Petrė Grebenečenkaitė

Žiupsnelis nestandartinių uždavinių

Po pirmojo valstybinio egzamino vis geriau suprantame, kad svarbiau ugdyti loginį mokinių mąstymą o ne „treniruoti“ juos sprendžiant standartinius uždavinius. Nestandartinio uždavinio sprendimo ieškojimas – tai matematinė kūryba, reikalaujanti iš mokinio ir valios, ir užsispyrimo, ir atkaklaus darbo. Mokiniai noriai sprendžia tuos uždavinius, kurie juos sudomina. Tai probleminiai, praktinio turinio uždaviniai.

Šiemet valstybinio matematikos egzamino metu sunkiausiai sekėsi spręsti paskutinį uždavinį. Mano manymu, tai atsitiko todėl, kad kūrybiškumo reikalaujančių uždavinių nesprendžiama žemesnėse klasėse.

Štai keletas ugdančių iniciatyvą, lavinančių protą uždavinių, kuriuos galima spręsti jau penktoje klasėje.

- *Jolantai dabar 11 metų, o jos mamai – 32. Po kiek metų mama bus dvigubai vyresnė už dukterį? (Skaičius, suprantama, galima parinkti ir kitus.)*
- *Kaip patalpinti 45 triušius į 9 narvus, kad visuose būtų po skirtingą triušių skaičių?*
- *Kiek yra dviženklių skaičių, kurių dešimčių skaitmuo didesnis už vienetų skaitmenį?*
- *Močiutė paprašė Tado sudėti kiaušinius į pintinę. Tadas, juos sudėjęs, netyčia pintinę apvertė ir keli kiaušiniai sudužo. Močiutė paklausė, kiek buvo kiaušinių. Tadas nežinojo jų skaičiaus, bet prisiminė, kad skirstant juos grupelėmis po 2, po 3, po 4, po 5 ir po 6, vienas kiaušinis vis likdavo, o skirstant po 7 – nelikdavo nė vieno.*
- *Matematikos kabineto visas langų plotas sudaro 1/5 grindų ploto. Kabineto aukštis 4 m, o grindų matmenys – 6 m $\times$ 6 m. Palangė yra $1\frac{1}{5}$ m aukščio nuo grindų, o lango viršus yra 30 cm žemiau lubų. Raskite langų plotį.*

Vyresniųjų klasių mokiniams taip pat nesunku parinkti nors ir nesudėtingų, tačiau nestandartiškai suformuluotų uždavinių,

- *Du žadintuvai dabar rodo 12 val. dienos. Pirmasis žadintuvas per parą neskuba 8 min., antrasis – 4 min. atsilieka. Po kiek laiko abu žadintuvai vėl tuo pačiu metu rodys 12 val. dienos?*
- *Raskite paskutinį skaičiaus 3^{1999} skaitmenį.*
- *Kuriame ketvirtyje yra kampas $\sqrt{\pi}$?*

••• $\alpha + \omega$ •••

- *Dvyliktą valandą minutinė ir valandinė rodyklės sutampa. Kiek kartų jos sutampa nuo kovo 1 d. 6 val. vakaro iki kovo 2 d. 9 val. ryto?*
- *Visą savaitę kinoteatre „Ateitis" buvo demonstruojami filmai A, B ir C. Kiekvienas iš 40 moksleivių žiūrėjo arba visus tris filmus, arba tik vieną iš jų. Filmą A matė 13, filmą B – 16, filmą C – 19 moksleivių. Kiek moksleivių matė visus tris filmus?*

Galima pasiūlyti ir procentų uždavinių, kurie gali būti sprendžiami keliais būdais.

- *Dviejų žvėrių kailiukų savikaina (kartu paėmus) lygi 225 JAV doleriams, juos pardavus gauta 40% pelno. Kokia kiekvieno iš kailiukų savikaina, jeigu už pirmąjį gauta 25% pelno, o už antrąjį – 50% ?*
- *Tam tikra pinigų suma, ne mažesnė už 500 Lt, įnešta į banką. Po metų ji padidėjo 20 Lt ir 16 ct. Indėlis buvo dar papildytas 79 Lt ir 84 ct. ir paliktas dar metams. Po metų indėlis padidėjo iki 628 Lt ir 16 ct. Kiek procentų metinių palūkanų moka bankas?*
- *Įdiegus naujas technologijas, įmonėje elektros energijos sunaudojama 16% mažiau, o elektros prietaisų pagaminama 50% daugiau. Keliais procentais mažiau elektros energijos reikia vienam prietaisui pagaminti?*
- *Dėl infliacijos Mamba-Tamba saloje kainos išaugo 300%. Opozicija pareikalavo grąžinti senas kainas. Kiek procentų jos turėtų būti sumažintos?*

Daug galimybių mokinių kūrybingumui ugdyti teikia geometrijos uždaviniai. Pasiūlysime keletą.

