$\alpha + \omega$, 2000, Nr. 1, 36–44

Keturios spalvos — ir pasaulis margas

Vilius Stakėnas
vilius@ktl.mii.lt

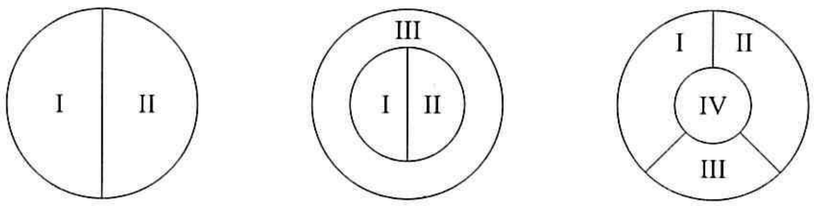
Lietuvos žemėlapio negalima taisyklingai nuspalvinti trimis spalvomis: ar vienaip, ar kitaip bandysite, atsiras du gretimi rajonai, kuriuos teks spalvinti ta pačia spalva. Jei turėsite kantrybės ir perskaitysite kelis mūsų žurnalo puslapius — sužinosite, kodėl taip yra. O keturių spalvų tikrai pakaks! Tai įrodyta. Kiek laiko tam prireikė? Daugiau kaip šimto metų!

Straipsnio autorius — VU Matematikos ir informatikos fakulteto docentas. Skaito tikimybių teorijos, kodavimo teorijos, kriptografijos paskaitas, mokslinio darbo sritis — skaičių teorija.

Bendri kaimynai ir žemėlapio spalvinimo uždavinys

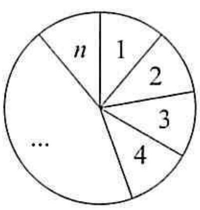
Dabar jau ir žemės lopinėlį, kurs neturėtų savininko, sunku rasti. Bet ne visada taip buvo. Įsivaizduokime, kad anais senais laikais į niekieno žemę atsikraustė keli keliautojai ir panoro joje įsikurti. Jie norėtų taip atsimatuoti žemės sklypus, kad kiekvienas būtų visų kitų kaimynas, t. y. kiekvienas sklypas turėtų po bendrą ribą su kiekvienu kitu. Kada tai įmanoma?

Jei keliautojai tik du — sunkumų nekyla. Jie gali tiesiog nubrėžti vieną liniją ir įsikurti: vienas vienoje pusėje, kitas kitoje, kaip parodyta 1 paveiksle, a). Trys naujakuriai irgi gali būti vienas kito kaimynais (1 pav., b), keturi irgi gali rasti tinkamą sprendimą (pvz., kaip parodyta 1 pav., c).



a) b) c)

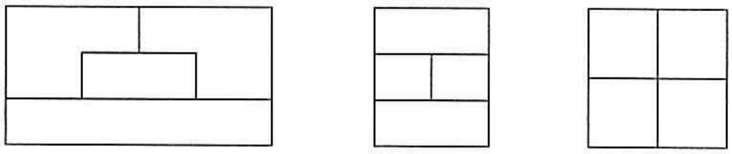
1 pav.



2 pav.

Tačiau penkiems naujakuriams šitaip draugiškai įsikurti nebepavyks. Plokštumos (arba jos dalies) negalima padalyti į penkias sritis, kad bet kurios dvi iš jų turėtų bendrą sieną. Aišku, vienas bendras taškas nelaikomas bendra siena, kitaip uždavinys turėtų trivialų sprendinį bet kokiam sričių skaičiui (2 pav.).

Taigi keturi keliautojai atvyko į niekieno žemę ir joje įsikūrė. Galbūt įsikūrė taip, kad kiekvieno sklypas ribojosi su visų kitų, kaip parodyta 3 paveiksle, a); o gal sklypus atsimatavo kitaip, pavyzdžiui, kaip 3 paveiksle, b) ir c). Jau keturių sklypų planas (žemėlapis) gali atrodyti įvairiai. Kiek spalvų reikia turėti taisyklingai jį nuspalvinti, t. y. kad gretimi sklypai (šalys) būtų skirtingų spalvų? Iš mūsų paveikslų matyti, kad gali užtekti dviejų spalvų (3 pav., c), trijų (3 pav., b), bet gali būti ir taip, kad kiekvienam sklypui reikės kitos spalvos.



