1997 metų spalio mėnesį BBC televizijos mokslo populiarinimo laidų programoje *Horizon* buvo parodyta laida „Paskutinė Fermat teorema.“ Laida buvo sudaryta iš pokalbių su daugeliu žymių matematikų, vienaip ar kitaip prisidėjusių prie problemos sprendimo. Mūsų skaitytojams pateikiame šių pokalbių tekstus. Laidoje buvo aiškinamos ir pokalbiuose minimos matematinės sąvokos. Apie jas galima pasiskaityti šiame numeryje spausdinamuose straipsniuose. Pokalbių tekstus iš anglų kalbos išvertė Remigijus Lapinskas.

Kaip buvo įrodyta paskutinė Fermat teorema

A. WILES: Man nėra lengva aprašyti savo kaip matematiko darbą. Tai tarsi didžiulio tamsaus namo tyrinėjimas. Aš įeinu į pirmą kambarį; jis visiškai tamsus, vaikštau klupdamas ir vis atsimušdamas į baldus. Po to pamažu išsiaiškinu, kur yra baldai, kaip jie išdėstyti. Ir vieną dieną, gal po šešių mėnesių, aš staiga surandu jungiklį ir įjungiu šviesą: viskas nušvinta ryškioje šviesoje, staiga aš suprantu, kur esu.

Rugsėjo pradžioje aš sėdėjau čia, prie šio stalo, kai staiga visiškai nelauktai patyriau šį neįtikėtiną regėjimą. Tai buvo pats svarbiausias mano gyvenimo momentas. Jaučiu, kad to daugiau niekuomet nepatirsiu ...

LAIDOS VEDĖJAS: Šiandien mes kalbėsime apie žmogų, kurį buvo apsėdęs sunkiausias pasaulio matematinis uždavinys. Septynerius metus profesorius Andrew Wiles dirbo visiškoje paslaptyje, bandydamas sukurti šimtmečio įrodymą. Šis įrodymas atnešė jam ne tik šlovę, bet ir kančią.

A. WILES: Taigi galų gale aš pasiekiau savo. Aš buvau dešimties, kai viešojoje bibliotekoje radau matematinę knygą. Joje buvo aprašyta šio uždavinio istorija – kažkas jį jau buvo išsprendęs prieš 300 metų, bet niekas nematė įrodymo, niekas netgi nežinojo, ar šis įrodymas iš tikro egzistavo, bet žmonės vis bandė jį išspręsti. Tai buvo uždavinys, kurį aš, dešimtmetis, supratau, bet niekas, niekas iš praeities didžiųjų matematikų negalėjo jo išspręsti! Ir nuo to momento aš, aišku, irgi bandžiau spręsti tą labai gražų uždavinį, kurs buvo tikras iššūkis.

Tai vadinamoji paskutinė Fermat teorema.

VEDĖJAS: Pierre de Fermat buvo XVII-ojo amžiaus prancūzų matematikas, padaręs vienus iš didžiausių skaičių istorijoje atradimų. Įkvėpimo jis sėmėsi iš garsiosios „Arithmetica“, antikos graikų knygos.

J. CONWAY: Fermat turėjo savą šios knygos egzempliorių. Ši knyga apie skaičius, su daugybe uždavinių, kuriuos Fermat, atrodo, bandė spręsti. Jis ją studijavo, o savo pastabas užrašydavo paraštėse.

VEDĖJAS: Fermat pastabų originalai dingo, bet juos buvo galima perskaityti jo sūnaus išleistoje knygoje. Viena iš šių pastabų ir yra pats svarbiausias Fermat palikimas.

J. CONWAY: Štai ta fantastiška Fermat užuomina, sukėlusi nesibaigiančias diskusijas: *Cubum autem in duos cubos.*

VEDĖJAS: Ši miniatiūrinis įrašas šimtmečius buvo pats sunkiausias matematikos uždavinys, nors prasideda lygtimi, kurią mintinai žino kiekvienas vaikas.

VAIKAI: Įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai.

••• $\alpha + \omega$ •••

J. CONWAY: Taip, tai Pitagoro teorema, mes visi ją prisimename iš mokyklos. Ji teigia, kad trys skaičiai yra stataus trikampio kraštinių ilgiai tik tuomet, kai x kvadratu plius y kvadratu lygu z kvadratu.

A. WILES: Taigi x kvadratu plius y kvadratu lygu z kvadratu. O dabar paklauskime, ar negalima šios lygties išspręsti sveikaisiais skaičiais? Labai greitai galima nustatyti, kad 3 kvadratu plius 4 kvadratu lygu 5 kvadratu. Arba 5 kvadratu plius 12 kvadratu lygu 13 kvadratu. Paiešką galima tęsti ir rasti vis daugiau ir daugiau sprendinių. Dabar natūraliai kyla KLAUSIMAS, kurį ir suformulavo Fermat: kas būtų, jei kvadratą pakeistume kubu, arba ketvirtuoju, penktuoju, šeštuoju ar apskritai, bet kokiu sveikuoju laipsniu n? Fermat atsakė – sprendinių nebus, nors ir kiek toli benueitumėte.

VEDĖJAS. Jei n didesnis už 2, jūs niekuomet nerasite sveikųjų skaičių, tinkančių šiai lygčiai. Štai tas teiginys, kurį suformulavo Fermat. Maža to, jis tvirtino, kad gali tai įrodyti. Genialumo akimirką jis užrašė paslaptingą pastabą.

