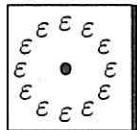


Uždaviniai



• • • ○ • • •

Šiame skyrelyje – tarptautinio matematikos konkurso KENGŪRA 1999 metų uždavinių rinkinys 7 ir 8 klasų moksleiviams. Konkurso dalyviams reikėjo nurodyti, kuris iš pateiktųjų atsakymų teisingas. Už uždavinius $\varepsilon.22 - \varepsilon.31$ buvo skiriama po 3, už $\varepsilon.32 - \varepsilon.41$ – po 4 ir $\varepsilon.42 - \varepsilon.52$ – po 5 taškus.

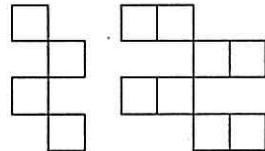
• • • ○ • • •

$\varepsilon.22$

◊ ◊ ◊

Pirmos figūros perimetras lygus 16 cm. Koks yra antros figūros perimetras?

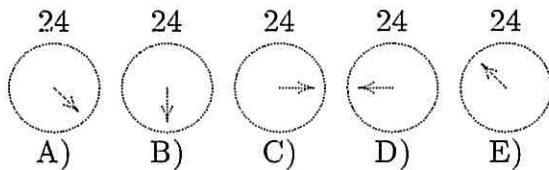
- A) 8 cm B) 16 cm C) 18 cm D) 24 cm E) 32 cm



$\varepsilon.23$

◊ ◊ ◊

„Kengūriško“ laikrodžio ciferblatas padalytas į 24 dalis, o ne į 12, kaip įprasta. Todėl trumpojoji (t. y. valandinė) rodyklė per parą padaro tik vieną pilną apsisukimą. Kokia padėtį trumpojoji rodyklė užima „kengūriško“ laikrodžio ciferblate 6 valandą po pietų?



$\varepsilon.24$

◊ ◊ ◊

Jonas pirko tam tikrą kiekį šratinukų ir tam tikrą kiekį pieštukų. Kiekvienas šratinukas kainavo 90 centų, o kiekvienas pieštukas – 40 centų. Iš viso jis sumokėjo 3 litus ir 50 centų. Kiek pieštukų pirko Jonas?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

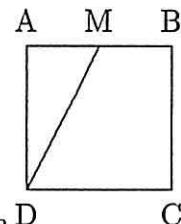
• • • $\alpha + \omega$ • • •

$\varepsilon.25$

◊◊◊

Keturkampis $ABCD$ yra kvadratas, o taškas M yra kraštinės AB vidurys. Trikampio AMD plotas lygus 7 cm^2 . Kvadrato $ABCD$ plotas lygus:

- A) 14 cm^2 B) 21 cm^2 C) 25 cm^2 D) 28 cm^2 E) 36 cm^2

 $\varepsilon.26$

◊◊◊

Karolis atsiverčia žodyną ir sako: „Jeigu prie puslapio, kurio man reikia, numerio, pridėsiu sekančio puslapio numerį, tai gausiu 341.“ Kurio puslapio reikia Karoliui?

- A) 171 B) 341 C) 147 D) 170 E) 174

 $\varepsilon.27$

◊◊◊

Vieną naktį pabudau. Mano laikrodis rodė 2^{00} po vidurnakčio. Pastebėjės, kad laikrodis neina, prisukau jį ir vėl užmigau. Kai rytą išėjau iš namų, mano laikrodis rodė 5^{30} , o gerai einantis bažnyčios laikrodis rodė 7^{00} . Kelintą valandą aš buvau pabudęs naktį?

- A) 4^{00} B) 3^{30} C) 0^{30} D) 3^{00} E) 4^{30}

 $\varepsilon.28$

◊◊◊

Tėvui 52 metai, o jo dviem sūnums 24 ir 18. Po kelerių metų tėvo amžius bus lygus abiejų jo sūnų metų sumai?