3 pav. a) b) c)

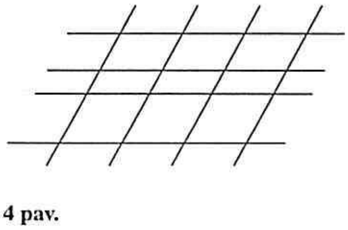
Tačiau įsivaizduokime, kad tie keturi naujakuriai yra tik gyvenvietės pradininkai, vėliau atvyko daugiau žmonių, jie taip pat atsimatavo sklypus. Žemėlapis plėtėsi, sklypų, arba šalių, skaičius didėjo. Ar keturių spalvų užteks bet kokiam žemėlapiui taisyklingai nuspalvinti?

1853 metais vienas Londono koledžo studentas Frencis Gatris (Francis Guthrie) ištyrinėjo Anglijos, padalytos į grafystes, žemėlapį ir pareiškė, kad keturių spalvų pakanka jį taisyklingai nuspalvinti. O jeigu pasidalijimas grafystėmis būtų kitoks, ar ir tada pakaktų?

Tokį klausimą Frencis svarstė su savo broliu, Kembridžo universiteto studentu. Pastarasis paklausė, ką apie šią problemą mano jo matematikos profesorius Morganas (Augustus De Morgan, 1806–1871). Jis susidomėjo uždaviniu, tačiau negalėjo įrodyti, kad keturių spalvų visada pakanka. Nesurado įrodymo ir įžymusis to meto matematikas Hamiltonas (William Rowan Hamilton, 1805–1865). Maždaug po 20 metų dėmesį į šį uždavinį atkreipė Keilis (Arthur Cayley, 1821–1895), kuris kalbėdamas Londono matematikos draugijos nariams prisipažino, kad bandė uždavinį išspręsti, tačiau jam nepavyko. Šis be jokių matematinių simbolių formuluojamas uždavinys sudomino tiek matematikos mėgėjus, tiek tyrinėtojus. Jo sprendimas atsirado tik daugiau kaip po šimto metų. Tačiau ar tai tikrai priimtinas matematikams sprendimas? Ne visi linkę su tuo sutikti.

Kai pakanka dviejų spalvų

Nubrėžkime m tarpusavyje lygiagrečių tiesių, po to dar vieną šeimą iš n tarpusavyje lygiagrečių tiesių ir — pasaulis padalytas! Pakanka būti mačius šachmatų lentą, kad suvoktum, jog tokį žemėlapį galima taisyklingai nuspalvinti dviem spalvom.



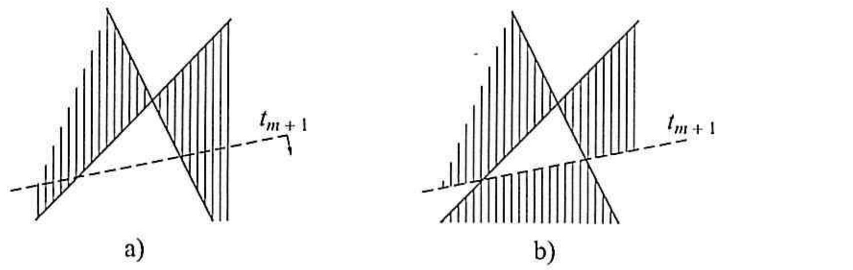
4 pav.

Įdomiausia, kad tiesių lygiagretumas čia visiškai nereikalingas. Teisingas toks teiginys:

Žemėlapį, kurį plokštumoje sudaro n tiesių, visada galima taisyklingai nuspalvinti dviem spalvom.