J. CONWAY: Šioje pastaboje, užrašytoje lotyniškai, teigiama, kad jis žino nuostabų šio teiginio įrodymą, *demonstrationem mirabilem*, o paskutiniai jo žodžiai yra *hanc marginis exiguitas non caperet*, t.y. paraštės per mažos, trūksta vietos įrodymui užrašyti.

VEDĖJAS: Taigi Fermat sakė, žinąs įrodymą, tačiau niekuomet nepasakė, koks jis.

J. CONWAY: Fermat darė daug pastabų paraštėse. Žmonės bandė jo uždavinius spręsti, per šimtmečius jiems pavyko išspręsti visus, išskyrus vieną. Tą, kurį tik ką aptarėme. Štai kodėl šis uždavinys, t.y. ši teorema, vadinama paskutine.

VEDĖJAS: Ji tapo erzinančiu ir jaudinančiu iššūkiu, matematikai daugiau kaip 300 metų bandė vėl atrasti prarastąjį įrodymą.

J. CONWAY: Gauss, didžiausias visų laikų matematikas...

B. MAZUR: O taip, ir Galois ...

J. COATES: Žinoma, Kummer ...

K. RIBET: XVIII amžiuje nepavyko Euleriui.

J. CONWAY: Jūs žinote, kad buvo ir viena moteris ...

K. RIBET: Taip, Sophie Germain.

B. MAZUR: Tiesą sakant, buvo milijonai, buvo daugybė žmonių.

P. SARNAK: Bet niekas neturėjo nė menkiausio supratimo, nuo ko pradėti.

A. WILES: Apskritai matematikai mėgsta keblius uždavinius, bet šio uždavinio formulavimas buvo toks paprastas, kad atrodė, jog jis tiesiog privalo turėti sprendimą, tuo labiau, kad Fermat sakė žinąs.

VEDĖJAS: Matematikai norėjo įrodyti, kad jokie sveikieji nenuliniai skaičiai netenkina šios lygties, bet argi dabar, atsiradus kompiuteriams, jie negalėjo patikrinti visų skaičių, vieną po kito, ir parodyti, kad nė vienas netinka?

J. CONWAY: Na gerai, kelis skaičius mums reiktų patikrinti? Jeigu patikrinome vieną, keli dar lieka? Be galo daug. O jei patikrinome 1000, kiek dar lieka? Vėl begalybė. Netgi keli milijonai yra labai mažai, ar ne?

VEDĖJAS: Kompiuteris negali patikrinti visų skaičių. Ko mums iš tikrųjų reikia – tai matematinio įrodymo.

P. SARNAK: Matematikai nenusiramina tol, kol neranda visiškai priimtino įrodymo. Priimtino, aišku, matematine prasme.

N. KATZ: Matematikai yra susitarę, ką vadinti tiksliu įrodymu, ką vadinti absoliučia tiesa.

P. SARNAK: Tai vadinama griežtu įrodymu.

K. RIBET: Na, griežtu įrodymu vadinama seka teiginių ...

P. SARNAK: ... susietų pagal logikos taisykles.

K. RIBET: ... kurie išplaukia viena iš kito.

P. SARNAK: Žingsnis po žingsnio.

K. RIBET: Kol jūs gaunate...

P. SARNAK: Pilną įrodymą.

N. KATZ: Būtent tą ir daro matematikai.

VEDĖJAS: Įrodymas yra argumentavimo rūšis. Jis turi paaiškinti, kodėl nėra reikalo tikrinti kiekvieną skaičių. Deja, po šimtmečius trukusių nesėkmių, matematikai pradėjo nusigręžti nuo Fermat – juk yra daugybė kitų rimtų matematikos problemų.
Septintajame dešimtmetyje Fermat jau buvo nebemadingas. Kaip tik tuo metu Andrew Wiles pradėjo savo matematinę karjerą. Jo doktorantūros Kembridže vadovu tapo profesorius John Coates.

J. COATES: Man labai pavyko su Andrew. Dar būdamas doktorantu, jis pateikdavo labai gilių idėjų, su juo buvo labai smagu dirbti. Buvo aišku, kad jis matematikoje daug pasieks.

VEDĖJAS: Bet ne su Fermat. Visi buvo įsitikinę, kad įrodyti paskutinę Fermat teoremą neįmanoma, todėl profesorius Coates siūlė Andrew pamiršti vaikystės svajonę ir užsiimti kitomis, aktualesnėmis temomis.

A. WILES: Fermat teorema galima užsiiminėti metų metais, bet taip ir negauti jokio rezultato. Kadangi tuo metu mano vadovas J. Coates tyrė Iwasawa teoriją ir elipsines kreives, todėl pradėjau dirbti šioje srityje.

VEDĖJAS: Įdomu tai, kad elipsinės kreivės visiškai nepanašios į elipses.

B. MAZUR: Jums, ko gero, neteko girdėti apie elipsines kreives, bet jos yra labai svarbios.

J. CONWAY: Taigi kas yra elipsinės kreivės?

B. MAZUR: Elipsinės kreivės nėra elipsės. Tai kubinės kreivės, kurių grafikai panašūs į riestainius.

P. SARNAK: Jos atrodo labai paprastai, tačiau jas tirti labai sunku.

VEDĖJAS. Kiekvienas riestainio taškas tenkina tam tikrą lygtį. Andrew Wiles dabar studijavo elipsines lygtis, o savo svajonę atidėjo į šoną. Tuo metu jis dar nesuprato, kad kitoje elipsinių kreivių pasaulio pusėje jos ėjo visai šalia paskutinės Fermat teoremos.

