Uždaviniai

Šiame skyrelyje, Belgijos (Flandrijos) jaunųjų matematikų olimpiados rengėjams sutikus, spausdiname 1997 – 1998 metų olimpiados antrojo rato uždavinių rinkinį.[1] Jį sudaro 30 uždavinių, kuriems išspręsti skiriamos 2 valandos. Nors uždaviniai ir nesunkūs, per tokį trumpą laiką su jais gali susidoroti tik tvirtas žinias ir gerą patirtį turintys sprendėjai.

ε.53

◇ ◇ ◇

Mama sako: „Kiekvienas iš mano vaikų turi mažiausiai vieną brolį ir mažiausiai vieną seserį". Kiek mažiausiai vaikų gali turėti ši mama:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6?

ε.54

◇ ◇ ◇

Reiškinio $3 - 3|\cos x|$ sveikųjų reikšmių skaičius lygus:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 6; E) 7?

ε.55

◇ ◇ ◇

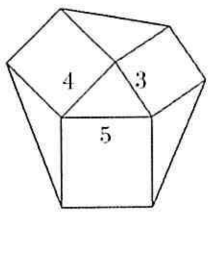
Didžiausiąjį skaičių, neviršijantį a žymėsime $[a]$. Pavyzdžiui, $[1998] = 1998$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$. Lygties $[2x] = 3$ sprendinių aibė yra:

A) $[1; 3/2)$; B) $[3/2; 2)$; C) $[2; 3)$; D) $[3; 4)$; E) $[6; 8)$?

ε.56

◇ ◇ ◇

Šešiakampis padalytas į keturis trikampius ir tris kvadratus. Vidinio trikampio kraštinės lygios 3, 4 ir 5. Kelių iš šių septynių figūrų plotas lygus 6:



A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) nė vienos?

[1] ©Vlaamse Wiskunde Olympiade.

ε.57

◇ ◇ ◇

Keliais būdais viena tiese stačiakampį galima padalyti į dvi lygiaplotes dalis?

A) 2; B) 4; C) 6; D) 8; E) daugiau nei 8?

ε.58

◇ ◇ ◇

Dvylikai teigiamų skaičių suteikti numeriai. Ketvirtasis skaičius lygus 4, dvyliktasis – 12. Trijų iš eilės einančių skaičių suma lygi 333. Septintasis skaičius lygus:

A) 4; B) 7; C) 12; D) 317; E) nustatyti negalima.

ε.59

◇ ◇ ◇

Kuris iš šių penkių skaičių yra mažiausias:

A) $\sqrt[30]{30}$; B) $\sqrt[6]{2}$; C) $\sqrt[10]{3}$; D) $\sqrt[12]{4}$; E) $\sqrt[15]{5}$?

ε.60

◇ ◇ ◇

Kuri iš penkių lentelių **negali būti** trečiojo laipsnio daugianario ženklų lentelė?

A)

x		x_1		x_2		x_3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

B)

x		x_1		x_2	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

C)

x		x_1		x_2	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

D)

x		x_1	
$f(x)$	$-$	0	$+$

E)

x		x_1	
$f(x)$	$-$	0	$-$

ε.61

◇ ◇ ◇

Teiginys apie natūraliuosius skaičius: $\forall$ *lyginiam x skaičius x^2+x yra lyginis.* Jo neiginys skamba taip:

A) $\forall$ *lyginiam x skaičius x^2+x yra nelyginis;*
B) $\forall$ *nelyginiam x skaičius x^2+x yra lyginis;*
C) $\forall$ *nelyginiam x skaičius x^2+x yra nelyginis;*
D) $\forall$ *lyginiam x skaičius x^2+x yra nelyginis;*
E) $\forall$ *nelyginiam x skaičius x^2+x yra nelyginis.*

• • • $\alpha + \omega$ • • •

ε.62

◇ ◇ ◇

Reiškinys

$$\frac{\cos^3 15° + \sin^3 15°}{\cos 15° + \sin 15°}$$

lygus:

A) 0; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{3}{4}$; E) 1.

ε.63

◇ ◇ ◇

Natūraliųjų skaičių n, kuriems teisinga nelygybė $2^n > n^3$, skaičius lygus:

A) 2; B) 4; C) 6; D) 8; E) didesnis už 8.