- *Ar apie rombą visada galima apibrėžti apskritimą?*
- *Įbrėžto į apskritimą keturkampio perimetras lygus 1. Ar apskritimo spindulys gali būti didesnis už 100?*
- *Lygiašonio trikampio pagrindu juda taškas. Įrodykite, kad atstumų nuo jo iki šoninių kraštinių suma yra pastovus dydis (nepriklausantis nuo taško padėties).*
- *Nubraižytas kvadratas ir su juo lygiaplotis skritulys. Kas didesnis: skritulį ribojančio apskritimo ilgis ar kvadrato perimetras?*
- *Ritinio pagrindo spindulys lygus 2, o aukštinė – 10. Ar šiame ritinyje tilps rutulys, kurio tūris tris kartus mažesnis už ritinio tūrį?*
- *Iš taisyklingosios trikampės ir taisyklingosios keturkampės prizmės formos detalių reikia pagaminti didžiausio tūrio ritinius. Kiek procentų medžiagos teks atliekoms?*

Mokinių matematikos žinios nebus visavertės, jeigu jie nemokės spręsti paprasčiausių įrodymo uždavinių. Štai keletas nesudėtingų įrodyti reikalaujančių uždavinių iš įvairių matematikos temų.

- *Žinoma, kad seka* $4^{x_1}, 4^{x_2}, \ldots, 4^{x_n}$ *yra geometrinė progresija, kurios vardiklis 2. Įrodykite, kad seka* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *yra aritmetinė progresija.*
- *Lygties* $ax^2 + bx + c = 0$ *diskriminantas yra neneigiamas skaičius ir nė viena šaknis nelygi nuliui. Įrodykite, kad šios lygties šaknų atvirkštiniai skaičiai yra lygties* $cx^2 + bx + a = 0$ *šaknys.*

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

- *Jei $a+\frac{1}{a}$ yra sveikasis skaičius, tai skaičius $a^3+\frac{1}{a^3}$ irgi sveikasis. Įrodykite.*
- *Įrodykite, kad nėra tokio funkcijos $y = x^3 + x^2 + x + 1$ taško, kuriame nubrėžta liestinė būtų lygiagreti su kuria nors iš koordinačių ašių.*
- *Už apvalaus stalo sėdi 10 žmonių. Įrodykite, kad juos galima persodinti taip, kad kiekvienas žmogus turėtų du naujus kaimynus.*

Tik spręsdami įvairius uždavinius moksleiviai gali pamėgti matematiką. Šalies mokytojai turėtų dalytis tiek patirtimi, tiek savo pamokose naudojamais uždavinių rinkiniais.

Ričardas Razmas

Išvestinės ir nelygybės

Priminsime žinomą matematinės analizės teoremą:

Jei funkcija $f(x)$ intervale $(a;b)$ turi išvestinę tai: kai $f'(x) > 0$, tai funkcija šiame intervale didėja, kai $f'(x) < 0$ – mažėja. Jeigu dar žinoma, kad funkcija tolydi intervale $[a;b)$ (arba $[a;b]$, $(a;b]$), tai $f(x)$ didėja (arba mažėja) intervale $[a;b)$ (atitinkamai $[a;b]$, $(a;b]$).

Ši teorema – geras įrankis tiek nelygybėms įrodyti, tiek naujoms nelygybėms sudaryti. Panagrinėsime pavyzdžių.

- *Įrodykite, kad su visais $a \in (0;\frac{1}{2})$ teisinga nelygybė*

$$2a + \frac{1}{a^2} > 5.$$

Suradę funkcijos $f(x) = 2x + 1/x^2$ išvestinę

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^3}(x^3 - 1),$$

matome, kad ji neigiama, kai $x \in (0;1)$. Taigi funkcija šiame intervale mažėja. Nagrinėdami funkciją, kai $a \in (0;\frac{1}{2})$, matome, kad $f(a) > f(1/2)$. Kadangi $f(1/2) = 5$, tai vietoje $f(a)$ įrašę funkcijos išraišką, gauname nelygybę, kurią reikėjo įrodyti.

- *Įrodykite, kad su bet kokiais $\alpha < \beta$, teisinga nelygybė $\alpha + \cos\alpha < \beta + \cos\beta$.*

Funkcijos $f(x) = x + \cos x$ išvestinė $f'(x) = 1 - \sin x$ yra teigiama intervale $(-\pi/2;\pi/2)$. Iš teoremos gauname, kad su bet kokiais $-\pi/2 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi/2$

teisinga nelygybė $\alpha + \cos\alpha < \beta + \cos\beta$. Ji taip pat teisinga ir bet kuriame intervale $-\pi/2 + k\pi \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi/2 + k\pi$, čia $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

- *Įrodykite, kad su visais* $\alpha > 0$ *teisinga nelygybė* $\sin\alpha(4 - \cos\alpha) < 3\alpha$.