G. SHIMURA: Aš įstojau į Tokijo universitetą 1949 metais. Nuo Antrojo pasaulinio karo pabaigos buvo praėję tik ketveri metai, beveik visi profesoriai atrodė pavargę, o paskaitos buvo neįdomios.

VEDĖJAS: Goro Shimura ir jo draugai studentai įkvėpimo turėjo ieškoti patys. Vienu artimiausiu Shimuros draugu ir bendražygiu tapo Utaka Taniyama.

GORO SHIMURA: Mano draugystė su Taniyama buvo labai artima. Kaip matematikas jis nebuvo labai tvarkingas. Nors darydavo daugybę klaidų, bet jas darydamas jis vis tiek ėjo teisinga kryptimi, todėl galų gale gaudavo teisingus atsakymus. Aš bandžiau jį pamėgdžioti, bet pamačiau, kad daryti „geras" klaidas yra labai sunku.

VEDĖJAS: Taniyama su Shimura užsiiminėjo sudėtinga matematika – modulinėmis funkcijomis.

N. KATZ: Aš tikrai negaliu vienu sakiniu paaiškinti, kas yra modulinės funkcijos. Nebent, jeigu leistumėte, keliais sakiniais.

P. SARNAK juokiasi.

N. KATZ: Bet aš tikrai negaliu vienu sakiniu!

P. SARNAK: Žinoma, tai neįmanoma.

A. WILES: Tvirtinama, kad Eichler yra pasakęs, jog yra penki pagrindiniai aritmetikos veiksmai: sudėtis, atimtis, daugyba, dalyba ir modulinės formos.

B. MAZUR: Modulinėmis formomis vadiname neįtikėtinai simetriškas kompleksinio kintamojo funkcijas. Jos turi tiek daug įvairių vidinių simetrijų, kad jau pats jų egzistaviamas yra stebuklas.

VEDĖJAS (rodydamas paveikslą): Paveikslas, kurį aš dabar jums rodau, yra tik blyškus modulinės formos šešėlis. Norint pamatyti tikslų jos vaizdą, jūsų TV ekraną reiktų iškreipti į vadinamąją hiperbolinę erdvę. Neatrodo, kad ekstravagantiškos modulinių formų erdvės turėtų ką nors bendra su abejingai spindinčiu elipsinių kreivių pasauliu. Bet tai, ką pasiūlė Taniyama su Shimura, sukrėtė visus.

G. SHIMURA: Tarptautiniame simpoziume, vykusiame 1995 metais, Taniyama iškėlė dvi ar tris problemas.

VEDĖJAS: Hipotezė, kurią suformulavo Taniyama, faktiškai reiškė, kad kiekviena elipsinė kreivė yra užsimaskavusi modulinė forma. Šis tvirtinimas nuo tol buvo žinomas kaip Taniyama–Shimura hipotezė.

J. CONWAY: Taniyama–Shimura hipotezė teigia, kad kiekviena racionali elipsinė kreivė yra moduli, bet šitai tikrai nelengva suprasti.

B. MAZUR: Taigi leiskite man pabandyti. Štai čia jūs turite elipsines kreives, tuos riestainius, o čia – modulinį pasaulį, tiksliau – modulines formas su daugybe, daugybe jų simetrijų. Shimura–Taniyama hipotezė nutiesia tiltą tarp šių pasaulių. Bet patys pasauliai priklauso skirtingoms planetoms.
Tiesą sakant, tai ne tik tiltas, tai žodynas, kuris vieno pasaulio klausimus, problemas ar teoremas pakeičia atitinkamais klausimais, problemomis ar teoremomis, bet suformuluotomis jau kito pasaulio kalba.

K. RIBET: Aš manau, kad iš pradžių visi gana kritiškai vertino Shimura–Taniyama hipotezę. Atvirai kalbant, aš dar ir matematikos tuomet nestudijavau. Bet 1969 ar 1970 metais, kai jau buvau magistrantas, žmonės pradėjo galvoti, kad gal ta hipotezė ir teisinga.

VEDĖJAS: Tolydžio Taniyama–Shimura hipoteze pradėta naudotis. Ja remiantis buvo netgi suformuluotos kitos teorijos. Bet tol, kol ji tebebuvo hipotezė, neįrodyta idėja, virš visų šių teorijų kabojo grėsmė.

A. WILES: Ši hipotezė pagimdė kitas hipotezes, kuriomis remiantis buvo įrodinėjamos teoremos, bet visa tai būtų virtę niekais, jeigu Taniyama–Shimura hipotezė pasirodytų neteisinga.

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

VEDĖJAS: Taigi hipotezės įrodymas tapo be galo svarbus, tačiau žmogus, kurio idėjos ją inspiravo, deja, nesulaukė jos triumfo. 1958 metais Taniyama nusižudė.

G. SHIMURA: Aš buvau labai sutrikęs. Šis žodis, ko gero, geriausiai aprašo mano būseną. Žinoma, man buvo skaudu, bet visa tai buvo taip staiga, aš tiesiog negalėjau suprasti, kodėl jis taip padarė.