ε.64

◇ ◇ ◇

Dviratininkas važiuoja į kalną 16 km/h greičiu. Užvažiavęs ant kalno, jis iš karto ėmė leistis žemyn važiuodamas 48 km/h greičiu. Vidutinis dviratininko greitis visame kelyje (km/h) lygus:

A) 12; B) 24; C) 30; D) 32; E) nustatyti negalima.

ε.65

◇ ◇ ◇

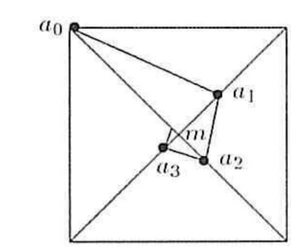
Paulius turi monetų kolekciją. Sudėjus monetas stulpeliais po 6, lieka trys monetos. Sudėjus monetas stulpeliais po 8, lieka 7, o po 5 – 4. Jeigu monetų yra mažiau nei 100, tai:

A) $n \leqslant 20$; B) $20 < n \leqslant 40$; C) $40 < n \leqslant 60$; D) $60 < n \leqslant 80$; E) $80 < n$.

ε.66

◇ ◇ ◇

Kvadrato įstrižainės ilgis lygus 2, taškas m yra šio kvadrato centras. Sukonstruosime „spiralę“ $a_0a_1\ldots$, kuri parodyta brėžinyje. Atstumas nuo a_{n+1} iki m lygus pusei atstumo nuo a_n iki m. Visos „spiralės“ ilgis lygus:



A) 2; B) $\sqrt{5}$; C) 4; D) 8; E) begalinis.

ε.67

◇ ◇ ◇

Nagrinėkime brūkšninį prekių žymėjimo kodą: po juodais vertikaliais brūkšniais surašyti skaičiai. Kairysis skaičius, kurį žymėsime c, yra kontrolinis, randamas atėmus iš dešimties paskutinį skaičiaus

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_{11}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{12})$$

skaitmenį; čia $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ – po kontrolinio einantys kodo skaičiai. Suraskite nusitrynusį kontrolinį skaičių, jei kiti kodo skaitmenys yra:

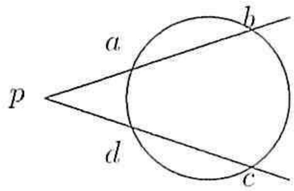
$$?\,4\,1\,0\,0\,5\,6\,0\,1\,1\,5\,7\,5.$$

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

$\varepsilon.68$

◇ ◇ ◇

Apskritimas padalytas į keturis lankus. Kiekvieno iš gretimų lankų ab, bc ir cd didumas yra $100°$. Kampo p, kurį sudaro tiesės ab ir cd, didumas yra



A) $15°$; B) $20°$; C) $25°$; D) $30°$; E) $40°$.

$\varepsilon.69$

◇ ◇ ◇

Nagrinėkime funkciją $f(x) = |x+1| + |x-3|$ ir keturis teiginius apie ją:

- *f griežtai didėja* $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$,
- *f intervale pastovi,*
- *f griežtai mažėja* $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$,
- *f visur teigiama.*

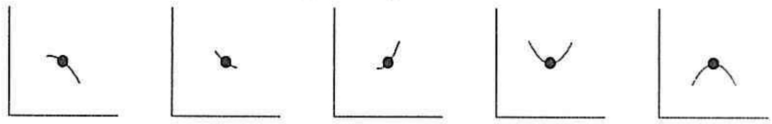
Kiek teiginių iš nurodytųjų yra teisingi:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4?

$\varepsilon.70$

◇ ◇ ◇

Kuris brėžinys rodo dalį funkcijos $y = (10-x)^2 + 10$ grafiko? Ženkliuku • pažymėto taško koordinatės yra $(10; 10)$.



A) B) C) D) E)

$\varepsilon.71$

◇ ◇ ◇

Keli iš daugianarių x^2+x+1, x^3-1, x^2-1, x^4+x^2+1, x^4+x, x^2-x dalija daugianarį $x^7 - x$:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6?

