Vilius Stakėnas

Tariamieji begaliniai nusileidimai

Įrodymai kaip laiptai

Matematinis įrodymas (uždavinio sprendimas, tyrinėjimas ...) – tai loginių samprotavimų grandinėlė, tarsi kopimas laipteliais, pastatytais ant patikimos atramos. Jeigu atrama tikrai patikima, sustojama tuomet, kai pasiekiamas reikalingas (kartais nelauktas, tiesiog įdomus) rezultatas. Tačiau kartais, kai atrama abejotina, užkopus būtina nusileisti (bent jau mintyse) – tik tada sukonstruota loginių samprotavimų grandinėlė pripažįstama nepriekaištingu įrodymu. Štai vienas paprastas pavyzdys.

- *Stačiojo trikampio statinių ilgiai yra a ir b, aukštinė, nuleista į įžambinę c, lygi h. Įrodykite, kad $c+h > a+b$.*

Sprendimas gali būti toks. Dviem būdais suskaičiavę trikampio plotą, gausime $ch = ab$ arba $h = ab/c$. Nelygybę $c+h > a+b$ užrašę

$$c + \frac{ab}{c} > a + b, \quad c + \frac{ab}{c} - (a+b) > 0$$

ir padauginę iš c, gausime

$$c^2 - c(a+b) + ab > 0, \quad (c-a)(c-b) > 0.$$

Paskutinė nelygybė akivaizdžiai teisinga, nes $c > a$ ir $c > b$.

Kodėl šiuos samprotavimus turėtume pripažinti kaip teisingą nelygybės $c+h > a+b$ įrodymą? Pradėję nuo teiginio, kurio teisingumu nebuvome įsitikinę, gavome neabejotinai teisingą tvirtinimą. Tačiau visi žino, kad ir iš klaidingų prielaidų galima gauti teisingas išvadas. Kažkada, pavyzdžiui, šilumos reiškiniai buvo aiškinami ypatingo šiluminio skysčio – kaloriko buvimu. Remiantis šiuo aiškinimu, buvo atrasta ir teisingų šilumos reiškinių dėsnių.

Nors ir žinodami tai, vis tiek pripažįstame šiuos samprotavimus kaip teisingą įrodymą, nes mums yra aišku, kad tuo keliu, kuriuo „atėjome“, galime ir „grįžti“, t.y. pradėję nuo akivaizdžios nelygybės $(c-a)(c-b) > 0$ galime gauti $c+h > a+b$. Šiuo atveju įrodymas susideda iš teisingų samprotavimų grandinėlės, jungiančios teisingus teiginius.

Tačiau matematinio griežtumo šalininkus galime įtikinti ir kitaip. Padarę prielaidą $c+h \leqslant a+b$, gautume išvadą $(c-a)(c-b) \leqslant 0$, kuri akivaizdžiai klaidinga. Vadinasi, klaidinga ir prielaida, o įrodymą sudaro teisingais samprotavimais sujungtų klaidingų teiginių grandinėlė![1] Taigi matematinis įrodymas gali būti sukurtas sukonstravus „laiptus", kurie veda tiek prie teisingo, tiek prie klaidingo teiginio.

Fermat begalinio nusileidimo metodas

Pierre de Fermat labai didžiavosi sugalvojęs dar vienos rūšies „loginius laiptus", kuriais galima pasiekti matematinę tiesą. Savo metodą jis pavadino **begalinio (arba neapibrėžto) nusileidimo** metodu. Paaiškinsime jį pavyzdžiu.

Pradėsime nuo teiginio, apie kurio teisingumą (tarkime!) nieko nežinome. Tas teiginys toks:

- *egzistuoja du bendrų pirminių daliklių neturintys natūralieji skaičiai u ir v, iš kurių bent vienas nėra kvadratas, tačiau sandauga uv yra natūraliojo skaičiaus kvadratas: $uv = w^2$.*

Tegu u nėra kvadratas, tada $u \neq 1$. Atsiras pirminis p, kuris dalija u. Tuomet jis turi dalyti ir w. Kadangi p^2 dalija uv, ir, kadangi u, v neturi bendrų pirminių daliklių, tai p^2 dalija u. Padaliję lygybę $uv = w^2$ iš p^2, gausime

$$\frac{u}{p^2} \cdot v = \left(\frac{w}{p}\right)^2, \quad u_1 v_1 = w_1^2;$$

čia $1 < u_1 = u/p^2 < u$, $v_1 = v$, $w_1 = w/p$. Aišku, kad u_1 ir v_1 yra tarpusavyje pirminiai natūralieji skaičiai. Taigi pradėję nuo teiginio, kad egzistuoja tarpusavyje pirminiai skaičiai u, v, iš kurių nors vienas nėra pilnas kvadratas, tačiau sandauga yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, gavome, jog egzistuoja kita pora u_1, v_1, turinti tą pačią savybę, tačiau vienas antrosios poros skaičius mažesnis už atitinkamą pirmosios poros skaičių. Samprotavimą galima pakartoti dabar jau su skaičiais u_1, v_1, w_1, gauti naujus skaičius ir taip toliau. Keisis tik dydžių indeksai, tačiau jokiame žingsnyje negalėsime su palengvėjimu atsidusti gavę neabejotinai teisingą ar klaidingą teiginį.