$\alpha + \omega$

Nesudėtinga tuo įsitikinti pasinaudojus matematine indukcija. Kai $n = 1$, viskas labai, netgi rūsčiai aišku: viena pusė balta, kita juoda. Tarkime, kad tvirtinimas teisingas, kai tiesių yra m. Įrodykime, kad žemėlapį, kurį sudaro tiesės $t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}$, irgi galima taisyklingai nuspalvinti dviem spalvomis. Iš pradžių įsivaizduokime, kad dviem spalvom taisyklingai nuspalvinome žemėlapį, kurį sudaro tiesės $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Dabar nubrėžkime tiesę t_{m+1}. Ji į dvi puses dalija plokštumą ir kai kurias pradinio žemėlapio šalis. Pasirinkime vieną iš plokštumos pusių ir perdažykime tos pusės šalis: juodas paverskime baltomis, baltas — juodomis (5 pav.). Ir baigta: tiesių $t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}$ sudarytas žemėlapis nuspalvintas taisyklingai!

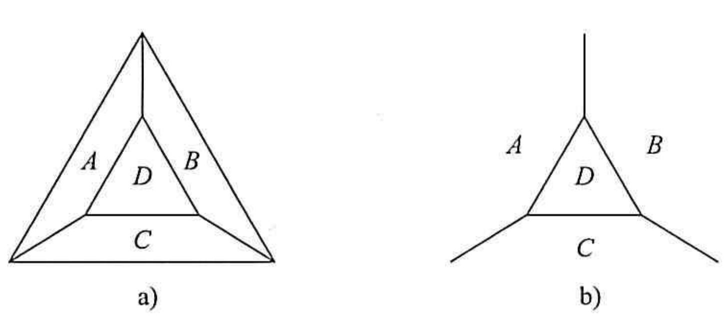


5 pav.

Šio įrodymo idėją galima išdėstyti kiek kitaip, kad ne tik įrodytume, jog žemėlapį galima taisyklingai nuspalvinti, bet nustatytume, kaip kokią šalį spalvinti. Tegu žemėlapį sudaro tiesės $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Pirmoji tiesė dalija plokštumą į dvi pusplokštumes. Visoms vienos pusplokštumės šalims priskirkime skaičių 0, kitos — 1. Antroji tiesė taip pat dalija plokštumą į dvi dalis. Pasirinkime vieną pusplokštumę ir prie jos šalims priskirtų skaičių pridėkime 0 (t. y. skaičių visai nekeiskime), o kitos pusės šalių skaičius padidinkime vienetu. Kai tą patį padarysime su visomis tiesėmis, kiekvienai šaliai bus priskirta m skaičių (nulių ar vienetų) suma. Tas šalis, kurių skaičiai lyginiai, nuspalvinkime baltai, o likusias juodai.

Žemėlapis bus taisyklingai nuspalvintas. Kodėl?

Iki šiol nagrinėjome visos plokštumos dalijimo į šalis žemėlapius. Tokiuose žemėlapiuose kai kurios šalys gali būti ir begalinės. Dažnai žemėlapis yra tik baigtinės srities padalijimo į šalis planas, kaip parodyta 6 paveiksle, a).



6 pav.

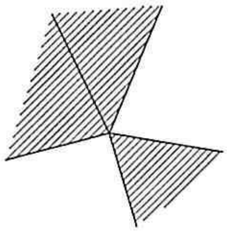
Jeigu mus domina tik spalvinimo problema, galime „išplėsti" šalis A, B ir C ir gauti visos plokštumos žemėlapį (6 pav., b), kuris spalvinimo atžvilgiu turi tas pačias savybes kaip ir baigtinės dalies žemėlapis. Aišku, kad ir į 6 paveikslą, a galime žvelgti kaip į visos plokštumos žemėlapį, tardami, kad didžiojo trikampio išorėje plyti penktoji šalis E. Taigi toliau nagrinėsime tik visą plokštumą į šalis dalijančius žemėlapius.

Taškus, kuriuose susieina kelių šalių sienos, vadinsime *viršūnėmis*, o tų sienų skaičių — *viršūnės laipsniu*. Pavyzdžiui, 6 paveiksle, a) yra šešios viršūnės ir kiekvienos viršūnės laipsnis lygus 3, o 6 paveiksle, b) — tik trys tokios viršūnės.