VEDĖJAS: Taniyama–Shimura hipotezė tapo vienu didžiausių iššūkių matematikams. Tačiau kokį ryšį visa tai turi su paskutine Fermat teorema?

A. WILES: Tuo metu niekas negalvojo, kad Taniyama–Shimura hipotezė galėtų turėti ką nors bendra su Fermat. Bet aštuntajame dešimtmetyje viskas pasikeitė.

VEDĖJAS: Taniyama ir Shimura teigia, kad kiekviena elipsinė kreivė yra moduli, o Fermat sako, kad joks natūralusis skaičius netenkina šios lygties. Koks čia ryšys?

K. RIBET: Taniyama–Shimura hipotezė susijusi su elipsinėmis kreivėmis, bet Fermat teorema kalba apie visai kitus daiktus, jokio ryšio tarp Fermat ir elipsinių kreivių nėra. Taip buvo iki 1985 metų, kai Gerhard Frey sugalvojo kažką pritrenkiančio.

VEDĖJAS: Frey, vokiečių matematikas, iškėlė erezinį klausimą: o kas, jei Fermat neteisus, jei jo lygtis vis dėlto išsprendžiama?

P. SARNAK: Frey pademonstravo, kaip tarus, kad toks tariamas, fiktyvus Fermat lygties sprendinys egzistuoja, galima sukonstruoti elipsinę kreivę, turinčią labai keistų savybių.

K. RIBET: Ta elipsinė kreivė, atrodo, nėra moduli, tačiau Shimura su Taniyama tvirtina, kad kiekviena elipsinė kreivė yra moduli.

VEDĖJAS: Taigi, jei jei ši lygtis iš tikrųjų turi sprendinį, tai jį atitinka tokia elipsinė kreivė, kuri paneigia Taniyama–Shimura hipotezę.

K. RIBET: Kitaip tariant, jei Fermat klysta, tai klysta ir Shimura su Taniyama, arba – jei Shimura su Taniyama teisūs, tai teisinga ir paskutinė Fermat teorema.

VEDĖJAS: Fermat ir Taniyama bei Shimura dabar susieti. Teisybė, liko viena smulkmena.

K. RIBET: Frey neįrodė, kad jo elipsinė kreivė nėra moduli. Jis pateikė tik intuicija pagrįstus argumentus, o detales paliko specialistams. Ir tuomet specialistai ėmėsi darbo ...

VEDĖJAS: Teoriškai, norint įrodyti Fermat teiginį užtenka įrodyti Taniyama–Shimura hipotezę. Bet tik tuomet, jei Frey teisus. Frey idėja buvo pavadinta *epsilon* hipoteze ir visi stengėsi ją įrodyti. Po vienerių metų San Franciske įvyko didysis šuolis.

K. RIBET: Universiteto miestelyje aš pamačiau Barry Mazur ir pakviečiau išgerti kavos. Mes paėmėme po puodelį kapučino, aš pažvelgiau į Barry ir pasakiau, kad bandau apibendrinti savo darbus. Man atrodo, kad tuomet aš galėsiu griežtai įrodyti Serre *epsilon* hipotezę. Barry pažvelgė į mane ir pasakė: „*Well*, bet tu juk ją jau įrodei! Ką dar reikia padaryti – pridėti papildomą m struktūros gama nulį ir vėl pakartoti tavo argumentus.“ Aš buvau pritrenktas. Pažvelgiau į Barry, paskui į savo kapučino, paskui vėl į Barry ir pasakiau: „Viešpatie aukščiausias, juk tu absoliučiai teisus!“

B. MAZUR: Keno idėja buvo nuostabi.

A. WILES: Vieną vakarą aš gėriau arbatą su ledu pas draugą, kai jis staiga viduryje pokalbio tarė: „Beje, ar tu negirdėjai, kad Kenas įrodė *epsilon* hipotezę?“. Mane kaip elektra trenkė. Aš supratau, kad norint įrodyti paskutinę Fermat teoremą, beliko įrodyti Taniyama–Shimura hipotezę. Pajutau, kad man pats laikas eiti namo ir sėsti prie Taniyama–Shimura hipotezės.

• • • $\alpha + \omega$ • • •

VEDĖJAS: Andrew metė visus kitus savo darbus. Jis atsiribojo nuo viso likusio pasaulio ir kitus septynis metus paskyrė savo vaikystės svajonei.

A. WILES: Aš niekuomet nesinaudoju kompiuteriu. Jei mano galvoje atsiranda kokia idėja, pradedu kažką paišyti ar braižyti kaip višta. Kartais norint paaiškinti kokį nors mažą matematikos fragmentą, tenka skaičiuoti. Aišku, visa tai turi rasti savo vietą plačiame matematikos kontekste, todėl kartais tenka vieno ar kito daikto ieškoti knygose, išsiaiškinti, kaip kiti žmonės sprendė panašias problemas. Kartais jų įrodymus reikia kiek pakeisti, atlikti papildomus skaičiavimus, tačiau būna ir taip, kad niekur nerandi to, ko reikia, turi pats sugalvoti kažką visai naujo, ir tai didelė paslaptis, iš kur tos naujos idėjos atsiranda.