- A) 6 B) 10 C) 5 D) 4 E) 11

 $\varepsilon.29$

◊◊◊

Kvadratinis $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ popieriaus lapelis padalytas į 25 cm^2 ploto kvadratus. Kiekvienas iš tų kvadratų padalytas į du trikampius. Kiek gauta trikampių?

- A) 5 B) 8 C) 9 D) 16 E) 21

 $\varepsilon.30$

◊◊◊

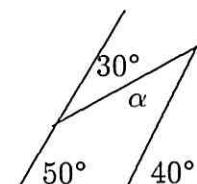
Šuo yra 9 kartus sunkesnis už katiną, o ropė yra 6 kartus sunkesnė už pele. Kelis kartus šuo sunkesnis už ropę?

- A) 30 B) 27 C) 1080 D) 15 E) Šuo lengvesnis už ropę.

 $\varepsilon.31$

◊◊◊

Šalia esančiame piešinyje pavaizduoto kampo didumas yra:



- A) 20° B) 25° C) 30° D) 35° E) 40°

$\varepsilon.32$

◊ ◊ ◊

Jei $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdots \cdot \frac{a}{b} = 9$, tai $a + b =$

- A) 17 B) 18 C) 35 D) 37 E) 41

$\varepsilon.33$

◊ ◊ ◊

$$(1900 + 1901 + 1902 + \dots + 1999) - (100 + 101 + 102 + \dots + 199) =$$

- A) 180 000 B) 178 200 C) 1 800 000 D) 1 801 800 E) 1 900 000

$\varepsilon.34$

◊ ◊ ◊

Futbolo komandą sudaro 11 žaidėjų. Vidutinis komandos žaidėjų amžius lygus 22 metams. Rungtynių metu vienas iš tos komandos žaidėjų susižeidė ir buvo priverstas palikti aikštę. Tada likusiųjų futbolininkų vidutinis amžius buvo 21 metai. Kiek metų turėjo susižeidęs futbolininkas?

- A) 21 B) 22 C) 23 D) 32 E) 33

$\varepsilon.35$

◊ ◊ ◊

Kai Jonukas eina į mokyklą pésčias, o namo grįžta važiuodamas dviračiu, kelionė trunka $1\frac{1}{2}$ valandos. Kai jis į abi puses važiuoja dviračiu, kelionė trunka $\frac{1}{2}$ valandos. Kiek laiko Jonukui reikia nueiti į mokyklą ir grįžti pésčiam?

- A) $1\frac{1}{4}$ h B) 2 h C) $1\frac{1}{4}$ h D) $2\frac{3}{4}$ h E) $3\frac{1}{2}$ h

$\varepsilon.36$

◊ ◊ ◊

Magiškojo kvadrato kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje įstrižainėje visų elementų suma yra ta pati. Šalia pavaizduotas magiškasis kvadratas, iš kurio du skaičiai pašalinti, o kiti trys uždengti kortelėmis su raidėmis A,B ir C. Kam lygi kortelėmis A, B ir C uždengtų skaičių suma?

16	3	A
C	10	
B		4

- A) 30 B) 41 C) 14 D) 25 E) Nustatyti neįmanoma.

$\varepsilon.37$

◊ ◊ ◊

Raudonkepuraitė savo močiutei suruošė krepšeli su vaisiais: 7 obuoliais, 8 kriaušėmis ir 3 apelsinais. Eidama pas močiutę, Raudonkepuraitė suvalgė 2 vaisius. Kokia situacija yra įmanoma:

- A) Močiutei neliko apelsinų
- B) Močiutei liko mažiau kriaušių negu apelsinų
- C) Močiutei liko tiek pat kiekvienos rūšies vaisių

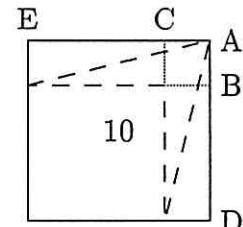
- D) Močiutei liko tiek pat dviejų rūsių vaisių
 E) Močiutei liko daugiau obuolių negu likusių vaisių