Kiekviena žemėlapio siena jungia dvi viršūnes, taigi kiekvienos sienos įnašas į bendrą viršūnių laipsnių sumą lygus 2 (kartais siena gali jungti viršūnę su ja pačia, tokiu atveju vis tiek sakysime, kad ši siena padidina viršūnių laipsnių sumą dvejetu). Gauname paprastą, bet naudingą teiginį:

Jei žemėlapyje yra n viršūnių, kurių laipsniai $l_1, l_2, \ldots, l_n$, ir g sienų, tai

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n = 2g. \qquad (1)$$

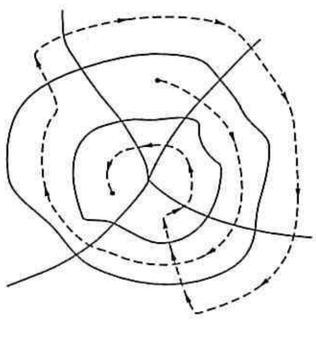


7 pav.

Prisiminkime žemėlapį, kurį sudaro tiesės, — visos jo viršūnės turi lyginius laipsnius. Iš tiesų, jei viršūnė yra kurioje nors tiesėje, tai joje susiena dvi toje tiesėje esančios žemėlapio sienos. Kita vertus, jei bent vienos žemėlapio viršūnės laipsnis yra nelyginis (pvz., kaip 7 pav.), tai dviem spalvom tokio žemėlapio taisyklingai nenuspalvinsime.

Galbūt viršūnių laipsniai ir lemia, ar galime taisyklingai nuspalvinti žemėlapį dviem spalvom, ar ne. Metas iškelti hipotezę:

Žemėlapį galima taisyklingai nuspalvinti dviem spalvom tada ir tik tada, kai visų jo viršūnių laipsniai lyginiai.



8 pav.

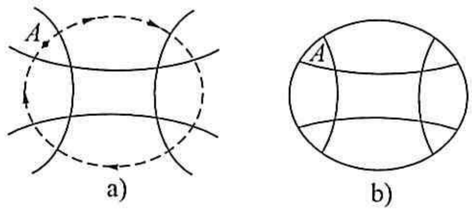
Nusibraižę kokį nors žemėlapį su lyginių laipsnių viršūnėmis, galime pabandyti spalvinti. Pradėkime nuo bet kurios šalies. Pavyzdžiui, nuspalvinę ją juodai, pereikime į kaimyninę ir nuspalvinkime ją baltai, tada vėl į kaimyninę ir taip toliau, naudodami abi spalvas pakaitomis. Gali būti, kad kartais teks sugrįžti į jau aplankytą šalį, kaip parodyta 8 pav.

Tačiau jokios šalies neteks perdažyti kita spalva! Jeigu taip ir turi būti, tai taisyklingo spalvinimo dviem spalvom algoritmas labai paprastas: keliauk, spalvok ir nieko negalvok!

Įrodysime, kad taip ir yra.

Iškeliaukime iš kurios nors žemėlapio šalies, kirsdami sienas ir šitaip pereidami iš vienos šalies į kaimyninę. Aplankytas šalis pakaitomis žymėkime $0, 1, 0, 1, \ldots$. Tęskime kelionę, kol aplankysime visas šalis. Galbūt į kai kurias šalis teks užsukti po kelis kartus, taigi tokioms šalims bus priskirta po keletą skaičių. Įsitikinsime, kad jeigu taip ir atsitinka, tai priskirtieji skaičiai yra tie patys. Pakanka įrodyti, kad jei iš kurios nors šalies išėję į ją vėl sugrįžome, tai kelionės žingsnių skaičius yra lyginis.

Tegu išėję iš šalies A į ją vėl sugrįžome po n žingsnių (žr. 9 pav., a). Pagal savo maršrutą iš didžiojo žemėlapio „išpjaukime" jo dalį, kaip parodyta 9 paveiksle, b).



9 pav.