J. COATES: Norėčiau prisipažinti, kad aš netikėjau, jog Taniyama–Shimura hipotezė bus įrodyta artimiausiu metu. Aš nemaniau, kad man kada nors teks pamatyti jos įrodymą.

K. RIBET: Aš buvau vienas iš daugelio, maniusių, kad šiandien dar nėra metodų, kuriais remiantis būtų galima įrodyti Taniyama–Shimura hipotezę. Aš nesistengiau jos įrodyti, netgi nesiruošiau bandyti. Andrew Wiles, ko gero, buvo vienas iš kelių žmonių Žemėje, kuriems pakako narsos manyti, kad šią hipotezę apskritai galima įrodyti.

A. WILES: Iš tiesų šiuo atveju kelis pirmuosius metus aš galėjau nebijoti konkurencijos. Nemaniau, kad aš ar kas nors kitas galėtų turėti kokią realią idėją, nuo ko reiktų pradėti. Be to, aš greitai supratau, kad kalbėtis su žmonėmis apie Fermat problemą neverta, nes tai sukelia per didelį susidomėjimą ir tuomet nebeįmanoma susikaupti. Buvo aišku, kad darbas truks metų metus, ir per didelis skaičius stebėtojų viską sugadins.

VEDĖJAS: Andrew nutarė dirbti vienumoje ir paslaptyje.

P. SARNAK: Man dažnai būdavo įdomu, kuo gi jis galų gale užsiima.

N. KATZ: Neturėjau nė menkiausio supratimo.

J. CONWAY: Ne, aš nieko neįtariau.

K. RIBET: Tai, ko gero, vienintelis man žinomas atvejis, kai matematikas dirbo taip ilgai, neatskleisdamas savo darbo turinio, su niekuo nesikalbėdamas nei apie problemas, nei apie progresą. Tai tiesiog beprecedentinė istorija.

VEDĖJAS: Andrew išplaukė į vieną komplikuočiausių matematikos istorijoje ekspedicijų. Tiesą sakant, pirmuosius dvejus metus jis „nieko nedarė“, jis tik bandė panirti į šią problemą, rasti strategiją, kuri ateityje galėtų atvesti į sėkmę.

A. WILES: Taigi buvo žinoma, kad iš Taniyama–Shimura hipotezės išplaukia paskutinė Fermat teorema. Ką teigia Taniyama-Shimura? Kad visos elipsinės kreivės turi būti modulinės. Tai buvo sena problema, jau kokį 20 metų žmonės bandė ją spręsti.

K. RIBET: Į šią problemą galima pažvelgti ir taip: štai čia — visos elipsinės kreivės, o čia — visos modulinės elipsinės kreivės; mes norime įrodyti, kad abiejose klasėse jų yra tiek pat. Kadangi kalbame apie begalines aibes, tai tiesiogiai suskaičiuoti nepavyks, bet galime pabandyti suskaidyti jas į paketus ir pabandyti rasti kreivių kiekviename pakete skaičių ir t.t. Kokį 30 sekundžių ši idėja atrodo patraukli, bet paskui supranti, kad žingsniai „ir t.t.“ yra visai neaiškūs. Pagrindinė problema vis dėlto yra klausimas *kaip skaičiuoti* ir Wiles didžiausias nuopelnas yra tas, kad jis sugalvojo teisingą skaičiavimo metodiką.

VEDĖJAS: Andrew pasiūlė elipsines kreives transformuoti į vadinamasias Galois reprezentacijas, ir tai palengvino skaičiavimą. Dabar modulines formas reikėjo lyginti ne su elipsinėmis kreivėmis, o su Galois reprezentacijomis.

A. WILES: Jūs natūraliai galite manęs paklausti, kodėl negalima to padaryti su elipsinėmis kreivėmis ir modulinėmis formomis, kodėl negalima suskaičiuoti elipsinių kreivių, po to modulinių formų ir parodyti, kad jų yra tiek pat. Atsakymas yra toks: žmonės daug kartų bandė, bet jiems nė karto nepavyko rasti tinkamo skaičiavimo būdo. Man labai pasisekė, kad aš sugalvojau palyginti ne pradines klases, bet modulines formas ir Galois reprezentacijas.

VEDĖJAS: Tai buvo tik pirmas žingsnis, bet jis truko trejus metus.

A. WILES: Su savo būsimąja žmona aš susipažinau tuomet, kai jau sprendžiau Fermat problemą. Aš jai pasakiau apie tai praėjus keletui dienų po mūsų vestuvių. Supratau, kad laiko turėsiu tik savo problemai ir savo šeimai. Pasirodė, kad geriausias būdas atsipalaiduoti po didelės įtampos yra pabendrauti su mažais vaikais. Kai tu kalbiesi su mažais vaikais, jiems nerūpi Fermat problema, bent jau tokio amžiaus, jie nori išgirsti kokią nors pasaką ir jie tiesiog neleidžia tau galvoti dar apie ką nors kita.
Taigi aš atradau nuostabų skaičiavimo mechanizmą ir dabar apie šią konkrečią problemą pradėjau galvoti Iwasava teorijos terminais. Šią teoriją aš nagrinėjau būdamas magistrantūroje, kartu su savo vadovu John Coates, taikiau ją, nagrinėdamas elipsines kreives.

VEDĖJAS: Andrew tikėjosi, kad Iwasava teorija leis jam iki galo realizuoti savo skaičiavimo planą.

