime 4-tuką; ketvirtu svėrimu nustatysime dvejetuką; taigi penktu svėrimu nustatysime netikrąją monetą. (Žinoma, galima sverti ir po 27 monetas; jei svarstyklės bus pusiausviros, prie likusių 46 monetų galima pridėti dar 8 ir vėl sverti po 27.)

O štai jeigu mokiniams nesiseka (ar, sakysime, trūksta laiko) uždavinį galima suskaidyti iš karto:

a) *Kiek reikia svėrimų* 3 *monetų atveju?* 4 *monetų atveju?* 5 (6, 7, 8) *monetų atveju?*

b) *Kaip* 2 *svėrimais išskirti lengvesnę monetą iš* 9*?*

c) *Kaip* 3 *svėrimais išskirti lengvesnę monetą iš* 27*?*

d) *Kaip* 4 *svėrimais išskirti lengvesnę monetą iš* 81*?*

e) *Kaip* 5 *svėrimais išskirti lengvesnę monetą iš* 100*?*

Grupė tokių uždavinių (o ne atskiras uždavinukas) ir yra matematinis tyrimas.

Beje, kol kas specialiai neužsiminėme, ar 100 monetų atveju 5 svėrimai yra mažiausias galimas skaičius. Nagrinėjant bet kurį algoritmą, tai pats sunkiausias klausimas: dažnai remiantis sveika nuovoka nesunku sugalvoti gerą (ar geriausią) veikimo būdą, o štai įrodyti, kad geresnio būdo nėra, — labai sunku.

Vis dėlto šitame uždavinyje įrodyti, kad geresnio algoritmo nėra (neužteks 4 svėrimų), gana paprasta. Iš tikrųjų, ką gi darome, kai sveriame? Mes suskirstome monetas į tris grupes (vienoje iš jų monetų iš viso gali nebūti) ir dvi iš jų lyginame. Kad ir kaip 100 monetų suskirstysime į tris grupes, vienoje iš jų bus bent 34 monetos (tai akivaizdu, bet matematikai mėgsta sakyti: remiantis Dirichlė principu), ir jeigu mums nepasiseks, būtent joje bus netikroji moneta. Taigi po pirmo svėrimo gali atsitikti, kad turėsime ne mažiau kaip 34 monetas. Skirstant šitas monetas, vienoje iš 3 grupių bus bent 12 monetų, ir jeigu mums nepasiseks, joje ir bus netikroji moneta. Lygiai taip pat trečiu svėrimu mes tegalime nustatyti 4 monetų grupę, o ketvirtuoju — 2 monetų grupę. Vadinasi, 4 svėrimų nustatyti netikrąją monetą neužtenka. Taigi nustatant, kuri iš 100 monetų yra netikra, reikia mažiausiai 5 svėrimų.

O dabar imkime kitą uždavinį (plg. 8 klasės vadovėlio „Matematika 8. II dalis", TEV, Vilnius, 1999, p. 154; beje, ten rasite ir monetų svėrimo uždavinių).

Vytas žaidimo automatų centre rado įdomų automatą, kuris, įmetus 5 *centus, padaugina automato indikatoriuje matomą skaičių iš* 3, *o įmetus* 2 *centus, prie indikatoriuje matomo skaičiaus prideda* 4. *Žaidimas pradedamas indikatoriuje esant skaičiui* 0. *Reikia gauti skaičių* 2000. *Jeigu žaidėjui pavyksta pasiekti* 2000 *mažiausiu įmanomu skaičiumi ėjimų, jis gauna puikų prizą — naujutėlaitį kompiuterį.*

Kaip turi žaisti Vytas, kad gautų prizą?