$\varepsilon.72$

◇ ◇ ◇

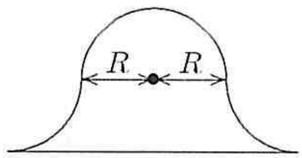
Knygoje yra 320 puslapių. Jų numeriai „išskaidyti“ skaitmenimis, o skaitmenys sudėti į dėžę. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai ištraukus iš dėžės skaitmenį, gausime vienetą:

A) $\frac{1}{10}$; B) $\frac{11}{100}$; C) $\frac{43}{213}$; D) $\frac{43}{240}$; E) $\frac{40}{213}$?

$\varepsilon.73$

◇ ◇ ◇

Tunelio pagrindas horizontalus, o sienas sudaro vienodų apskritimų lankai. Koks pavaizduoto tunelio pjūvio plotas:

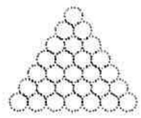


A) $2R^2$; B) πR^2; C) $4R^2$; D) $6R^2$; E) $2\pi R^2$?

$\varepsilon.74$

◇ ◇ ◇

Dvidešimt aštuoni vamzdžiai sukrauti į krūvą. Kiekvieno vamzdžio skersmuo lygus 10 cm. Nurodykite, kuris skaičius tiksliausiai įvertina vamzdžių piramidės aukštį:



A) 51 cm; B) 52 cm; C) 61 cm; D) 62 cm; E) 70 cm.

$\varepsilon.75$

◇ ◇ ◇

Suformuluokime tris teiginius apie funkciją $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}$.

I. f apibrėžta visiems x, didesniems už 0.
II. f apibrėžta kai kuriems neigiamiems x.
III. f reikšmių aibė yra visi teigiami skaičiai.

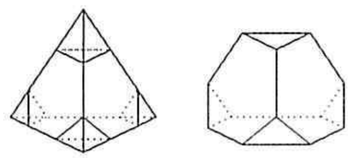
Teisingi yra šie teiginiai:

A) I; B) II; C) III; D) I ir III; E) II ir III.

$\varepsilon.76$

◇ ◇ ◇

Taisyklingojo tetraedro V visos trys viršūnės nupjautos, likęs kūnas L turi aštuonias sienas: keturios sienos yra taisyklingieji trikampiai, kitos keturios – taisyklingieji šešiakampiai. Kūnų L ir V paviršių santykis lygus:



A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{2}{3}$; D) $\frac{7}{9}$; E) 1.

$\varepsilon.77$

◇ ◇ ◇

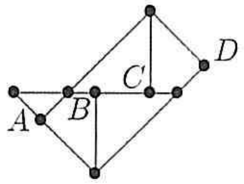
Smailiojo trikampio ABC aukštinės apie trikampį apibrėžtą apskritimą kerta taškuose A', B', C'. Šios aukštinės sutampa su trikampio $A'B'C'$:

A) aukštinėmis; B) pusiaukraštinėmis; C) pusiaukampinėmis; D) statmenimis per kraštinių vidurio taškus; E) nesutampa su paminėtomis tiesėmis.

ε.78

◇ ◇ ◇

Apskritimų, einančių bent per keturis ženklu • pažymėtus taškus (taškuose A, B, C, D tiesės statmenos), skaičius lygus:



A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4 ar daugiau.

ε.79

◇ ◇ ◇

Ant stalo guli keturios kortos. Kiekvienos kortos vienoje pusėje parašyta raidė, kitoje – skaitmuo. Ant matomų pusių parašyta

$\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{K}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$

Norime patikrinti tokį teiginį: *jei ant vienos pusės parašyta balsė, tai ant kitos – lyginis skaičius.* Kurias kortas mums reikia atversti:

A) A; B) A ir 4; C) A ir 7; D) A, 4 ir 7; E) visas.

ε.80

◇ ◇ ◇

Kelios iš lygčių

$$\sqrt{x} = \sqrt{x},$$
$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = \sqrt{x}+\sqrt{x},$$
$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = \sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x},$$
$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = \sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x},$$
$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = \sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}$$

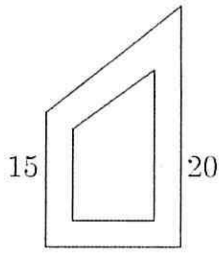
turi nors vieną sprendinį natūraliaisiais skaičiais:

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5?