A. WILES: Aš pabandžiau remtis Iwasava teorija, bet greitai atsirado keblumų. Atrodė, kad stoviu prieš nepramušamą sieną. Nesimatė jokio kelio aplink. Tokiais atvejais aš dažnai eidavau pasivaikščioti prie ežero. Pasivaikščiojimai yra geri tuo, kad tu atsipalaiduoji, pradeda dirbti ne tik sąmonė, bet ir pasąmonė.

VEDĖJAS: Andrew tikėjosi, kad Iwasava teorija padės užrašyti vadinamąją klasių skaičiaus formulę, bet po kelių mėnesių tapo aišku, kad niekas neaišku.

A. WILES: 1991 metų vasaros pabaigoje aš dalyvavau konferencijoje. John Coates papasakojo man apie puikų jo studento Matthias Flacho darbą, kuriame pastarasis nagrinėjo klasių skaičiaus formulę, faktiškai tą, kurios man ir reikėjo. Remdamasis Kolyvagino idėjomis, Flach padarė labai reikšmingą pirmą žingsnį. Tuo metu aš labai apsidžiaugiau, net pagalvojau, kad beveik turiu gatavą formulę. Atidėjęs į šalį savo pradinį variantą, aš dieną ir naktį bandžiau praplėsti jo rezultatą.

VEDĖJAS: Andrew buvo arti tikslo, bet jo technika buvo rizikinga ir komplikuota. Po šešių paslaptingumo metų jis norėjo su kuo nors savo rezultatus aptarti.

N. KATZ: Kita priežastis, dėl kurios jis kreipėsi būtent į mane, buvo ta, kad jis žinojo, jog aš neišplepėsiu jo paslapčių kitiems. Ir aš neišplepėjau!

J. CONWAY: Andrew Wiles ir Nick Katz gana daug laiko praleisdavo tolimajame bendrojo kambario gale, užsikniaubę ant kavos staliuko ir svarstydami vieną ar kitą problemą. Mes niekuomet nežinojome, ką jie ten veikia.

VEDĖJAS: Nenorėdamas sukelti daugiau įtarimų, Andrew nutarė patikrinti savo įrodymą, užmaskavęs jį kaip paskaitų ciklą, kurį galėtų lankyti ir Nick.

A. WILES: Taigi paskaitų pradžioje pasakiau, kad Flach parašė puikų straipsnį, o aš noriu apibendrinti jį ir užrašyti pilnąją klasių skaičiaus formulę. Vienintelis dalykas, kurio aš nesakiau, buvo tai, kad ši formulė beveik ekvivalenti paskutinei Fermat teoremai.

N. KATZ: Kurso pavadinimą „Elipsinių kreivių analizė“ galėjai suprasti kaip nori. Jame niekur nebuvo minimas nei Fermat nei Taniyjama su Shimura. Niekas negalėjo atspėti, koks jo tikslas. To nežinojo ir niekas iš magistrantų, todėl po kelių savaičių jie visi pabėgo, kadangi neįmanoma domėtis daiktu, kuris yra neaišku kam. Gilintis į šią temą būtų sunku, netgi žinant jos tikslą, todėl nenuostabu, kad po kelių savaičių aš likau vienintelis klausytojas.

VEDĖJAS: Atrodė, kad įrodymuose klaidų nėra, tačiau niekas iš Andrew kolegų taip ir nesuprato jo paslaptingumo priežasčių.

P. SARNAK: Gal jo idėjos išsisėmė. Gal todėl jis toks ramus, nors niekada nesuprasi, kodėl jie tokie ramūs.

VEDĖJAS: Įrodymui dar trūko labai svarbios grandies, bet Andrew jau pasitikėjo savimi. Dabar reikėjo pasikalbėti dar su vienu žmogumi.

A. WILES: Aš paskambinau Peteriui ir paklausiau, ar jis negalėtų kada nors užeiti pas mane ir pasikalbėti apie šį bei tą.

P. SARNAK: Andrew telefonu man pasakė, kad norėtų pašnekėti su manimi viena labai rimta tema. Tiesą sakant, jis turėjo tikrai pritrenkiančių naujienų.

A. WILES: Aš jam pasakiau: „Manau, kad tau būtų geriau atsisėsti". Jis atsisėdo, ir aš tuomet pasakiau, kad, ko gero, greitai įrodysiu paskutinę Fermat teoremą.

P. SARNAK: Aš buvau priblokštas, sujaudintas ir išmuštas iš pusiausvyros. Gerai atsimenu, kad tą naktį sunkiai užmigau.

A. WILES: Bet aš vis dar turėjau problemų. Vėlyvą 1993 metų pavasarį buvau patekęs į gana keblią padėtį: maniau, kad jau moku įrodyti, jog dauguma elipsinių kreivių yra modulinės (ir to būtų užtekę įrodyti Fermat teoremą), bet dar buvo kelios elipsinių kreivių šeimos, kurios vis pasprukdavo iš mano tinklo. 1993-ųjų gegužę aš sėdėjau štai čia, prie savo stalo, o mano žvilgsnis klaidžiojo po Barry Mazuro straipsnį. Staiga, pamatęs sakinį, kur buvo cituojama viena XIX amžiaus konstrukcija, staiga supratau, kad tai ir yra man reikalingas triukas. Aš nagrinėjau elipsines kreives naudodamasis pirminiu skaičiumi 3, bet, pasirodo, galėjau jas tirti su pirminiu skaičiumi 5. Toks būdas buvo labiau komplikuotas, bet dabar galėjau pereiti nuo tų sunkiai įveikiamų kreivių prie kitų, su kuriomis jau mokėjau dirbti. Surašyti visas detales reikėjo nemažai laiko. Laikas bėgo, aš visai užmiršau apie pietus. Kai nulipau žemyn, Nada labai nustebo, kad aš toks vėlyvas. Tuomet jai pasakiau, kad manau įrodęs paskutinę Fermat teoremą.