Pabandykime kol kas nekreipti dėmesio į centus ir tiesiog pagalvoti, kaip pasiekti 2000. Vadinasi, imamės spręsti paprastesnį uždavinį:

Kaip mažiausiu skaičiumi operacijų pridedant 4 *arba dauginant iš* 3 *galima iš* 0 *gauti skaičių* 2000*?*

Pirmu ėjimu neapsimoka dauginti iš 3: nulį padauginę iš 3, vėl gausime 0. Todėl trumpiausio algoritmo pirmas ėjimas turi būti +4. Vadinasi, reikia kuo greičiau nuo 4 pasiekti 2000. Kadangi visi algoritmu gaunami skaičiai dalysis iš 4, tai galima suprastinti iš 4 ir suformuluoti uždavinį taip:

Kaip mažiausiu skaičiumi operacijų pridedant 1 *arba dauginant iš* 3 *galima iš* 1 *gauti skaičių* 500*?*

Pabandykime iš 1 gauti 500. Kadangi norime kilti kuo greičiau, tai vis dauginame iš 3: $1 \to 3 \to 9 \to 27 \to 81 \to 243 \to 729$.

Taigi skaičių 500 prašokome. Pabandykime iš pradžių gauti 2: $1 \to 2 \to 6 \to 18 \to 54 \to 162 \to 486$. Dauginti iš 3 nebegalime — prašoksime. Bet šiaip jau skaičius 486 „nebetoli" nuo 500 — dar 14 sudėties operacijų, ir tikslas pasiektas. Bet gal galima dar arčiau pribėgti prie skaičiaus 500? Čia ir ateina mintis, kad geriau uždavinį „apsukti":

Kaip mažiausiu skaičiumi operacijų atimant 1 arba dalijant (kai dalijasi) iš 3 galima iš 500 gauti skaičių 1?

Pirmas ėjimas priverstinis, nes 500 nesidalija iš 3, todėl $500 \to 499$. Antras ėjimas taip pat priverstinis: $499 \to 498$. Trečiu ėjimu galima rinktis: dalyti iš 3 arba atimti 1. Vadinasi, reikia išspręsti tokį uždavinį:

Kaip mažiausiu skaičiumi operacijų atimant 1 arba dalijant iš 3 galima iš 498 gauti skaičių 1?

Gali pasirodyti, kad vargu ar buvo verta dėl dviejų ėjimų uždavinį performuluoti. Atsakymas čia paprastas: ruošiamės perrinkinėti visus galimus variantus braižydami galimybių medžius, o tada suprantamas noras, kad medžiai būtų kuo mažesni.

Kadangi norime kuo greičiau pasiekti 1, tai spėjame, kad reikia dalyti, kai tik galima:

$$498 \xrightarrow{:3} 166$$
$$166 \xrightarrow{-1} 165$$
$$165 \xrightarrow{:3} 55$$
$$55 \xrightarrow{-1} 54$$
$$54 \xrightarrow{:3} 18$$
$$18 \xrightarrow{:3} 6$$
$$6 \xrightarrow{:3} 2$$
$$2 \xrightarrow{-1} 1$$

Taigi iš 498 gauti 1 užtenka 8 operacijų.

Dabar reikia įrodyti, kad greičiau to atlikti neįmanoma. Galima tiesiog išrašyti visus kelius, kaip pasiekti 1, ir išsirinkti trumpiausią. (Kompiuteriu mokiniams tai padaryti vienas juokas — pasiūlykite.) Bet galima žymiai sumažinti perranką: juk 8 ėjimų kelią jau turime, tad iš karto galime atmesti ilgesnius.

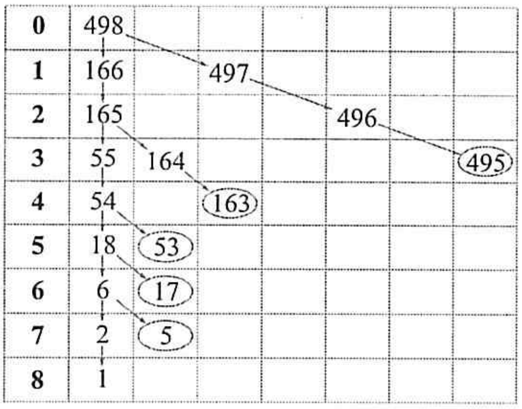
Štai čia ir praverčia galimybių medis: pasirodo, tų galimybių ne tiek jau daug ir jas galima glaustai, tam tikra aiškia tvarka surašyti.