$\varepsilon.38$

◇ ◇ ◇

Šalia pavaizduotoje figūroje $AC = AB = x$, $BD = CE = 3x$. Brūkšnine linija pažymėtos figūros plotas lygus

- A) x^2 B) $3x^2$ C) $6x^2$ D) $7x^2$ E) $9x^2$



$\varepsilon.39$

◇ ◇ ◇

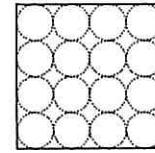
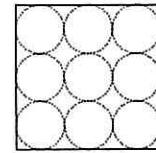
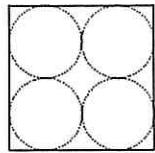
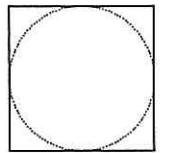
Didelis matmenų $9 \times 9 \times 9$ kubas sudėtas iš mažų kubelių $1 \times 1 \times 1$. Didysis kubas nuspalvinamas. Keli iš mažųjų kubelių turi lygiai dvi nuspalvintas sienas?

- A) 84 B) 54 C) 100 D) 108 E) 478

$\varepsilon.40$

◇ ◇ ◇

Kiekviename iš žemiau esančių piešinių pavaizduotas kvadratas su kraštine 1, kuriame nubrėžti skrituliai. Kuriame piešinyje skrituliai užima didžiausią plotą?



1 pav.

2 pav.

3 pav.

4 pav.

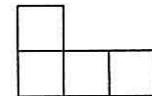
- A) 1 piešinyje B) 2 C) 3 piešinyje D) 4 piešinyje
 E) Visuose tą patį plotą.

$\varepsilon.41$

◇ ◇ ◇

Kurio iš stačiakampių su žemiau nurodytais matmenimis negalima sudėti iš šalia pavaizduotų figūrų?

- A) 4×4 B) 6×6 C) 8×8 D) 4×6 E) 6×8



$\varepsilon.42$

◇ ◇ ◇

Turime tris skaičius 3^{3^3} , 3^{3^3} , $(3^3)^3$. Jeigu didžiausią iš jų padalysime iš mažiausio, tai dalmuo bus lygus

- A) 1 B) 3 C) 3^9 D) 3^{18} E) 3^{24}

ε.43

◊ ◊ ◊

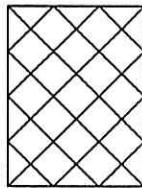
Teste yra 30 klausimų. Už teisingą atsakymą duodami 7 taškai, bet jeigu atsakymas klaidingas, arba iš viso neduotas, tai iš bendro skaičiaus atimama 12 taškų. Kaziukas už testą gavo 77 taškus. I kiek klausimų jis nedavė teisingo atsakymo?

- A) nuo 0 iki 4 B) 2 C) nuo 9 iki 12 D) nuo 13 iki 16
E) nuo 17 iki 20

ε.44

◊ ◊ ◊

Piešinyje pavaizduotos grindys yra stačiakampio formos, kurio plotis 3 m, o ilgis – 4 m. Grindys išklotos keramikinėmis plytelėmis, ir tam sunaudota 17 kvadratinių plytelių ir 14 trikampių plytelių. Reikia tokiu pat būdu ir tokiomis pat plytelėmis iškloti grindis, kurių matmenys yra 10 m × 20 m. Kiek tam prireiks plytelių?



- A) 200 B) 230 C) 300 D) 370 E) 400

ε.45

◊ ◊ ◊

Bilietai į teatrą kaina padidėjo 40%, bet iplaukos už tuos bilietus padidėjo tik 26%. Kiek procentų sumažėjo žiūrovų skaičius?

- A) 10% B) 14 % C) 20 % D) 38 % E) 50 %

ε.46

◊ ◊ ◊

Petras, Paulius ir jų senelis meškeriojo. Per tą laiką, kai senelis pagaudavo 8 žuvis, Paulius pagaudavo 4, o Petras – 7 žuvis. Per vieną valandą Petras sugavo 42 žuvis. Kiek žuvų per tą valandą sugavo visi trys kartu?