Aš buvau tikras, kad laikau Fermat savo rankose. Tuo metu Kembridže vyko konferencija, kurią organizavo buvęs mano vadovas John Coates. Aš pagalvojau, kad tai būtų gera proga, tai paskelbti. Tai mano gimtasis miestas, aš ten buvau magistrantūroje, žodžiu, nuostabi vieta padaryti pranešimą. Žinoma, jei spėčiau viską tvarkingai surašyti.

J. COATES: Savo paskaitas jis pavadino „Elipsinės kreivės ir modulinės formos". Ne pusės žodžio apie Fermat teoremą.

K. RIBET: Aš dalyvavau šioje konferencijoje. Ji skirta L funkcijoms ir elipsinėms kreivėms. Tai buvo eilinė konferencija, dalyvavo visi savi žmonės. Neatrodė, kad turėtų įvykti kažkas nepaprasto, tačiau pradėjo sklisti paslaptingi gandai, kad Andrew Wiles praneš kažką sensacingo.

Aš pradėjau kalbėtis su kitais žmonėmis, informacija darėsi vis tikslesnė. Neturiu nė menkiausio supratimo, kas visa tai paskleidė.

P. SARNAK:. Tikrai aš, tik ne aš.

J. CONWAY: Manau, kad Peteris atsakydavo maždaug taip: „Aš nieko nežinau, palaukite kiek, tuoj bus didžiulė naujiena, greitai išgirsite kažką sensacingo".

P. SARNAK: Na, gal buvo kokios užuominos, gal.

A. WILES: Visi manęs klausinėjo, apie ką vis dėlto bus mano paskaitos. Aš atsakydavau: „Ateikite į jas ir sužinosite".

K. RIBET: Atmosfera buvo įelektrinta, salėje buvo daug aritmetinės ir algebrinės geometrijos šulų – Richard Taylor ir John Coates, Barry Mazur.

B. MAZUR: Man niekuomet neteko klausyti tokio paskaitų ciklo. Tai buvo kažkas unikalaus – nuostabios idėjos, begalė naujų idėjų, kiekvieną minutę įtampa augo.

K. RIBET: Buvo aišku, kad mes artėjame prie Fermat problemos sprendimo, tebuvo vienintelis būdas iškrauti susidariusią įtampą.

A. WILES: Po to, kai paaiškinau perėjimo nuo 3 prie 5 galimybę, aš tiesiog užrašiau paskutinės Fermat teoremos formuluotę, pasakiau, kad ją įrodžiau ir gal čia ir sustosiu.

J. COATES: Kitą dieną visai netikėtai mus užplūdo žurnalistai iš viso pasaulio, gavome daugybę prašymų iš laikraščių pakomentuoti tai, kas įvyko.

A. WILES: Tai buvo nuostabus jausmas. Po septynerių metų darbo aš galų gale nugalėjau. Tik vėliau išaiškėjo, kad dar liko viena problema, pačiame gale.

N. KATZ: Dabar atėjo laikas pateikti šį darbą referentui, t.y. redakcijos parinktam žmogui, kuris turėjo viską kruopščiai išnagrinėti ir įsitikinti, kad klaidų nėra.
Du mėnesius – liepą ir rugpjūtį aš nieko daugiau neveikiau, tik eilutė po eilutės stūmiausi pirmyn. Konkrečiai kalbant, aš kasdien, o kartais ir du kartus per dieną, siųsdavau elektroninio pašto laiškus Andrew su tipišku klausimu: aš nesuprantu, ką tu tvirtini tokiame ir tokiame puslapyje, tokioje ir tokioje eilutėje. Tai arba klaidinga, arba aš tiesiog nesuprantu.

A. WILES: Taigi Nick siųsdavo man elektroninio pašto laiškus ir vasaros pabaigoje aš gavau dar vieną, iš pirmo žvilgsnio visai nekaltą.

N. KATZ: Jo atsakymas buvo gana sudėtingas, todėl Andrew atsiuntė man faksą. Manęs jo atsakymas netenkino, todėl nusiunčiau jam dar vieną laišką, į kurį jis vėl atsakė faksu, kuris manęs taip pat netenkino. Galų gale išaiškėjo, kad jo įrodyme yra klaida, principinė klaida, kurios pavasarį paskaitų metu mes nepastebėjome.

A. WILES: Problemą sukėlė mano apibendrintas Flacho ir Kolyvagino metodas. Aš tai supratau rugsėjo pabaigoje, o po to visą rudenį bandžiau savo konstrukciją modifikuoti. Tai atlikti buvo galima daugeliu būdų, ir atrodė, kad bet kuris iš jų tiks.

P. SARNAK: Tačiau kiekvieną kartą, kai tik Andrew pataisydavo vieną kampą, problemos atsirasdavo kitame.

N. KATZ: Išoriškai jis atrodė ramus, bet aš manau, kad dabar, kai visi žinojo jo problemas, jis turėjo jaustis gana nejaukiai.