Atlikome lygiai tiek kelionės žingsnių, kiek kartų kirtome sienas. Kiekvieną sienos kirtimą „mažajame" žemėlapyje atitinka viršūnė, kurios laipsnis lygus 3. Tokių viršūnių yra n, visos jos yra ant išorinės sienos. Jei vidinių viršūnių yra s, tai visų jų laipsniai yra lyginiai, tegu jie lygūs $2m_1, 2m_2, \ldots, 2m_s$. Iš (1) lygybės gauname:

$$3n + 2m_1 + 2m_2 + \cdots + 2m_s = 2g,$$

čia g — 9 paveikslo, b žemėlapio sienų skaičius. Taigi n turi būti lyginis skaičius. Jeigu iš šalies A į tą pačią šalį sugrįžome nebe pirmą kartą, tai

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t,$$

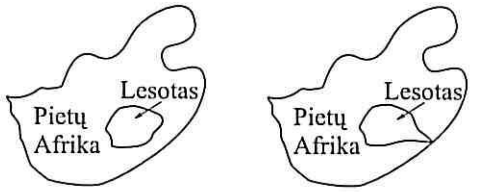
čia n_1 — pirmojo sugrįžimo į A žingsnių skaičius, n_2 — antrojo sugrįžimo žingsnių skaičius, skaičiuojant nuo pirmojo sugrįžimo ir taip toliau. Kadangi visi n_i yra lyginiai, tai ir n lyginis.

Apkeliavę visas šalis ir jas pažymėję, galime pradėti spalvinti: pažymėtas 0 (arba keliais nuliais) — juodai, vienetais — baltai.

Gretimos šalys bus visada nuspalvintos skirtingai. Jeigu atsirastų gretimos šalys, tarkime A ir B , pažymėtos vienodais skaičiais (nuspalvintos vienodai), tai galėtume rasti tokį kelią iš A į A, kad pirmu žingsniu šaliai priskyrę 0 paskutiniu būtume priversti priskirti 1 (kodėl?). Tačiau juk jau įrodėme, kad taip neatsitinka.

Trimis spalvomis Lietuvos žemėlapio nenuspalvinsite

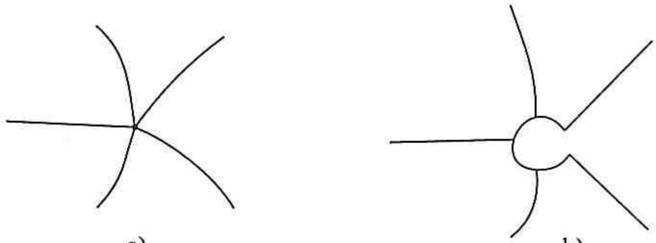
Žemėlapių būna visokių. Gali pasitaikyti, kad viena šalis bus kitos viduje (kaip Lesoto valstybėlė Pietų Afrikos Respublikoje). Taigi Pietų Afrikos Respublikos sieną sudaro du nesusisiekiantys kontūrai. Tokią padėtį galime pakeisti suteikdami Lesotui siaurą koridorių iki pat Pietų Afrikos Respublikos sienos. Žemėlapių spalvinimo požiūriu naujasis žemėlapis turės tas pačias savybes (10 pav.).



10 pav.

Taigi pakanka nagrinėti susijusius žemėlapius, t. y. tokius, kuriuose kiekvienos šalies sieną galima apeiti išėjus iš bet kurio jos taško.

Į vieną viršūnę gali sueiti daug sienų, t. y. viršūnės laipsnis gali būti didelis. Pavyzdžiui, 11 paveiksle, a) pavaizduoto žemėlapio viršūnės laipsnis lygus 5. Išplėskime šalį atimdami iš aplinkinių šalių truputį teritorijos, kaip parodyta 11 paveiksle, b).

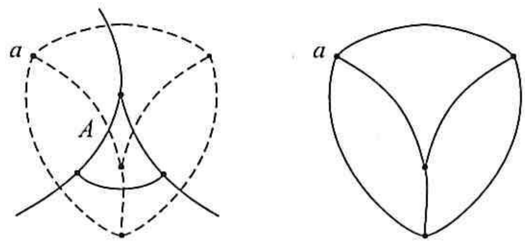


11 pav.