- A) 58 B) 94 C) 114 D) 125 E) 132

ε.47

◊ ◊ ◊

Kiek skirtinį sprendinių natūralaisiais skaičiais turi lygtis $a^2b - 1 = 1999$?

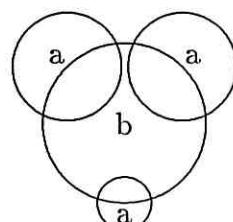
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

ε.48

◊ ◊ ◊

Srities, pažymėtos raidėmis a plotą pažymėkime P , o plotą srities, pažymėtos b – S (žr. piešinį). Skritulių skersmenys atitinkamai lygūs 6, 4, 4, 2. Tada

- A) $2P = S$ B) $3P = 2S$ C) $P = S$ D) $2P = 3S$ E) $P = 2S$



α.117

◊ ◊ ◊

Funkcija f apibrėžta visiems realiesiems skaičiams ir įgyja tik teigiamąsias reikšmes. Ji tenkina tokias sąlygas: $f(1) = 2, f(x+y) = f(x)f(y)$ su visais realiaisiais x ir y . Kam lygu $f(1/2)$?

- A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) 4

α.118

◊ ◊ ◊

Dolerio kursas trijose valiutose keityklose vakar rytą buvo toks pat. Pirmoje keitykloje prieš pietus kursas padidėjo 1%, o po pietų sumažėjo 1%. Antroje keitykloje prieš pietus kursas sumažėjo 1%, o po pietų padidėjo 1%. Trečioje keitykloje dolerio kursas nekito. Kurioje iš keityklų vakarykštėi dienai baigiantis dolerio kursas buvo aukščiausias?

- A) Visose trijose tokos pat B) Pirmoje C) Antroje D) Trečioje
E) Pirmoje ir antroje

α.119

◊ ◊ ◊

Kuris iš žemiau nurodytų skaičių lygus $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$?

- A) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ B) $1 + \sqrt{2}$ C) $1 + 2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ E) $\sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{2}}$

α.120

◊ ◊ ◊

Stačiojo trikampio perimetras lygus 18. Visų trijų jo kraštinių ilgių kvadratų suma lygi 128. Kam lygus to trikampio plotas?

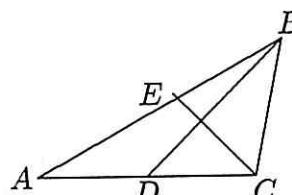
- A) 18 B) 16 C) 12 D) 10 E) 9

α.121

◊ ◊ ◊

Trikampio ABC pusiaukraštinės BD ir CE yra statmenos, $BD = 12, CE = 8$. Kam lygus trikampio ABC plotas?

- A) 24 B) 32 C) 48 D) 64 E) 96

**α.122**

◊ ◊ ◊

Jeigu sukeisčiau skaitmenis dviženkliame skaičiuje, reiškiančiam mano tėvo amžių, tai gaučiau mano amžių išreiškiantį skaičių. Kuris iš žemiau nurodytų skaičių gali reikšti mano tėvo amžių mano gimimo metu?

- A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

$\alpha.123$

◊ ◊ ◊

Kiek yra sveikujų skaičių n , su kuriais reiškinio reikšmė $\frac{2n^2+9n+13}{n+2}$ yra natūralusis skaičius?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

 $\alpha.124$

◊ ◊ ◊

Kam lygus pažymėtų stačiakampio dalių plotas?

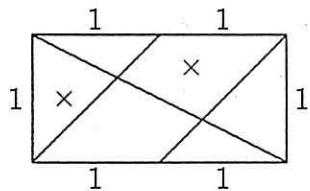
- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) 1

 $\alpha.125$

◊ ◊ ◊

Sakykime, kad

$$a = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5 + \sqrt{6}}}}}}$$



Kuri iš žemiau parašytų nelygybių teisinga?