ε.81

◇ ◇ ◇

Žemės sklypas yra stačiosios trapecijos formos, jo plotas lygus 210 m^2, pagrindai – 15 m ir 20 m. Ant sklypo stovi pastatas, kurio sienos lygiagrečios su sklypo kraštinėms ir nutolę nuo jų per 2 metrus. Pastato pagrindo plotas lygus:



A) $\frac{160}{3}$; B) $\frac{320}{3}$; C) $\frac{324}{3}$; D) $\frac{372}{3}$; E) $\frac{400}{3}$.

ε.82

◇ ◇ ◇

Mano laikrodis, skubantis 5 minutes, rodė, kad į susirinkimą išėjau per vėlai 15 min. Susirinkimas prasidėjo 10 minučių vėliau negu buvo numatyta. Aš atvykau:

A) laiku; B) 10 min. per anksti; C) 10 min. per vėlai; D) 20 min. per vėlai; E) 30 min. per vėlai.

• • • ○ • • •

Skyrelį tvarko **Giedrius Alkauskas**

Šiame skyrelyje – tarptautinės jaunųjų matematikos olimpiados, vykusios 1999 metų liepos mėnesį Bukarešte (Rumunijoje) uždaviniai (α.143 – α.148) bei komandinės olimpiados „Baltijos kelias“, vykusios Reikjavike (Islandijoje) uždaviniai (α.149 – α.168).

• • • ○ • • •

α.143

◇ ◇ ◇

Raskite visas baigtines plokštumos taškų aibes S, turinčias bent tris taškus ir tenkinančias tokią sąlygą: bet kuriems dviem skirtingiems aibės S taškams A ir B atkarpos AB vidurio statmuo yra aibės S simetrijos ašis.

α.144

◇ ◇ ◇

Tegul $n, n \geqslant 2$, – fiksuotas natūralusis skaičius.

a) Raskite mažiausią konstantą C, kuriai nelygybė

$$\begin{aligned}
&x_1x_2(x_1^2+x_2^2)+x_1x_3(x_1^2+x_3^2)+\ldots+x_1x_n(x_1^2+x_n^2)\\
&+x_2x_3(x_2^2+x_3^2)+x_2x_4(x_2^2+x_4^2)+\ldots+x_2x_n(x_2^2+x_n^2)+\ldots\\
&+x_{n-2}x_{n-1}(x_{n-2}^2+x_{n-1}^2)+x_{n-2}x_n(x_{n-2}^2+x_n^2)+x_{n-1}x_n(x_{n-1}^2+x_n^2)\\
&\leqslant C(x_1+x_2+\ldots+x_n)^4
\end{aligned}$$

teisinga su visais realiaisiais skaičiais $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$.

b) Nustatykite, kada su šia C teisinga lygybė.

α.145

◇ ◇ ◇

Kvadratas $n \times n$, čia n – fiksuotas lyginis natūralusis skaičius, padalytas į n^2 vienetinių kvadratėlių. Sakysime, kad du skirtingi kvadratėliai yra gretimi, jei jie turi bendrą kraštinę. N vienetinių kvadratėlių nuspalvinti taip, kad kiekvienas kvadratėlis (nuspalvintas ar nenuspalvintas) yra gretimas mažiausiai vienam nuspalvintam kvadratėliui. Raskite mažiausią galimą N reikšmę.

• • • $\alpha + \omega$ • • •

$\alpha.146$

$\diamond\diamond\diamond$

Raskite visas tokias natūraliųjų skaičių poras (n, p), kad būtų tenkinamos šios sąlygos: p yra pirminis, $n \leqslant 2p$, $(p-1)^n + 1$ dalijasi iš n^{p-1}.

$\alpha.147$

$\diamond\diamond\diamond$

Apskritimai Γ_1 ir Γ_2 yra apskritimo Γ viduje ir liečia apskritimą Γ atitinkamai taškuose M ir N (šie taškai yra skirtingi). Apskritimas Γ_1 eina per apskritimo Γ_2 centrą. Tiesė, einanti per apskritimų Γ_1 ir Γ_2 susikirtimo taškus, kerta apskritimą Γ taškuose A ir B. Tiesės MA ir MB kerta apskritimą Γ_1 atitinkamai taškuose C ir D. Įrodykite, kad CD liečia apskritimą Γ_2.