Tada vietoje vienos 11 paveikslo, a viršūnės atsiras trys naujos viršūnės, tačiau jų visų laipsniai bus lygūs 3. Jeigu tiesa, kad kiekvienam žemėlapiui taisyklingai nuspalvinti užtenka 4 spalvų, tai jų užteks ir 11 paveikslo, b žemėlapiui. Tada jį nuspalvinę ir „grąžinę" pasisavintas teritorijas, t. y. grįžę prie 11 paveikslo, a, būsime taisyklingai šį žemėlapį nuspalvinę keturiomis spalvomis.

Šie samprotavimai parodo susijusių žemėlapių, kurių visų viršūnių laipsniai lygūs 3, reikšmę žemėlapių spalvinimo keturiomis spalvomis problemai. Tokius žemėlapius vadinsime *normaliaisiais*. Juos toliau ir tyrinėsime. Pavyzdžiui, Lietuvos teritorijos padalijimo rajonais žemėlapis yra normalusis.[1]

Nubraižykime kokį nors normalųjį žemėlapį ir kiekvienoje šalyje pažymėkime po tašką (sostinę). Sujunkime gretimų šalių sostines keliais. Šitaip gausime kelių tinklą (grafą), kaip parodyta 12 paveiksle.



12 pav.

[1] Žr. Lietuvos žemėlapį V. Dagienės straipsnyje „Žemėlapio spalvinimo uždavinio sprendimas kompiuteriu" šiame žurnalo numeryje, p. 77–82.

Žemėlapio spalvinimo uždavinį galime pakeisti jo kelių grafo spalvinimo uždaviniu: jei šio grafo viršūnes galėtume nuspalvinti taip, kad kiekvienas kelias (grafo briauna) jungtų skirtingai nuspalvintas viršūnes (sostines), tai ir patį žemėlapį galėtume taisyklingai nuspalvinti. Išties pakaktų visą šalį nuspalvinti jos sostinės spalva.

Įsižiūrėkime į žemėlapį ir jo šalių sostines jungiančių kelių tinklą. Šis tinklas taip pat yra žemėlapis. Pastebėkime tokius paprastus dalykus: jei a yra šalies A sostinė, tai kelių grafo a viršūnės laipsnis lygus šalies A sienų skaičiui.

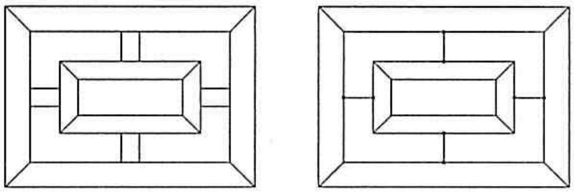
Jei žemėlapis yra normalusis, tai jo kelių žemėlapyje kiekviena šalis turi tris sienas. Taigi kelių žemėlapis sudarytas iš „trikampių"!

Pasirinkę kurią nors kelių žemėlapio šalį, galime pažymėti jos viršūnes skaitmenimis 0 (geltona), 1 (žalia), 2 (raudona). Gretimų šalių viršūnes irgi pažymėkime tais pačiais simboliais, tačiau taip, kad kiekviena briauna jungtų skirtingai pažymėtas viršūnes. Jeigu tęsiant šį procesą pavyktų visas kelių grafo viršūnes pažymėti skaitmenimis 0, 1, 2 taip, kad kiekviena briauna jungtų viršūnes, kurių skaičiai (spalvos) skirtingi, tai kelių grafą galėtume taisyklingai nuspalvinti trimis spalvomis. Tačiau tada ir pradiniam žemėlapiui taisyklingai nuspalvinti užtektų trijų spalvų!

Kada trisienių šalių žemėlapio viršūnes galime šitaip žymėti? Atsakymas, pasirodo, paprastas — kai to žemėlapio šalis galima taisyklingai nuspalvinti dviem spalvom (tarkime, juoda ir balta)! Jeigu žemėlapis nuspalvintas — galima tiesiog keliauti juodųjų šalių sienomis apeinant šalį po šalies ir žymėti viršūnes. Žinoma, tai reikėtų dar įrodyti, bet tai padaryti nėra sunku.