- A) $1 \leq a < 2$ B) $2 \leq a < 3$ C) $3 \leq a < 4$ D) $4 \leq a < 5$ E) $5 \leq a < 6$

 $\alpha.126$

◊ ◊ ◊

Apskritas 2 m skersmens stalas uždengtas plona kvadratine staltiese, kurios kraštinės ilgis lygus 2,5 m. Staltiesės centras sutampa su stalo centru. Koks yra aukščiausiai nuo grindų esančio staltiesės krašto taško ir žemiausiai esančio staltiesės krašto taško aukščių skirtumas?

- A) 0,25 m B) 0,5 m C) $\frac{5\sqrt{2}-5}{4}$ m D) $\frac{5\sqrt{2}-2}{2}$ m E) Apskaičiuoti neįmanoma.

 $\alpha.127$

◊ ◊ ◊

Funkcija f apibrėžta formule

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x^4 + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4 + 1}}.$$

Kam lygu $f(1999^{2000})$?

- A) $-\frac{1}{1999^{1000}}$ B) $-\frac{1}{1999^{2000}}$ C) 0 D) $\frac{1}{1999^{2000}}$ E) $\frac{1}{1999^{1000}}$

 $\alpha.128$

◊ ◊ ◊

Iprastinė 8×8 šachmatų lenta sudaryta iš 64 langelių. Kiek kvadratų, sudarytų iš kvadratinių langelių, galima įžiūrėti šachmatų lentoje?

- A) 64 B) 65 C) 113 D) 114 E) 204

$\alpha.129$

◊ ◊ ◊

Kurį iš žemiau nurodytų skaičių reikėtų įstatyti vietoje n į reiškinį $1999^n - 1998n - 1$, kad gautume skaičių, kuris dalytuosi iš 1998×1999 ?

- A) 1997 B) 1998 C) 1999 D) 2000 E) 2001

 $\alpha.130$

◊ ◊ ◊

Dviejų daugianario $x^3 + ax^2 + bx + c$ šaknų suma lygi 0. Kam lygus c ?

- A) $a + b$ B) $\frac{a}{b}$ C) ab D) $a - b$ E) a^b

 $\alpha.131$

◊ ◊ ◊

Kiek realiujų šaknų turi lygtis $x^2 - [x] = 3$? ($[x]$ yra didžiausias sveikasis skaičius, ne didesnis už x .)

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

 $\alpha.132$

◊ ◊ ◊

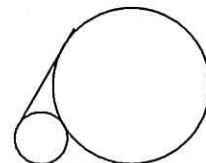
Kiek šaknų turi lygtis $|||x| - 1| - 2| - 3| = 2,5$?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

 $\alpha.133$

◊ ◊ ◊

Du apskritimai, kurių skersmenys yra 6 cm ir 18 cm, liečiasi iš išorės. Juos kartu apjuosėme virvute (žr. piešinį). Koks tos virvutės ilgis?



- A) $10 + 20\pi$ cm B) $12\sqrt{3} + 14\pi$ cm C) $13\sqrt{3} + 12\pi$ cm
D) $14\sqrt{3} + 11\pi$ cm E) Kitoks rezultatas.

 $\alpha.134$

◊ ◊ ◊

Rašydami iš eilės einančių skaičių kvadratus, gauname skaitmenų eilę

149162536496481....

Koks skaitmuo yra šimtojoje šios eilės vietoje?

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

 $\alpha.135$

◊ ◊ ◊

Vienoje saloje gyvena tikta arba teisuoliai – visada sakantys tiesą, arba melagiai – visada meluojantys. Bendras tos salos gyventojų skaičius yra 1999. Kiekvienas

iš jų turi vienintelę aistrą – mėgsta arba dainuoti, arba žaisti futbolą, arba meškerioti. Kiekvienam salos gyventojui buvo užduoti 3 klausimai:

- 1) Ar mėgstate dainuoti?
- 2) Ar mėgstate žaisti futbolą?
- 3) Ar mėgstate meškerioti?

I pirmą klausimą teigiamai atsakė 1000, iš antrą – 700, o iš trečią – 500 asmenų. Kiek melagių gyvena toje saloje?

