Alfa + omega seminaras

Mūsų seminaro svečias – matematikos habilituotas daktaras Artūras Dubickas. Jis turi didelę tiek jaunųjų matematikų olimpiadų dalyvio, tiek rengėjo patirtį.

Artūras Dubickas

Apie teigiamus daugianarius

Daugianarį $P(x)$ vadinsime teigiamu, jei $P(x) > 0$ su visais realiaisiais x. Panagrinėsime keletą uždavinių, kuriuose tokie daugianariai pasirodo.

1999 metais 14–oje Lietuvos jaunųjų matematikų komandinėje olimpiadoje pasiūliau tokį uždavinį.

1 uždavinys. *Daugianaris $ax^4 + bx^3 + cx + 7$ neturi realiųjų šaknų. Įrodykite, kad $6a + 5 > |3b + c|$.*

Remdamsis kelerių metų praktika, neabejojau, jog tai bus sunkiausiai įveikiamas olimpiados uždavinys. Taip ir įvyko. Olimpiados dalyviai, matyt, net nebandė spręsti šio uždavinio. Prieš įtraukdamas jį į konkursinių uždavinių sąrašą, žinojau tik tokį jo sprendimą.

Pirmas sprendimo būdas. Pažymėkime

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 7.$$

Kadangi $P(0) = 7 > 0$ ir $P(x)$ neturi realiųjų šaknų, tai $P(x)$ yra teigiamas daugianaris. Todėl $a \geqslant 0$, nes priešingu atveju imdami pakankamai didelį x gautume neigiamą daugianario reikšmę $P(x)$. Sudėkime du teigiamus skaičius $P(1)$ ir $P(2)$:

$$P(1) + P(2) = a + b + c + 7 + 16a + 8b + 2c + 7 = 17a + 9b + 3c + 14 > 0.$$

Gavome nelygybę $17a + 14 > -9b - 3c$. Analogiškai, sudėję $P(-1)$ ir $P(-2)$ gausime $17a + 14 > 9b + 3c$. Tai reiškia, kad $|9b + 3c| = 3|3b + c| < 17a + 14$. Aišku, kad $17a + 14 < 18a + 15 = 3(6a + 5)$, nes $a \geqslant 0$. Todėl $3|3b + c| < 3(6a + 5)$, ir padaliję iš 3 gauname reikiamą nelygybę.

• • • $\alpha + \omega$ • • •

Po olimpiados pasiūliau šį uždavinį vienam savo dar nuo studijų Maskvos universitete laikų pažįstamam kolegai biochemikui, kuris su malonumu (ir paprastai sėkmingai!) sprendžia lietuviškų matematikų olimpiadų lygio uždavinius. Jo sprendimas buvo dar paprastesnis.

Antras sprendimo būdas. Vėl pasinaudosime tuo, kad jei daugianaris $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 7$ yra teigiamas, tai $a \geqslant 0$. Kadangi

$$P(\sqrt{3}) = 9a + 3\sqrt{3}b + \sqrt{3}c + 7 > 0,$$

tai $9a + 7 > -\sqrt{3}(3b + c)$.

Analogiškai, iš nelygybės $P(-\sqrt{3}) > 0$ išplaukia, kad $9a+7 > \sqrt{3}(3b+c)$. Vadinasi, $9a + 7 > \sqrt{3}|3b + c|$, todėl vėl gauname reikiamą nelygybę, nes $6 > 9/\sqrt{3}$, $5 > 7/\sqrt{3}$, taigi $(6a+5)\sqrt{3} > 9a + 7$.

Pabandykite rasti dar vieną šio uždavinio sprendimą, naudodamiesi nelygybėmis

$$P(\sqrt[4]{42/5}) > 0, \quad P(-\sqrt[4]{42/5}) > 0.$$

2 uždavinys. *Tegu $P(x)$ yra teigiamas daugianaris. Įrodykite, kad daugianaris*

$$Q(x) = P(x) + \frac{P^{(II)}(x)}{2!} + \frac{P^{(IV)}(x)}{4!} + \dots$$

taip pat yra teigiamas.

Sprendimas. Aišku, kad su visais realiaisiais x $P(x+1) > 0$ ir $P(x-1) > 0$. Taigi uždavinio teiginys išplaukia iš tapatybės

$$P(x) + \frac{P^{(II)}(x)}{2!} + \frac{P^{(IV)}(x)}{4!} + \dots = \frac{1}{2}(P(x+1) + P(x-1)).$$

Skaitytojai, susipažinę su skleidiniais Teiloro eilutėmis, tapatybę nesunkiai įrodys sudėję $P(x+1)$ ir $P(x-1)$ skleidinius taške x. Tačiau ją galima įrodyti ir „mokykliniu“ binominių koeficientų metodu. Užrašę binomo formules laipsniams $(x+1)^k$ ir $(x-1)^k$ bei sudėję gautus reiškinius matome, jog kas antras narys susiprastina, todėl

$$\frac{1}{2}((x+1)^k + (x-1)^k) = \sum_{j=0}^{[k/2]} \binom{k}{2j} x^{k-2j},$$

čia $[\,]$ žymi skaičiaus sveikąją dalį. Vadinasi, jei

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

tai

$$\frac{1}{2}(P(x+1)+P(x-1)) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k((x+1)^k+(x-1)^k) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{[k/2]} a_k \binom{k}{2j} x^{k-2j}.$$

Kadangi $P^{(2j)}(x) \equiv 0$, kai $j > [n/2]$, tai pakanka sumuoti lygines išvestines iki $2[n/2]$ eilės:

$$P(x) + \frac{P^{(II)}(x)}{2!} + \frac{P^{(IV)}(x)}{4!} + \ldots = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{P^{(2j)}(x)}{(2j)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{[n/2]} a_k \binom{k}{2j} x^{k-2j} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{[k/2]} a_k \binom{k}{2j} x^{k-2j}.$$

Čia priešpaskutinę nelygybę gauname sukeitę sumavimo tvarką (tai visada galima daryti baigtinėse sumose), o paskutinė lygybė išplaukia iš to, kad $\binom{k}{2j} = 0$, kai $j > [k/2]$.

3 uždavinys. *Tegu r yra natūralusis, o $a_1, a_2, \ldots, a_r$ – realieji skaičiai. Įrodykite nelygybę*

$$\sum_{n=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} \frac{a_m a_n}{m+n} \geqslant 0.$$

Sprendimas. Panagrinėkime daugianarį

$$P(x) = \sum_{n=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} a_m a_n x^{m+n-1}.$$

Aišku, kad $P(0) = 0$ ir

$$xP(x) = \sum_{n=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} a_m a_n x^{m+n} = \sum_{n=1}^{r} a_n x^n \sum_{m=1}^{r} a_m x^m = \Big(\sum_{n=1}^{r} a_n x^n\Big)^2 \geqslant 0.$$

Taigi $P(x) \geqslant 0$, kai $x \geqslant 0$. Integruokime $P(x)$ nuo 0 iki 1 :

$$0 \leqslant \int_0^1 P(x)dx = \sum_{n=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} a_m a_n x^{m+n}\Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} \frac{a_m a_n}{m+n}.$$

Nelygybė įrodyta.

Pavyzdžiui, kai $r = 3$ iš 3 uždavinio išplaukia toks teiginys.

Išvada. *Jei a, b, c yra realieji skaičiai, tai*

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{6} + \frac{2ab}{3} + \frac{ac}{2} + \frac{2bc}{5} \geqslant 0.$$

Pabandykite įrodyti šią nelygybę nesinaudodami daugianariais.

• • • $\alpha + \omega$ • • •