$\alpha.148$

$\diamond\diamond\diamond$

Raskite visas tokias funkcijas, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ ir įgyjančias realiąsias reikšmes, kad visiems x ir y

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$

$\alpha.149$

$\diamond\diamond\diamond$

Raskite visus realiuosius skaičius a, b, c ir d, tenkinančius sistemą

$$\begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1, \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9, \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 9, \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 9. \end{cases}$$

$\alpha.150$

$\diamond\diamond\diamond$

Raskite visus natūraliuosius skaičius, kurių trečiojo laipsnio šaknis gaunama nubraukus paskutinius tris jo dešimtainės išraiškos skaitmenis.

$\alpha.151$

$\diamond\diamond\diamond$

Raskite visus natūraliuosius skaičius, su kuriais nelygybė

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leqslant 0$$

yra teisinga visiems realiesiems skaičiams $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tenkinantiems sąlygą $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$.

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

α.152

◇ ◇ ◇

Visoms teigiamųjų skaičių poroms (x, y) apibrėžta funkcija

$$f(x, y) = \min\left(x, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Įrodykite, kad atsiras tokia pora (x_0, y_0), kad $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ visoms teigiamųjų skaičių poroms (x, y). Raskite $f(x_0, y_0)$.

α.153

◇ ◇ ◇

Taškas (a, b) yra apskritimo $x^2 + y^2 = 1$ taškas. Apskritimo liestinė, išvesta per tą tašką, su parabole $y = x^2 + 1$ turi vienintelį bendrą tašką. Raskite visus tokius taškus (a, b).

α.154

◇ ◇ ◇

Kiek mažiausiai ėjimų reikia padaryti šachmatų žirgui, kad jis patektų iš $n \times n$ matmenų šachmatų lentos vieno kampinio langelio į kitame įstrižainės gale esantį kampinį langelį?

α.155

◇ ◇ ◇

Du 8×8 šachmatų lentos langelius vadinsime gretimais, jeigu jie turi bendrą kraštinę arba bendrą viršūnę. Ar gali karalius, pradėjęs maršrutą kuriame nors langelyje, pabuvoti visuose likusiuose langeliuose po vieną kartą, visais ėjimais, išskyrus pirmąjį, eidamas į tuos langelius, kurie turi lyginį gretimų jau aplankytų langelių skaičių?

α.156

◇ ◇ ◇

Turime 1999 skirtingų svorių monetas bei įtaisą, kuris viena operacija nustato, kurios iš trijų paimtų monetų svoris yra vidurinis. Įrodykite, kad tūkstantoji pagal svorį moneta gali būti surasta atlikus ne daugiau negu 1 000 000 tokių operacijų ir kad tai yra vienintelė moneta, kurios pagal svorį užimama vieta gali būti nustatyta tokiu įtaisu.

α.157

◇ ◇ ◇

Kubą, kurio briauna lygi 3, padalijame į 27 vienetinius kubelius. Skaičiai $1, 2, \ldots, 27$ yra bet kaip išskirstomi po vieną skaičių į kiekvieną kubelį. Apskaičiuokime visas trijų skaičių, paimtų kurios nors kubo briaunos kryptimi, sumas. Yra 27 tokios sumos (kiekvienoje iš 3 krypčių, lygiagrečių su kubo briaunomis, galima sudaryti 9 tokias sumas). Kiek daugiausiai iš tų 27 sumų gali būti nelyginių?

α.158

◇ ◇ ◇

Ar vienetinio spindulio skritulio, kuriam priklauso ir jį ribojantis apskritimas, taškus galima suskaidyti į tris poaibius taip, kad nė viename poaibyje nebūtų jokių dviejų taškų, tarp kurių atstumas lygus 1?

α.159

◇ ◇ ◇

Yra 4 plokštumos taškai, iš kurių jokie trys nėra vienoje tiesėje. Įrodykite, jog atsiras toks per tris iš šių taškų einantis apskritimas, kad ketvirtas taškas priklauso tam apskritimui arba yra jo viduje.