- A) 102 B) 180 C) 201 D) 322 E) 729

$\alpha.136$

◊ ◊ ◊

Pradėdami nuo kairiojo viršutinio kampo šalia pa-
vaizduotoje diagrame, einame nuo raidės prie
raidės dešinėn arba žemyn. Kelias būdais taip
galima gauti žodį „KANGUR“?

<i>K</i>	<i>A</i>	<i>N</i>	<i>G</i>	<i>U</i>	<i>R</i>
<i>A</i>	<i>N</i>	<i>G</i>	<i>U</i>	<i>R</i>	
<i>N</i>	<i>G</i>	<i>U</i>	<i>R</i>		
<i>G</i>	<i>U</i>	<i>R</i>			
<i>U</i>	<i>R</i>				
<i>R</i>					

- A) 8 B) 32 C) 64 D) 128 E) 256

$\alpha.137$

◊ ◊ ◊

Taškas P yra kvadrato $ABCD$ viduje, o to taško atstumai iki viršūnių A, B ir C atitinkamai lygūs 2, 7 ir 9. Taško P atstumas iki viršūnės D yra:

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

$\alpha.138$

◊ ◊ ◊

Kiek daugiausiai poaibių, turinčių ne daugiau kaip 3 elementus, galima sudaryti iš septynelementės aibės taip, kad bet kurie du poaibiai turėtų lygiai vieną bendrą elementą?

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

$\alpha.139$

◊ ◊ ◊

Trikampio kampų didumai sutinka kaip $1 : 5 : 6$. Ilgiausios kraštinės ilgis yra 6 cm. Koks yra ilgis aukštinės, nuleistos į ilgiausią kraštinę?

- A) 1 cm B) 1,5 cm C) 2 cm D) 2,5 cm E) 3 cm

$\alpha.140$

◊ ◊ ◊

Funkcija f apibrėžta visų natūraliųjų skaičių aibėje taip:

$$f(n) = \begin{cases} n + 5, & \text{jei } n \text{ nelyginis}, \\ \frac{n}{2}, & \text{jei } n \text{ lyginis.} \end{cases}$$

Kam lygi skaitmenų suma nelyginio skaičiaus k , su kuriuo $f(f(f(k))) = 35$?

- A) 15 B) 12 C) 10 D) 9 E) 8

$\alpha.141$

◊ ◊ ◊

Mokyklos rankinio turnyre kiekviena komanda sužaidė su kiekviena kita komanda vienerias rungtynes. Už pergalę komanda gaudavo 2 taškus, už pralaimėjimą – 0 taškų, o už lygiąsias abi komandos gaudavo po tašką. Turnyro nugalėtoja per visą turnyrą pelnė 7 taškus, antros vietos laimėtoja – 5 taškus, o trečios vietos laimėtoja – 3 taškus. Kiek taškų pelnė komanda, užėmusi paskutinę vietą?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Nustatyti neįmanoma.

$\alpha.142$

◊ ◊ ◊

Seka $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) apibrėžta pagal taisykłę:

$$a_1 = 1999!, \quad a_{n+1} = \text{skaičiaus } a_n \text{ skaitmenų suma, kai } n \geq 1.$$

Kam lygus a_{1999} ?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

Neformalūs patarimai mokytojams ir dėstytojams

- Yra vienas užtikrintas dėstymo būdas: jums garantuotai pavyks užkrėsti nuobodiliu auditoriją, jeigu dėstomas dalykas nuobodus jums patiemis. Todėl pirmasis priesakas dėstytojams toks: būkite susidomėję savo dalyku.
- Jokie metodikos kursai neparengs jūsų suprantamai išdėstyti tą temą, kurių patys nesuprantate. Taigi antrasis priesakas: supraskite savo dalyką.
- Bet kurios srities mūsų žinias sudaro „informacija“ ir „praktiniai įgūdžiai“ (*know-how*). Matematikoje praktinius įgūdžius atitinka sugebėjimas spręsti uždavinius, o tai žymiai svarbiau negu vien turėti informaciją. Jums reikia parodyti studentams, kaip spręsti uždavinius – ar tai įmanoma padaryti nemokant spręsti patiemis? Taigi specialus priesakas matematikos dėstytojams toks: ugdykite ir palaikykite uždavinių sprendimo įgūdžius.