Funkcijos $f(x) = \sin x(4 - \cos x) - 3x$ išvestinė $f(x) = -2(\cos x - 1)^2 < 0$ intervale $(0;\pi)$ (apskritai bet kokiame intervale $(k\pi;(k+1)\pi)$). Iš teoremos gauname, kad funkcija mažėja intervale $[0;\pi]$ (apskritai visoje realiųjų skaičių aibėje). Taigi jei $\alpha > 0$, tai $f(\alpha) < f(0) = 0$. Tai ir yra uždavinio nelygybė.

Analogiškai, nustačius tam tikros funkcijos išvestinės ženklą, išsprendžiams toks uždavinys:

- *Įrodykite, kad su* $1,5 < a < b$ *teisinga nelygybė*

$$a^2 + \frac{1}{a^3} < b^2 + \frac{1}{b^3}.$$

Nagrinėjant nelygybes, kuriose yra keletas raidėmis pažymėtų dydžių, patogu vieną iš jų laikyti kintamuoju, o kitas – konstantomis.

- *Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais* a, b $(a \neq b)$ *teisinga nelygybė*

$$(a+b)^6 < 32(a^6 + b^6).$$

Suprantama, kad pakanka įrodinėti nelygybę su teigiamais a, b. Tarkime, kad $0 < a < b$. Pakanka įrodyti, kad

$$\frac{(a+b)^6}{32(a^6+b^6)} < 1.$$

Laikydami b konstanta, nagrinėsime funkciją

$$f(x) = \frac{(x+b)^6}{32(x^6+b^6)}, \quad 0 < x < b.$$

Šios funkcijos išvestinė yra teigiama:

$$f'(x) = \frac{1}{32}\,\frac{6b(x+b)^5(b^5 - x^5)}{(x^6+b^6)^2}, \quad 0 < x < b,$$

taigi funkcija didėja. Jei $0 < a < b$, tai $f(a) < f(b) = 1$. Tai ir yra reikalinga mums nelygybė.

Kartais ir įrodinėjant skaitines nelygybes naudinga pereiti prie „funkcinio“ uždavinio.

- *Kuris skaičius didesnis:* 1999^{2000} *ar* 2000^{1999} ?

Tarkime, kad $0 < x < y$. Nustatysime, kada teisinga nelygybė $x^y < y^x$, o kada $y^x < x^y$. Vietoje nelygybės $x^y < y^x$ galime nagrinėti logaritmuojant reiškinius gautą nelygybę $y \ln x < x \ln y$. Ši nelygybė savo ruožtu ekvivalenti tokiai:

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln y}{y}.$$

Dabar nagrinėkime funkciją $f(x) = \ln x / x$. Jos išvestinė

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Matome, kad $f'(x) < 0$, kai $x > e$, t.y. funkcija mažėja. Taigi skaičiams $0 < 1999 < 2000$, gauname $f(1999) > f(2000)$, arba

$$\frac{\ln 1999}{1999} > \frac{\ln 2000}{2000}, \quad \text{arba} \quad 1999^{2000} > 2000^{1999}.$$

- *Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais x teisinga nelygybė $e^{x-1} \geqslant x$.*

Funkcijos $f(x) = e^{x-1} - x$ išvestinė $f'(x) = e^{x-1} - 1$ yra teigiama, kai $x > 1$, ir neigiama, kai $x < 1$. Taigi $x = 1$ yra funkcijos minimumo taškas, todėl visiems x $f(x) \geqslant f(1)$, arba $e^{x-1} \geqslant x$. Nelygybė įrodyta.

Remiantis šia nelygybe, galime įrodyti Caushy nelygybę geometriniam ir aritmetiniam vidurkiui :

- *su visais neneigiamais skaičiais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ teisinga nelygybė*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Pažymėkime

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

ir pritaikykime ankstesnio uždavinio nelygybę su $x = x_1/a, x_2/a, \ldots, x_n/a$. Gauname nelygybes

$$\frac{x_1}{a} \leqslant e^{\frac{x_1}{a}-1}, \ \frac{x_2}{a} \leqslant e^{\frac{x_2}{a}-1}, \ldots, \ \frac{x_n}{a} \leqslant e^{\frac{x_n}{a}-1}.$$

Sudauginę nelygybes panariui, gausime

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{a^n} \leqslant e^{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{a} - n}.$$

Kadangi $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/a = n$, tai

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant a^n, \quad \text{arba} \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Lygybės ženklas galioja tada ir tik tada, kai $x_1/a = x_2/a = \ldots = x_n/a$, arba $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

••• $\alpha + \omega$ •••