Žingsnis																		
0	498																	
1	166				497													
2	165						496											
3	55			164						495								
4	54				163					165			494					
5	18			53		162				55		164			493			
6	6		17	52		54	161			54			163				492	
7	2	5	16	51		18	53		160	18		53		162			164	491
8	1	4	15	17	50	6	17	52	159	6	17	52		54	161		163	490

1 pav.

Apskritai reikia pasakyti, kad kol galimybių skaičius nedidelis, tai išnagrinėti jas įmanoma ir be medžio. Todėl galimybių medžių pavyzdžiai iš 5–8 klasės vadovėlių vargu ar gali įtikinti, kad jie labai naudingi. O štai kai galimybių daug, medis tiesiog nepakeičiamas. Taigi braižome galimybių medį (1 pav.).

Dabar skaitytojui labai lengva patikrinti, kad čia surašytos visos galimybės. Bet pabandykime įsivaizduoti, kaip tai atrodytų aprašius viską žodžiais!

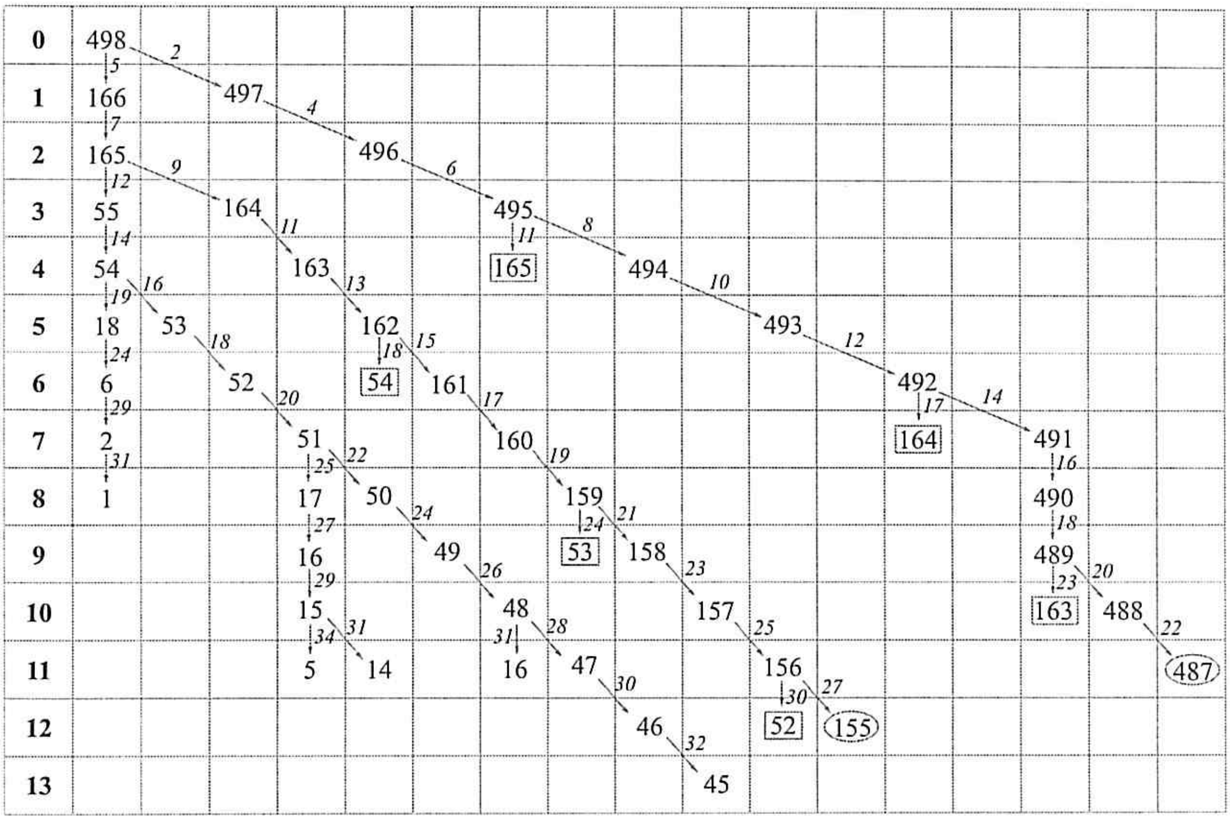


2 pav.