George Pólya, On the Curriculum
of Prospective High School Teachers
Amer. Math. Monthly, 68 (1958), p. 104.



• • • ○ • • •

Skyrelj tvarko Giedrius Alkauskas

Šio skyrelio uždaviniai taip pat iš matematinio turnyro – tarptautinės matematikos studentų olimpiados (*International Competition in Mathematics for University Students*).

• • • ○ • • •

ω.33

◊ ◊ ◊

Tegu $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija, visiems $x, y \in [0, 1]$ tenkinanti sąlygą

$$xf(y) + yf(x) \leq 1.$$

a) Įrodykite, kad

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

b) Raskite nors vieną, uždavinio sąlygą tenkinančią funkciją $f(x)$, kuriai a) nelygybė virsta lygybe.

ω.34

◊ ◊ ◊

Tegu $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ir aibę \mathcal{F} sudaro funkcijos $f : A_n \rightarrow A_n$, nelygios konstantoms ir tenkinančios sąlygas:

- a) $f(k) \leq f(k+1)$ visiems $k = 1, 2, \dots, n-1$;
- b) $f(k) = f(f(k+1))$ visiems $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Kiek funkcijų yra aibėje \mathcal{F} ?

ω.35

◊ ◊ ◊

Tegu \mathcal{S} yra erdvės \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) sferų šeima ir bet kurios dvi šios šeimos sferos kertasi daugiausia viename taške. Įrodykite, kad taškų, priklausančių mažiausiai dviems šios šeimos sferoms, aibė yra skaiti.

ω.36

◊ ◊ ◊

Tegu $p > 1$. Įrodykite, kad egzistuoja konstanta $K_p > 0$, kad visiems $x, y \in \mathbb{R}$, tenkinantiems sąlygą $|x|^p + |y|^p = 2$, teisinga nelygybė

$$(x-y)^2 \leq K_p(4 - (x-y)^2).$$

• • • $\alpha + \omega$ • • •

 $\omega.37$

 $\diamond \diamond \diamond$

Tegu $f : (0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ yra funkcija, nelygi nuliui tik taškuose a_n ($n = 1, 2, \dots$) ir $b_n = f(a_n)$.

a) Irodykite, kad jei

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty,$$

tai funkcija f diferencijuojama nors viename taške $x \in (0, 1)$.

b) Irodykite, kad kiekvienai neneigiamų skaičių sekai b_n , tokiai kad

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty,$$

egzistuoja intervalo $(0, 1)$ skaičių seka a_n , kad funkcija

$$f(x) = \begin{cases} b_n, & \text{jei } x = a_n, \\ 0, & \text{jei } x \neq a_n, (n \geq 1) \end{cases}$$

niekur nediferencijuojama.

Matematikos dėstyamas universitetuose privalo: a) atitiki poreikius tų žmonių, kuriems matematika reikalinga praktiniams tikslams; b) ugdyti matematikos specialistus; c) visiems studentams sudaryti tas intelektualinio ir moralinio ugdomo sąlygas, kurias kiekvienas universitetas, būdamas vertas savo vardo privalo suteikti. Šie tikslai neprieštarauja vieni kitiams, tačiau kiti kitą papildo. Viena vertus, lavingimo turint prieš akis praktinius tikslus vaidmuo matematikoje gali būti palygintas su eksperimentų vaidmeniu fizikoje ir chemijoje. Kita vertus, originalus ir nepriklasomas mąstymas negali būti ugdomas tuo pačiu metu neskatinant tyrinėjimų dvasios.

André Weil,
Mathematical Teaching in Universities,
Amer. Math. Monthly, 61 (1954), p.34.