α.160

◇ ◇ ◇

Trikampio ABC $2AB = AC + BC$. Įrodykite, kad įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centrai bei kraštinių AC ir BC vidurio taškai priklauso vienam apskritimui.

α.161

◇ ◇ ◇

Trikampio ABC kampų A ir B pusiaukampinės kerta kraštines BC ir CA atitinkamai taškuose D ir E. Raskite kampą C, jei $AE + BD = AB$.

α.162

◇ ◇ ◇

Lygiašonio trikampio ABC $AB = AC$, o taškai D ir E priklauso atitinkamai kraštinėms AB ir AC. Tiesė, einanti per B lygiagrečiai su AC, kerta tiesę DE taške F, o tiesė, einanti per tašką C lygiagrečiai su AB, kerta tiesę DE taške G. Įrodykite, kad

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{AD}{AE},$$

čia $[PQRS]$ žymi keturkampio $PQRS$ plotą.

α.163

◇ ◇ ◇

Trikampio ABC kampas $C = 60°$, o $AC < BC$. Kraštinės BC taškas D tenkina sąlygą: $BD = AC$. Kraštinę AC pratęsiame iki tokio taško E, kad $AC = CE$. Įrodykite, kad $AB = DE$.

• • • $\alpha + \omega$ • • •

α.164

◇ ◇ ◇

Raskite mažiausią natūralųjį skaičių k, kurį galima užrašyti pavidalu $k = 19^n - 5^m$; čia m ir n – natūralieji skaičiai.

α.165

◇ ◇ ◇

Ar egzistuoja tokia baigtinė sveikųjų skaičių $c_1, c_2, \ldots, c_n$ seka, kad visi skaičiai $a + c_1, a + c_2, \ldots, a + c_n$ būtų pirminiai su daugiau kaip vienu, bet ne su be galo daug skirtingų sveikųjų skaičių a?

α.166

◇ ◇ ◇

Natūralusis skaičius m yra toks, kad $m \equiv 2 \pmod 4$. Įrodykite, kad egzistuoja ne daugiau kaip vienas toks skaidinys $m = ab$, (čia a ir b yra natūralieji skaičiai) tenkinantis sąlygą

$$0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m + 1}}.$$

α.167

◇ ◇ ◇

Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug tokių lyginių natūraliųjų skaičių k, kad su kiekvienu pirminiu skaičiumi p skaičius $p^2 + k$ yra sudėtinis.

α.168

◇ ◇ ◇

Pirminiai skaičiai a, b, c ir d tenkina sąlygą: $a > 3b > 6c > 12d$; $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Raskite visas galimas reiškinio $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ reikšmes.

Skyrelį tvarko **Giedrius Alkauskas**

Šio skyrelio uždavinius sprendė 6-osios tarptautinės studentų matematikos olimpiados, vykusios Vengrijoje, dalyviai.

ω.38

◇ ◇ ◇

a) Įrodykite, kad kiekvienam natūraliajam m atsiras tokia realioji $m \times m$ matrica A, jog $A^3 = A + I$, čia I yra m-matė vienetinė matrica.

b) Įrodykite, kad kiekvienai realiajai $m \times m$ matricai A, tenkinančiai lygybę $A^3 = A + I$, teisinga nelygybė $\det A > 0$.

ω.39

◇ ◇ ◇

Ar egzistuoja toks abipusiškai vienareikšmis (bijektyvusis) atvaizdis $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty?$$

ω.40

◇ ◇ ◇

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kiekvienam natūraliajam n ir su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkina nelygybę

$$\Bigl|\sum_{k=1}^{n} 3^k \bigl(f(x+ky) - f(x-ky)\bigr)\Bigr| \leqslant 1.$$

Įrodykite, kad f yra pastovioji funkcija.

ω.41

◇ ◇ ◇

Raskite visas griežtai didėjančias funkcijas $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, kad $f\Bigl(\dfrac{x^2}{f(x)}\Bigr) \equiv x$.