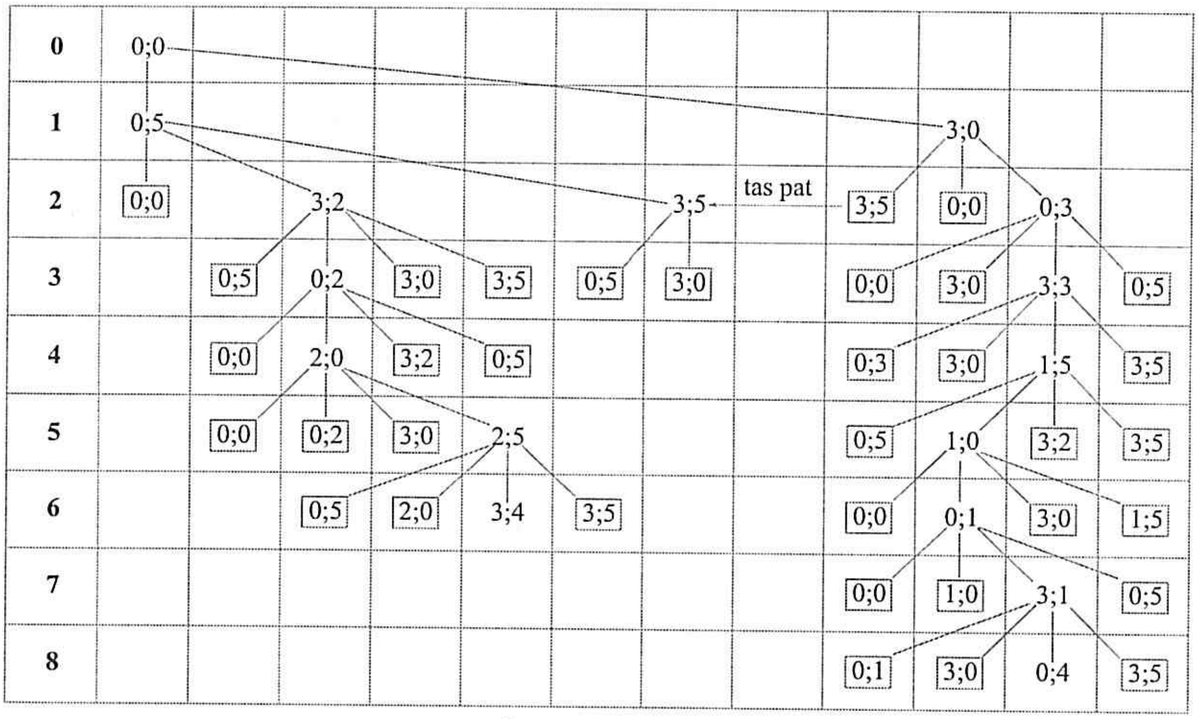
Vis dėlto svarbiausia, kad šį medį galima gerokai išgenėti. Iš tikrųjų, po kiekvienos operacijos skaičius sumažėja ne daugiau kaip 3 kartus, todėl mūsų nedomina šakos, kurių skaičiai 7 eilutėje didesni už 3, 6 eilutėje — už 9, 5 eilutėje — už 27, 4 eilutėje — už 81, 3 eilutėje — už 243. Tokias šakas taip pat nukertame, o skaičių apvedame ovalu. Dabar mūsų medis pasidaro vos kelių šakelių, o iki 1 veda vos viena šaka (2 pav.).