O dabar atėjo maloniausia kiekvienam matematikui akimirka — kai paaiškėja, kad nagrinėjamos problemos sprendimo raktas glūdi jau įrodytoje teoremoje. Juk jau žinome, kada žemėlapį galima taisyklingai nuspalvinti dviem spalvom: kai kiekvienos viršūnės laipsnis yra lyginis. Prisiminę, kad kelių grafo viršūnės laipsnis lygus atitinkamos šalies sienų skaičiui, gauname tokį elegantišką teiginį:

Normalųjį žemėlapį galima taisyklingai nuspalvinti trimis spalvomis tada ir tik tada, kai visos jo šalys turi po lyginį skaičių sienų.[1]



13 pav. Vieną iš šių žemėlapių galima taisyklingai nuspalvinti trimis spalvomis, o kito ne!

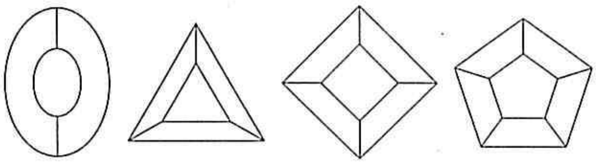
Taigi Lietuvos žemėlapio trimis vėliavos spalvomis nenuspalvinsime. Kliudo, pavyzdžiui, Kelmės arba Ukmergės rajonų padėtis — jie turi po nelyginį skaičių sienų.

[1] Jei šalis begalinė, reikia prie jos regimų sienų skaičiaus pridėti vienetą.

Jei pasitikite kompiuteriais — keturių spalvų problema išspręsta!

Teiginio, kad bet kokį žemėlapį galima taisyklingai nuspalvinti keturiomis spalvomis, neįrodė nei Gatris[2], nei Morganas, nei Hamiltonas, nei Keilis. Uždavinys pasirodė esąs sunkus. 1879 metais Londono advokatas Alfredas Brėjus Kempė (Alfred Bray Kempe) pareiškė įrodęs, kad keturių spalvų tikrai visada užtenka. Straipsnyje, kurį jis paskelbė Amerikos matematikos žurnale[3], matematikai jokių spragų neįžiūrėjo. Kempė tapo pripažintu matematiku, Karališkosios mokslo draugijos nariu, daug metų buvo šios draugijos iždininkas.

Kempė visų pirma įrodė, kad kiekviename žemėlapyje būtinai yra bent viena šalis, turinti ne daugiau kaip penkias kaimynes, t. y. būtinai turi pasitaikyti viena iš keturių konfigūracijų:



14 pav.

Jis įrodinėjo, kad jei žemėlapiui su viena iš šių konfigūracijų taisyklingai nuspalvinti būtinos penkios spalvos, tai galima sudaryti kitą žemėlapį, kuris turi mažiau šalių, tačiau jam nuspalvinti vis tiek būtinos penkios spalvos. Po baigtinio skaičiaus tokių žingsnių (redukcijų) gausime žemėlapį, kuriame šalių mažiau nei penkios, tačiau taisyklingai jį nuspalvinti vis tiek reiks penkių spalvų. Tai akivaizdi prieštara, taigi pradinė prielaida, kad egzistuoja žemėlapis, kuriam nuspalvinti reikia penkių spalvų, yra klaidinga.

Keturių spalvų problema buvo laikoma išspręsta iki 1890 metų! Tais metais Persis Džonas Hyvudas (Percy John Heawood) išspausdino straipsnį „Žemėlapio spalvinimo problema". Pagrindinis šio straipsnio rezultatas — įrodymas, kad Kempė nieko neįrodė! Kempė sutiko, kad jo samprotavimuose yra klaida ir kad jis negali tos klaidos ištaisyti. Keturių spalvų teorema akimirksniu virto keturių spalvų hipoteze. Hyvudas visą gyvenimą nagrinėjo šią problemą, įrodė daug įdomių teoremų, tačiau galutinio tikslo nepasiekė. Pavyzdžiui, jis nepriekaištingai įrodė, kad bet kokiam žemėlapiui taisyklingai nuspalvinti užtenka penkių spalvų.

Keturių spalvų problema domėjosi daugelis žmonių. Tačiau pavykdavo pasiekti nedaug.