Tačiau prielaida garantuoja, kad šito proceso eigoje galima gauti begalinę mažėjančių natūraliųjų skaičių seką

$$1 < \ldots < u_3 < u_2 < u_1 < u.$$

Tai prieštarauja mūsų žinioms apie natūraliuosius skaičius. Kas gi kaltas, kad logiškai teisingai protaudami priėjome prieštarą? Tenka dėl to apkaltinti prielaidą. Taigi dabar teiginį galima suformuluoti teigimo forma:

- *dviejų natūraliųjų skaičių, neturinčių bendrų pirminių daliklių, sandauga yra kvadratas tada ir tik tada, kai abu skaičiai yra kvadratai.*

[1] Tai įrodymas prieštaros būdu, arba *reductio ad absurdum*.

Žinoma, tokį samprotavimą galima laikyti *reductio ad absurdum* metodo atveju. Būdingas bruožas tas, kad pradinis teiginys visais atvejais „supriešinamas" su vis tuo pačiu teiginiu: negalima sudaryti begalinės mažėjančios natūraliųjų skaičių sekos.

Tiesos dėlei reikia pasakyti, kad panašiai buvo samprotajama ir anksčiau. XIII amžiaus matematikas Campanus iš Novaros, vienas iš pirmųjų Euklido vertėjų į lotynų kalbą šitaip įrodinėjo, kad aukso pjūvio skaičius φ negali būti užrašomas trupmena, t.y. yra iracionalusis.

Aukso pjūvio skaičius apibrėžiamas lygybe

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

Jei atsirastų du natūralieji skaičiai $x_2 < x_1 < 2x_2$, kad $\varphi = x_1/x_2$, tai būtų

$$\frac{x_1}{x_2} = 1 + \frac{x_2}{x_1}.$$

Šią lygybę pertvarkome taip:

$$\frac{x_1}{x_2} - 1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 = x_1 - x_2, \quad 0 < x_3 < x_2 < 2x_3.$$

Vadinasi, jei $\varphi = x_1/x_2$, $0 < x_2 < x_1$, tai $\varphi = x_2/x_3$, $0 < x_3 < x_2 < 2x_3$. Tęsdami procesą gautume begalinę natūraliųjų skaičių seką $0 < \ldots < x_n < \ldots < x_1$. Tai neįmanoma, taigi φ negali būti racionalusis skaičius.

Paskutinė Fermat teorema, kai n = 4

Turbūt šiuo atveju teoremos įrodymą žinojo pats Fermat. Tačiau jis neskelbdavo įrodymų – vien teiginius. Šio atvejo įrodymą naudodamasis begalinio nusileidimo metodu užrašė ir paskelbė L. Euler.

Akivaizdu, kad pakanka nagrinėti lygties

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{1}$$

sprendinius, neturinčius bendrų pirminių daliklių. Pavyzdžiui, jei x ir y dalijasi iš to paties pirminio p, tai ir z dalijasi iš p. Tada lygtį galima suprastinti iš p^4.

Įrodymo išeities taškas – Pitagoro skaičių trejeto formulė. Skaičių trejetas (a, b, c) vadinamas primityviuoju Pitagoro trejetu, jei skaičiai neturi bendrų pirminių daliklių ir tenkina lygybę $a^2 + b^2 = c^2$. Yra žinoma,[2] kad visi primityvieji Pitagoro trejetai gali būti užrašomi taip:

$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq, \quad c = p^2 + q^2;$$

[2] Žr., pavyzdžiui, H. Markšaitis. Neapibrėžtinės lygtys, *Alfa plius Omega*, 1996, 1, 7–17.

čia $0 < q < p$ sveikieji skaičiai, neturintys bendrų pirminių daliklių; be to, jie yra skirtingo lyginumo (vienas lyginis, kitas nelyginis).