Taigi įrodėme, kad trumpiausias kelias iš 498 į 1 yra 8 operacijos.

Dabar grįžkime prie uždavinio, kai už kiekvieną operaciją reikia mokėti. Jei už operacijas reikėtų mokėti po lygiai, tai viską lemtų ėjimų skaičius. Bet šiaip jau mažesnis ėjimų skaičius nėra pakankamas argumentas, kai operacijos kainuoja nevienodai. Pavyzdžiui, jeigu atimtis kainuotų 2 centus, o dalyba 1000 centų, tai aišku, kad pigiausia būtų „nusileisti“ nuo 498 į 1 atimties operacijomis.



3 pav.



4 pav.

Vėl braižykime medį, tik kad nebūtų daug šakų, skaičiuokime kiekvienos šakos kainą. Kadangi jau turime tarsi neblogą kelią, kuris kainuoja $5 \times 5 + 3 \times 2 = 31$ centą, tai galime nukirsti tas šakas, kai išleidus 31 centą skaičius 1 dar nepasiektas. Dar galime nukirsti tas šakas, kuriose vėl atsiranda skaičius, jau gautas pigiau (tuos skaičius apveskime stačiakampiu). Pagaliau kirskime šakas, kuriose 15 eilutėje skaičius $\geqslant 2$ (nes už 16 ėjimų reikia mokėti tikrai ne mažiau kaip $16 \times 2 = 32$ centus), 14 eilutėje $\geqslant 6$, 13 eilutėje $\geqslant 18$, 12 eilutėje $\geqslant 54$, 11 eilutėje $\geqslant 162$ (tokius skaičius apveskime ovalais, žr. 3 pav.).

Matome, kad visos šakos nutrūko, nes jos brangesnės už pirmąją. Taigi pigiausia yra pradinė šaka $498 \to 166 \to 165 \to 55 \to 54 \to 18 \to 6 \to 2 \to 1$, kuri kainuoja $5 \times 5 + 3 \times 2 = 31$ centą. Grįžę prie pradinio uždavinio, matome, kad Vytui reikia pasirinkti kelią $0 \to 4 \to 8 \to 24 \to 72 \to 216 \to 220 \to 660 \to 664 \to 1992 \to 1996 \to 2000$, o to kelio kaina yra $5 \times 5 + 6 \times 2 = 37$ centai.

Tūlas gali pasakyti: argi čia matematika? Čia greičiau kokia ekonomika ar dar kas nors. Ir jis tam tikra prasme bus teisus: čia — taikomoji matematika, kurios matematikai išmokė ekonomistus, inžinierius, vadybininkus ir be kurios šiandien neįmanomas joks darbo (visokio — darbo plačiąja prasme) organizavimas. O medžiai — jie labai vaizdūs, lengvai patikrinami, ir čia jų didelis pranašumas. Beje, tokiai ir panašiai šiuolaikinei matematikai skirta puiki P. Tannenbaumo ir R. Arnoldo knyga „Kelionės į šiuolaikinę matematiką“, TEV, Vilnius, 1995.

Išnagrinėkime dar vieną uždavinį iš minėto vadovėlio (p. 157).

Kaip mažiausiu pilstymu skaičiumi atmatuoti (sakysime, prie čiaupo ir kriauklės) 4 litrus vandens turint du indus: 3 ir 5 litrų?

Čia vėl pasinaudosime medžiais. Ir šiuo kartu jie mums ne tik padės rasti trumpiausią pilstymo būdą bet (tai jau visai netikėta) ir įrodyti, kad iš esmės teegzistuoja du pilstymo būdai.

Tai, kad $3\,\ell$ inde yra 1 litras, o $5\,\ell$ inde 2 litrai vandens, žymėsime taip: 1;2. Padėtį, kuri jau buvo aukščiau, apvesime stačiakampiu ir šaką nupjausime. Beje, nagrinėsime visus, net ir beprasmiškus pilstymus (4 pav.).