••• $\alpha + \omega$ •••

$\omega.42$

◇◇◇

Pažymėta $2n$ $n \times n$ gardelės taškų. Įrodykite, kad atsiras toks skaičius $k > 1$, jog bus galima rasti $2k$ tokių skirtingų pažymėtųjų taškų $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$, iš kurių a_1 ir a_2 būtų vienoje eilutėje, a_2 ir a_3 – viename stulpelyje, ... , a_{2k-1} ir a_{2k} būtų vienoje eilutėje, a_{2k} ir a_1 – viename stulpelyje.

$\omega.43$

◇◇◇

Įrodykite, kad kiekvienam skaičiui $1 < p < \infty$ egzistuoja konstanta $c_p < \infty$, kad:

a) jeigu $f : [-1;1] \to I\!R$ yra tolydžiai diferencijuojama funkcija, tenkinanti sąlygas $f(1) > f(-1)$ ir $|f'(y)| \leqslant 1$ su visais $y \in [-1;1]$, tai atsiras toks $x \in [-1;1]$, kad $f'(x) > 0$ ir visiems $y \in [-1;1]$

$$|f(y) - f(x)| \leqslant c_p\big(f'(x)\big)^{1/p}|y - x|.$$

b) Ar tokia konstanta taip pat egzistuoja ir kai $p = 1$?

$\omega.44$

◇◇◇

Tarkime, R yra asociatyvus, bet nebūtinai komutatyvus žiedas, kurio kiekvieno elemento kvadratas yra 0. Įrodykite, kad visiems žiedo elementams a, b, c teisinga lygybė $abc + abc = 0$.

$\omega.45$

◇◇◇

n kartų metamas įprastinis simetriškas lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad visų iškritusių akučių suma dalijasi iš 5?

$\omega.46$

◇◇◇

Tarkime, $x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant -1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$. Įrodykite, kad $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}$.

$\omega.47$

◇◇◇

Įrodykite, kad nėra tokios funkcijos $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, jog visiems $x, y > 0$ būtų teisinga nelygybė $f^2(x) \geqslant f(x + y)\big(f(x) + y\big)$.

ω.48

◇◇◇

Tegu S yra visų iš raidžių x, y ir z sudarytų žodžių aibė, kurioje nagrinėjame minimalųjį ekvivalentumo sąryšį $\sim$, tenkinantį tokias sąlygas: visiems žodžiams $u, v, w \in S$

(i) $uu \sim u$;

(ii) jei $v \sim w$, tai $uv \sim uw$ ir $vu \sim wu$.

Įrodykite, kad bet kuris aibės S žodis yra ekvivalentus daugiausiai 8 raides turinčiam žodžiui.

ω.49

◇◇◇

Tegu A yra $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ poaibis, turintis daugiausiai $\frac{1}{100}\ln n$ elementų. Kiekvienam $r \in \mathbf{Z}_n$ apibrėžkime r-ąjį Fourier koeficientą lygybe

$$f(r) = \sum_{s \in A} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} sr\right).$$

Įrodykite, kad atsiras toks $r \neq 0$, jog $|f(r)| \geqslant |A|/2$.

Elementarieji metodai

••• $\alpha + \omega$ •••

Skaičių cirkas

Ketvertas-akrobatas

$$34425 = 3^4 \cdot 425.$$

Į priekį ir atgal

$$5^3 + 40^3 + 53^3 + 18^3 = 8^3 + 13^3 + 50^3 + 45^3,$$
$$(1 \times 23) + (2 \times 31) + (3 \times 12) = (21 \times 3) + (13 \times 2) + (32 \times 1).$$

Skaičiaus 13 fokusai

$$\begin{aligned}
13 =& 10101 : 777,\\
13 =& 101101 : 7777,\\
13 =& 1011101 : 77777,\\
13 =& 101\ldots 1 \ldots 101 : 77 \ldots 77,\\
13 =& (1 \times 2 \times 3 \times 4) - (5 + 6) = 234 : (5 + 6 + 7),\\
13 =& \frac{11^2 + 3^2}{1^2 + 3^2} = \frac{3^3 + 4^3}{3 + 4} = \frac{12^2 + 34^2}{(1 + 2 + 3 + 4)^2} = \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5}{(1 + 2 + 3 + 4)^2}.
\end{aligned}$$

Genius Strazdas