Teoremą buvo bandoma įrodinėti apribojus žemėlapio šalių skaičių, t. y. įrodinėjama, kad keturių spalvų tikrai pakanka, jei šalių yra ne daugiau kaip n. Štai keli autoriai ir jų rezultatai: Franklinas (Franklin) 1922 m. įrodė, kad keturių spalvų pakanka, jei $n = 25$;

[2] F. Gatris vėliau dirbo advokatu, po to, gavęs matematikos profesoriaus vietą, išvyko į Pietų Afriką. Parašė kelis matematikos straipsnius, vėliau susidomėjo botanika.

[3] American Journal of Mathematics.

Reinoldas (Reynolds) 1926 m. — $n = 27$; Vinas (Winn) 1940 m. — $n = 35$; Orė ir Stemplė (Ore, Stemple) 1970 m. — $n = 39$; Mejeris (Mayer) 1976 m. — $n = 95$.

Tačiau tais pačiais 1976 metais matematikų pasaulį apskriejo sensacinga žinia: keturių spalvų teorema įrodyta! To įrodymo autoriai — Kenetas Apelis (Kenneth Appel) ir Volfgangas Heikenas (Wolfgang Haken). Jie naudojosi Kempė metodu, tačiau vietoje penkių redukcijos atvejų kaip Kempė darbe jiems prireikė įrodyti, kad redukcija yra įmanoma apie 1500 atvejų! Kiekvieną atvejį patikrinti — nors ilgas ir kruopštus, tačiau gana paprastas darbas. Jie tai atliko kompiuteriu, sugaišę apie 1200 kompiuterio darbo valandų.

Taigi keturių spalvų teoremos įrodymas — matematiniai argumentai, programos ir jų vykdymo rezultatai. Tačiau joks žmogus neįstengs patikrinti tų rezultatų popieriuje! Tad įrodymas teisingas, jeigu ... tikėsime, kad kompiuteriai neklysta.[4] Keturių spalvų teoremos įrodymas yra pirmasis atvejis, kai kompiuteris yra „lygiavertis" matematikų partneris, t. y. juo privalu besąlygiškai pasitikėti. Ar tokie įrodymai nepakeičia pačios matematinio įrodymo sampratos? Štai ką apie tai mano keturių spalvų teoremos įrodymo autoriai (žr. [1]).

> „Dauguma matematikų, subrendusių prieš atsirandant spartiems kompiuteriams, nelinksta kompiuterio laikyti kasdieniu paprastiems veiksmams atlikti įrankiu, kurį būtų galima naudoti kartu su senesniais teoriniais įrankiais. Jie intuityviai jaučia, kad įrodymai, kuriuose yra tiesiogiai nepatikrinamų dalių, neturi tvirto pagrindo. Linkstama kompiuteriais gautų rezultatų, nors ir patikrintų kitomis nepriklausomomis programomis, nelaikyti lygiai taip pat teisingais kaip teoremų įrodymų, kuriuos žmonės gali tiesiogiai patikrinti.
>
> Šis požiūris visiškai teisingas trumpų įrodymų atžvilgiu. Tačiau jei įrodymas yra ilgas ir reikalaujantis skaičiavimų, mes drįstame tvirtinti, kad net tuo atveju, kai tiesioginis patikrinimas yra iš tiesų įmanomas, žmogaus klaidos tikimybė yra didesnė negu mašinos klaidos tikimybė."

1. K. Appel, W. Haken, The Four-Color Problem, in: *Mathematics Today*, p. 153–190, Springer, New York, 1978.
2. P.J. Davis, R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, 1981.
3. I. Petersons, *The Mathematical Tourist*, W.H. Freeman & Co, New York, 1988.
4. У. Болл, Г. Коксетер, *Математические эссе и развлечения*, Мир, Москва, 1986.
5. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, *Наглядная геометрия*, Наука, Москва, 1981.
6. Е.Б. Дынкин, В.А. Успенский, *Математические беседы*, Наука, Москва, 1952.

[4] Šiuo metu yra sukurtas paprastesnis tikrinimo algoritmas, todėl abejonių dėl įrodymo teisingumo yra mažiau.