Taigi apskritai kalbant (išmetus beprasmiškus pilstymus „įpylei-išpylei“) yra tik 2 būdai gauti 4 litrus:

$$0;0 \to 0;5 \to 3;2 \to 0;2 \to 2;0 \to 2;5 \to 3;4$$

$$0;0 \to 3;0 \to 0;3 \to 3;3 \to 1;5 \to 1;0 \to$$
$$\to 0;1 \to 3;1 \to 0;4$$

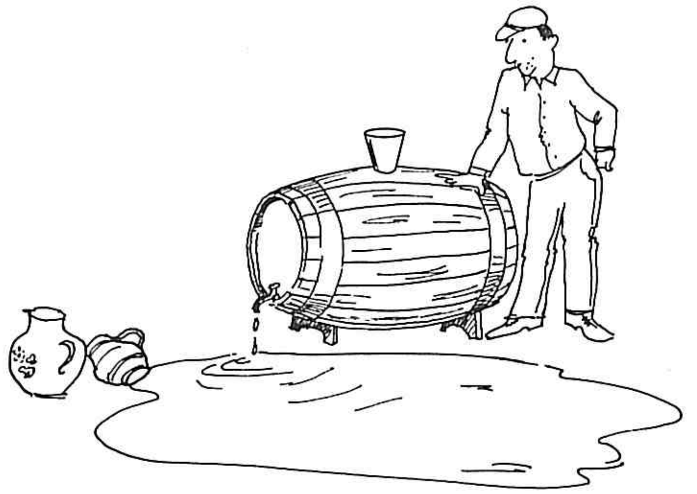
Iš jų trumpesnis yra pirmas būdas — 6 pylimai (antras būdas — 8 pylimai).

Panašiai sprendžiami ir kiti tokio tipo uždaviniai. Skaitytojui išbandyti savo jėgas pateikiame kelis iš jų (tų uždavinių variantai taip pat yra minėtame vadovėlyje).

1. Yra $10\,\ell$ talpos indas, pripiltas pieno, ir tušti $7\,\ell$ ir $3\,\ell$ talpos indai. Kaip mažiausiu skaičiumi pylimų padalyti pieną pusiau (t. y. gauti padėtį 0;5;5; indų talpos imamos didėjimo tvarka)?
2. Yra $24\,\ell$ indas, pilnas vandens, ir 3 tušti indai, kurių talpa 13, 11 ir 5 litrai. Mažiausiu skaičiumi pylimų padalykite vandenį į 3 lygias dalis (t. y. gaukite padėtį 0;8;8;8).
3. Statinėje yra $30\,\ell$ benzino. Keliais būdais galima iš jos pasemti $6\,\ell$ benzino, turint $9\,\ell$ ir $5\,\ell$ talpos kibirus?
4. Du turistai susitiko moterį su dviem pilnais $15\,\ell$ talpos bidonais pieno. Turistai turėjo $5\,\ell$ ir $4\,\ell$ talpos indus, o norėjo nusipirkti po $2\,\ell$ pieno. Kaip tai būtų galima padaryti?
5. Turime dvi tuščias 5 ir 8 kibirų talpos statines ir 12 kibirų statinę, pilną vandens. Ar įmanoma (ir jei įmanoma, tai kaip) perpilti vandenį į dvi statines po 6 kibirus?

O dabar, kad skaitytojas nepagalvotų, jog jis jau viską gali, dar vienas uždavinukas (žr. knygą Henry E. Dudeney, „The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems“, Dover, New York, 1958, p. 24; yra rusiškas vertimas: Genri E. Djudeni, „Kenterberijskije golovolomki“, Mir, Moskva, 1979, p. 26; knygoje nurodytas sprendimas, bet siūlome paplušėti patiems).

6. Štai didžiulė puikaus vokiško alaus statinė (su čiaupu ir vole) ir du ąsočiai — $3\,\ell$ ir $5\,\ell$ talpos. Ar galima į kiekvieną ąsotį įpilti lygiai po vieną litrą alaus?



Skanaus!