J. CONWAY: Mūsų elgesys buvo panašus į Kremliaus specialistų elgesį. Niekam nesinorėjo prieiti prie jo ir paklausti, kaip sekasi, todėl paprastai kas nors sakydavo, matęs jį šiandien ryte. Na ir kaip, jis šypsojosi? Taip, bet, tiesą sakant, jis neatrodė labai laimingas ...

A. WILES: Kiekvieną pirmųjų septynerių metų minutę aš buvau laimingas. Dažnai būdavo sunku, man ne visuomet sekdavosi, kartais sunkumai atrodydavo neįveikiami, bet tai buvo mano vieno asmeninė kova.
Tačiau dabar, kai atsirado problema, matematikos darymas stiklinėje vitrinoje man visai neteikė džiaugsmo. Tikrai nenorėčiau vėl būti tokioje padėtyje.

VEDĖJAS: Kiti matematikai, įskaitant jo buvusį studentą Richard Taylor, bandė padėti jam ištaisyti klaidą. Tačiau po tuščių metų Andrew jau ruošėsi pasiduoti.

••• $\alpha + \omega$ •••

A. WILES: Rugsėjį aš nutariau vėl grįžti prie pradinės Flacho ir Kolyvagino struktūros ir dar kartą pabandyti išsiaiškinti, kas gi man kliūna. Tikslai suformuluoti. Matematikoje tai retai pavyksta, bet aš norėjau įsitikinti, kad to padaryti neįmanoma, o po to apsiraminti. Aš sėdėjau štai čia, prie šito stalo. Buvo pirmadienio rytas, rugsėjo 19-oji diena, ir aš norėjau tiksliai išsiaiškinti, kas man trukdo įveikti šią problemą. Staiga visai netikėtai man nušvito protas. Aš supratau, kad reikia grįžti prie Iwasava teorijos, kurios aš atsisakiau prieš trejus metus. Tai buvo pats reikšmingiausias mano gyvenimo momentas! Tai buvo neapsakomai graži idėja, paprasta ir elegantiška. Netikėdamas aš tiesiog spoksojau kokias dvidešimt minučių. Po to kiaurą dieną vaikščiojau po fakultetą, vis grįždamas prie savo stalo ir žiūrėdamas, ar sprendimas vis dar ten. Jis buvo ten. Tai, kas stabdė Flacho ir Kolyvagino metodą, leido suktis Iwasava teorijai, taigi tiesiog iš pelenų pakilo teisingas problemos sprendimas. Aš nuėjau gulti apsikabinęs savo idėją. Kitą rytą aš tikrinau ją dar ir dar kartą, 11 valandą aš įsitikinau, kad neklystu, nulipau žemyn ir pasakiau savo žmonai, kad aš turiu jį, aš manau, kad aš turiu jį, aš radau jį. Tai buvo taip netikėta, manau, kad ji pagalvojo, jog aš kalbu apie vaiko žaislą ar kažką tokio. Ji paklausė – ką tu radai? Pasakiau, kad pataisiau įrodymą, aš jį galų gale turiu!

J. COATES: Aš manau, kad Andrew darbas visuomet liks vienu iš didžiausių skaičių teorijos laimėjimų.

B. MAZUR: Tai milžiniškas pasiekimas.

J. CONWAY: Ne kiekvieną dieną girdime apie šimtmečio problemos sprendimą.

G. SHIMURA: Mano pirmoji reakcija buvo: „O ar aš nesakiau?“

VEDĖJAS: Paskutinę Fermat teoremą Andrew išvedė iš Taniyama–Shimuros hipotezės, kuri, priminsiu, jau nebe hipotezė. Bet ar jo įrodymas sutampa su tuo, kurį žinojo Ferma?

A. WILES: Fermat tikriausiai šio įrodymo nežinojo. Tai XX amžiaus įrodymas. Be jokios abejonės, įrodyti tokiu būdu iki XX amžiaus buvo neįmanoma.

J. CONWAY: Dabar, kai Fermat teorema įrodyta, aš jaučiu palengvėjimą. Kartu man liūdna, kadangi mes tiek skolingi šiai teoremai. Kažin ar rasime kuo užpildyti šią tuštumą.

A. WILES: Nežinau kito uždavinio, kuris man reikštų tiek pat. Manau, kad man labai pavyko: retas žmogus gali savo gyvenimą skirti vaikystės svajonei įgyvendinti. Aš žinau, kad tai reta privilegija, bet jei kam tai pavyksta, nežinau ar gali būti kas geresnio.

B. MAZUR: Iš esmės tai kolektyvinis darbas. Štai nepilnas autorių sąrašas: Klein, Fricke, Hurwitz, Hecke, Dirichlet, Dedekind...

K. RIBET: Laglandso ir Tunnellio įrodymai...

J. COATES: Deligne, Rapoport, Katz...

N. KATZ: Mazuro idėja panaudoti Galois reprezentacijų deformacijų teoriją ...

B. MAZUR: Igusa, Eichler, Shimura, Taniyama ...

P. SARNACK: Frey redukcija ...

N. KATZ: Sąrašą reiktų tęsti ir tęsti ...

B. MAZUR: Bloch, Kato, Selmer, Frey, Fermat.