Iš (1) matome, kad (x^2, y^2, z^2) yra primityvusis Pitagoro trejetas. Vadinasi, atsiras sveikieji skirtingo lyginumo skaičiai $0 < q < p$, kad

$$x^2 = p^2 - q^2, \quad y^2 = 2pq, \quad z^2 = p^2 + q^2.$$

Tačiau iš $x^2 + q^2 = p^2$ matome, kad (x, q, p) taip pat yra primityvusis Pitagoro trejetas, todėl atsiras skirtingo lyginumo, neturintys bendrų pirminių daliklių skaičiai $0 < b < a$, kad

$$x = a^2 - b^2, \quad q = 2ab, \quad p = a^2 + b^2.$$

Tada $y^2 = 2pq = 4ab(a^2 + b^2)$. Sandauga $ab(a^2 + b^2)$ turi būti pilnas kvadratas, tačiau a, b ir $a^2 + b^2$ neturi bendrų pirminių daliklių. Taigi visi trys skaičiai patys turi būti pilni kvadratai:

$$a = x_1^2, \quad b = y_1^2, \quad a^2 + b^2 = u_1^2 = x_1^4 + y_1^4.$$

Dabar gautą rezultatą sugretinkime su pradine prielaida. Tarę, kad egzistuoja natūralieji skaičiai x, y, z ir

$$x^4 + y^4 = z^4 \quad \text{arba} \quad x^4 + y^4 = u^2 \ (u = z^2),$$

gavome, kad egzistuoja tokie natūralieji skaičiai x_1, y_1, u_1, kad $x_1^4 + y_1^4 = u_1^2$. Skaičius u_1 ir u galime palyginti šitaip:

$$1 < u_1^2 = a^2 + b^2 = p < p^2 + q^2 = z^2 = u < u^2.$$

Taigi $1 < u_1 < u$. Tačiau tai jau yra begalinio nusileidimo pradžia! Galime pakartoti samprotavimą su (x_1^2, y_1^2, u_1) vietoje $(x^2, y^2, z^2) = (x^2, y^2, u)$ ir gauti teiginį, jog egzistuoja natūralieji x_2, y_2, u_2, kad $x_2^4 + y_2^4 = u_2^2, u_2 < u_1$.

Svarbusis mažiausiųjų elementų vaidmuo

Begalinio nusileidimo pamatinis teiginys: negalima sudaryti begalinės mažėjančių natūraliųjų skaičių sekos. Galima suformuluoti jam ekvivalentų teiginį: kiekvienoje natūraliųjų skaičių aibėje yra ir pats mažiausias jos elementas. Ši savybė atrodo mums akivaizdi, tačiau vos žengę žingsnelį už natūraliųjų skaičių srities ribų, pamatysime, kad ji jau nebėra teisinga. Išties lyginių sveikųjų skaičių aibė neturi mažiausio elemento; racionaliųjų (ar realiųjų) intervalo $(1, 2)$ skaičių mažiausias elementas galėtų būti tik 1, tačiau jis jau yra už aibės ribų.

Galime kelti klausimą, ar įmanoma pakeisti, tarkime, racionaliųjų skaičių sutvarkymo (lyginimo) kriterijų, kad pagal naująją tvarką racionalieji skaičiai turėtų tą pačią savybę kaip ir natūralieji – kiekviena aibė turėtų ir mažiausiąjį elementą. Juk ir gyvenime tvarkydami, rikiuodami į eiles taikome įvairius kriterijus. Ūgiu didžiausias moksleivis gali būti mažiausias pagal matematikos pažymius ir pan.

Štai tokias teigiamų racionaliųjų skaičių sutvarkymo taisykles pasiūlė Georgas Cantoras.

Tegu s/t ir u/v yra du racionalieji skaičiai, užrašyti nesuprastinamomis trupmenomis. Jei $s+t < u+v$, tai sakysime, kad s/t yra „mažesnis" už u/v. Rašysime $s/t \, <_{\circ} \, u/v$. Jei $s+t = u+v$, tai rašysime $s/t \, <_{\circ} \, u/v$ tada ir tik tada, kai $s/t < u/v$, t.y. tokiu atveju naujasis sutvarkymas sutampa su senuoju.

Pagalvokite ir įsitikinkite, kad taikant naująjį tvarkos kriterijų $<_{\circ}$ bet kokioje teigiamų racionaliųjų skaičių aibėje galima rasti mažiausiąjį elementą.

Ar tik racionaliuosius skaičius galima taip sutvarkyti, kad kiekvienoje aibėje atsirastų ir pats mažiausias elementas? Galbūt tokią tvarką galima įvesti bet kokioje aibėje?

Verčiau nutylėsime atsakymą. Nedera per daug lengvai atsakyti į klausimą apie pačius matematikos pagrindus.

Tvarka gali būti labai keista.

••• $\alpha+\omega$ •••